(1- 3) مقدمة :

ان حل اي مسألة كهروستاتيكية يكون سهلا في حالة معرفة التوزيع الشحني حيث يمكن ايجاد كل من المجال والجهد الكهربائي بسهولة وبصورة مباشرة وذلك بأخذ التكامل لتوزيع الشحنة بأجمعه وهذا مارأيناه في الفصل السابق . اما اذا كان التوزيع الشحني غير محدد او غير معلوم فعليه يجب تعيين المجال الكهربائي اولا ، وفي هذا الفصل سنطور اسلوب بديل لمعالجة المسائل الكهروستاتيكية وسنتعامل في هذا الفصل مع الاجسام الموصلة ونترك المواد العازلة للفصل الرابع.

(2 -3) معادلة بويزون : *Poisson's Equation*

من الصيغة التفاضلية لقانون كاوس :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$but: \ \vec{E} = -\nabla u, \qquad \therefore \ \vec{\nabla}.\vec{\nabla} u = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

هذه معادلة بويزون

$$\boxed{\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_o}}$$

وتعطى $\nabla^2 u$ وفق الاحداثيات الكارتيزية (x,y,z) كالاتي :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

ووفق الاحداثيات الكروية $(r, \theta, \emptyset)$:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \emptyset^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

ووفقا للاحداثيات الاسطوانية $(r, \emptyset, z)$:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \emptyset^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

(3 – 3) معادلة لابلاس : *Laplace's Equation*

في طائفة معينة معينة من المسائل الكهروستاتيكية والتي تتضمن مواد موصلة تكون الشحنة بأجمعها مستقرة على سطح الموصل اي في مثل هذه الحالة تكون $\rho = 0$ عند معظم النقاط في الفراغ وعندها ستؤول معادلة بويزون الى مايعرف بمعادلة لابلاس حيث تتلاشى كثافة الشحنة .

معادلة لابلاس .

$$\boxed{\nabla^2 u = 0}$$

(4 – 3) حل معادلة لابلاس بمتغير واحد مستقل :

Solution of Laplace's Equation in one independent variable

1- عندما يكون $u=u(x)$ اي دالة لمتغير واحد فقط هو x فان حل المعادلة بالاحداثيات الكارتيزية يكون كالتالي :-

$$\nabla^2 u(x) = 0, \quad \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = 0 \ or: d\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$$

$$\int d\left(\frac{du}{dx}\right) = \int 0 , \Rightarrow \frac{du}{dx} = a, \ \int du = \int adx, \quad then: \quad u = ax + b$$

وهو الحل العام لمعادلة لابلاس بالاحداثيات الكارتيزية والقيم a,b هي ثوابت.

$$but: \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} u = -\frac{du}{dx} = -\frac{d}{dx}(ax+b) = -a$$

$$\therefore \vec{E} = -\mathrm{a}$$

2- وفقا للاحداثيات الكروية لمتغير واحد مثلا اذا كان $u=u(r)$ اي متغير فقط الى r اي ان :-

$$u = u(r), \qquad \nabla^2 u = 0$$

وبالاحداثيات الكروية:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\emptyset^2} = 0$$

ولمتغير واحد فقط مثل r فان :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0 \ \Rightarrow \mathrm{d}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0 , \Rightarrow \int d\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = \int 0 = A$$

$$\therefore r^2\frac{du}{dr} = A, \Rightarrow \quad \frac{du}{dr} = \frac{A}{r^2}, \quad \Rightarrow \int du = A\int\frac{dr}{r^2}, \quad \Rightarrow u = -\frac{A}{r} + B$$

وهي الحل العام بالاحداثيات الكروية حيث A,B ثوابت .

$$but: \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} u = -\frac{du}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{A}{r} + B\right) = \frac{-A}{r^2}$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{A}{r^2}$$

3- وفقا للاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد فقط :-

اذا كانت (u) دالة لمتغير واحد مثل (r) اي : $\quad u = u(r), \quad \nabla^2 u = 0$

وبالاحداثيات الاسطوانية :-

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \emptyset^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0$$

$$\int d\left(r\frac{du}{dr}\right)=\int 0 \Rightarrow r\frac{du}{dr}=A$$

$$\frac{du}{dr}=\frac{A}{r}\Rightarrow \mathrm{du}=\frac{A}{r}dr \Rightarrow \int du=A\int\frac{dr}{r}$$

$$u=A\ln r+B$$

المعادلة اعلاه تمثل الحل العام لمعادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية حيث و $A.B$ ثوابت .

$$\vec{E}=-\nabla u=-\frac{du}{dr}=-\frac{d}{dr}(A\ln r+B)$$

$$\therefore\ \vec{E}=-\frac{A}{r}$$

(5 – 3) حل معادلة بويزون : *Solution of Poisson's Equation*

قد بينا سابقا ان معادلة لابلاس ملائمة لحل المسائل الكهروستاتيكية التي تمتاز بأن تكون الشحنة مستقرة على سطوح الموصلات او متمركزة على شكل شحنات نقطية او خطية ، كذلك تصح معادلة لابلاس اذا ماملئت المنطقة الكائنة بواحد او اكثر من الاوساط العازلة البسيطة .

لو أخذنا مسألة كهروستاتيكية بحيث يكون جزء من الشحنة معطى بدلالة كثافة الشحنة $\rho(x,y,z)$ والجزء الباقي من الشحنة (الشحنة المحتثة) مستقرا على سطوح الموصلات ، ان مسألة من هذا النوع تتطلب حلا لمعادلة بويزون وكمثال على هذه نأخذ السؤال الاتي:-

س/ جد شدة المجال الكهربائي داخل حجم كروي فيه شحنات ، علما ان كثافة الشحنة الحجمية ثابتة وتساوي ρ وهي دالة للاحداثي r فقط وتتوزع الشحنة الكلية بشكل كروي متناظر .

الجواب/

$$\because\ \nabla^2 u=-\frac{\rho}{\epsilon_o}, \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=-\frac{\rho r^2}{\epsilon_o}, \Rightarrow \int d\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\epsilon_o}\int r^2\,dr$$

$$r^2\frac{du}{dr}=-\frac{\rho r^3}{3\,\epsilon_o}+C$$

$$\frac{du}{dr}=-\frac{\rho r}{3\,\epsilon_o}+\frac{C}{r^2}, \qquad \rightarrow \int du=-\frac{\rho}{3\,\epsilon_o}\int r\,dr+C\int\frac{dr}{r^2}$$

$$u = -\frac{\rho r^2}{6\,\epsilon_o} - \frac{C}{r} + B$$

وهو الحل العام لمعادلة بويزون لمتغير واحد (r) بالاحداثيات الكروية .

ولايجاد المجال الكهربائي:

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{-\rho r^2}{6\,\epsilon_o} - \frac{C}{r} + B\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\,\epsilon_o} - \frac{C}{r^2}$$

س/ جد الحل العام لمعادلة بويزون بالاحداثيات الكارتيزية عندما(x,z)ثوابت .

الجواب /

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_o} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad but \quad x\,,z = \ constant$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{-\rho}{\epsilon_o} \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$\int d\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\int dy$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{-\rho}{\epsilon_o}\mathrm{y} + \mathrm{C} \Rightarrow \int du = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\int y\,dy + C\int dy$$

$$\therefore u = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\frac{y^2}{2} + Cy + b$$

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dy}, \qquad \vec{E} = -\frac{d}{dy}\left(-\frac{\rho y^2}{2\,\epsilon_o} + Cy + b\right) = \frac{\rho}{\epsilon_o}y - C$$

س/ جد الحل العام لمعادلة بويزون بالاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد فقط .

الجواب / نفرض المتغير هو r فقط .

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

وبالاحداثيات الاسطوانية لمتغير واحد تصبح المعادلة :-

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}r, \quad \int d\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\int r\,dr, \qquad r\frac{du}{dr} = -\frac{\rho r^2}{2\,\epsilon_o} + A$$

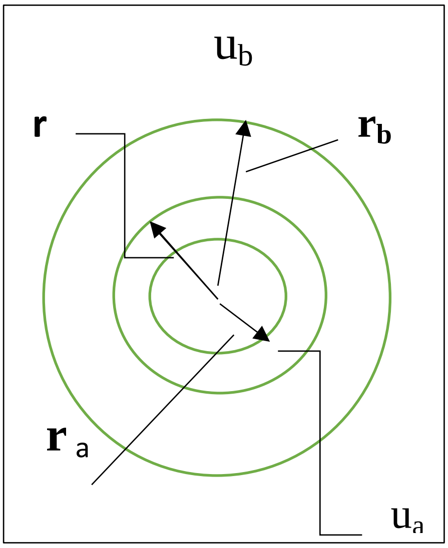
$$\therefore \frac{du}{dr} = \frac{-\rho r}{2\,\epsilon_o} + \frac{A}{r}, \qquad \int du = -\frac{\rho}{2\,\epsilon_o}\int r\,dr + A\int\frac{dr}{r}$$

$$u = -\frac{\rho r^2}{4\,\epsilon_o} + A\ln r + B$$

$$\vec{E} = -\nabla u = -\frac{du}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{\rho r^2}{4\,\epsilon_o} + A\ln r + B\right) = \frac{\rho r}{2\,\epsilon_o} - \frac{A}{r}$$

أسئلة الفصل الثالث

س1/ قشرتان كرويتان موصلتان نصف قطريهما r_a و r_b على الترتيب وضعتا بحيث ينطبق مركز الاولى على الثانية ثم شحنتا الى ان اصبح جهد احدهما u_a و u_b على الترتيب ، فأذا كان $r_b > r_a$ ، جد 1) الجهد عند النقاط الواقعة بين القشرتين . 2) الجهد عند النقاط الواقعة خارج القشرة الكبيرة.



الجواب /

1- لايجاد الجهد عند النقاط بين القشرتين اي: $r_a < r < r_b$

وبما ان الكرتان موصلتان ،اذن ستكون المنطقة بينهما خالية

من الشحنات $\rho = 0$ لان الشحنات تستقر على السطح و هذايعني ان:-

$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_o} = 0$ وبما ان u دالة الى r عليه سيكون :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

والحل كما مر علينا سابقا

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0, \qquad r^2\frac{du}{dr} = A, \qquad \int du = \int\frac{A}{r^2}dr, \Rightarrow u = -\frac{A}{r} + B$$

$$u = -\frac{A}{r} + B \ldots\ldots\ldots(1)$$

هذا هوالحل العام بالاحداثيات الكروية : الان نطبق الشروط الحدودية لايجاد الثوابت A,B وهي .

$$when\ r = r_a\,, \quad u = u_a \quad , \quad and\ r = r_b, \quad u = u_b$$

نعوض هذه الشروط في معادلة (1) فنحصل على :

$$u_a = -\frac{A}{r_a} + B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$u_b = -\frac{A}{r_b} + B \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بطرح معادلة (3) من معادلة (2) :

$$(u_a - u_b) = -A\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = -A\left(\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}\right)$$

$$\therefore\ -A = \frac{(u_a - u_b)}{(r_b - r_a)}(r_a r_b) \ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (2) لنجد قيمة B :-

$$u_a = \frac{(u_a - u_b)(r_a r_b)}{(r_b - r_a)r_a} + B, \qquad \therefore B = u_a - \frac{(u_a - u_b)r_b}{r_b - r_a} \ldots\ldots\ldots(5)$$

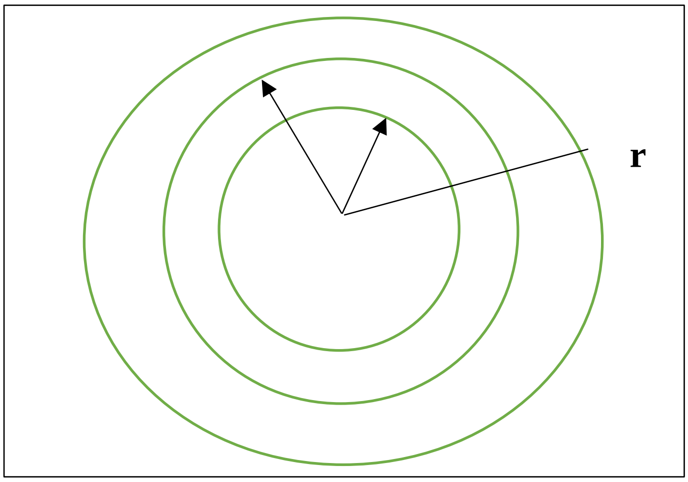
نعوض المعادلات (4) و (5) في معادلة (1) :-

$$u = \frac{(u_a - u_b)r_a r_b}{(r_b - r_a)r} + u_a - \frac{(u_a - u_b)r_b}{r_b - r_a}$$

$$= \frac{(u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r} + u_a(r_b - r_a) - (u_a - u_b)r_b}{r_b - r_a}$$

$$u = \frac{(u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r} + u_a r_b - u_a r_a - u_a r_b + u_b r_b}{r_b - r_a}$$

$$\therefore u = \frac{r_b u_b - r_a u_a + (u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r}}{r_b - r_a}$$



2- عندما $r > r_b$ اي خارج القشرة الكبيرة :-

بما ان r تقع خارج القشرة فأحتمال ان تكون

النقطة في المالانهاية وعليه الجهد يساوي صفر لان:

$$u = \frac{q}{4\pi r \in_o} \qquad \rightarrow u \propto \frac{1}{r}$$

$$if\ \ r = \infty, \ \ then\ u = 0$$

$$then: \quad \nabla^2 u = 0$$

وتأخذ نفس شكل الحل العام :

$$u = -\frac{A}{r} + B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نعوض الشروط الحدودية:-

$$if \quad r = \infty, \qquad then \quad u = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$if\ r = r_b, \qquad then \qquad u = u_b \ldots\ldots\ldots (3)$$

نعوض معادلة (2) في (1) :-

$$0 = -\frac{A}{\infty} + B, \qquad \therefore B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

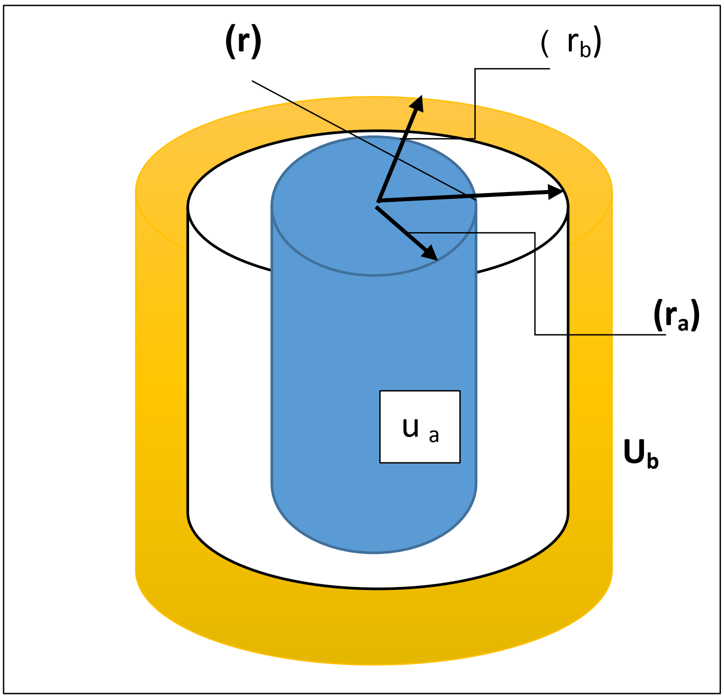
بتعويض معادلة (3) و (4) في (1) نحصل على :

$$u_b = -\frac{A}{r_b} + 0, \qquad \therefore\ -A = r_b u_b \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وبتعويض (4)و(5) في معادلة (1) نحصل على :-

$$u = \frac{r_b u_b}{r}$$

س2/ قشرتان اسطوانيتان متحدتا المركز نصف قطريهما r_b, r_a شحنتا الى ان اصبح جهداهما u_b, u_a على الترتيب جد الجهد عند النقاط بين القشرتين.



الجواب/

المنطقة بين القشرتين خالية من الشحنات

$$\rho = 0$$

اي ان : $\nabla^2 u = 0$

ومعادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانية :

$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$ والحل العام

لمعادلة لابلاس بالمحاور الاسطوانية:-

$$u = A \ln r + B \ldots\ldots (1)$$

نطبق الشروط الحدودية لمعرفة الثابت A ,B

$$when \ \ r = r_a \ , \qquad u = u_a \qquad , \qquad and \ \ r = r_b, \qquad u = u_b$$

$$u_a = A \ln r_a + B \dots\dots (2)$$

$$u_b = A \ln r_b + B \dots\dots (3)$$

بطرح المعادلتين نحصل على :-

$$u_a - u_b = A(\ln r_a - \ln r_b) = A \ln \frac{r_a}{r_b}, \qquad \therefore A = \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (2) لايجاد الثابت B :-

$$B = u_a - \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r_a \dots\dots\dots\dots (5)$$

نعوض معادلة (4) و(5) في معادلة (1) :-

$$U = \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r + u_a - \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r_a = \frac{(u_a - u_b) \ln r + u_a \ln \frac{r_a}{r_b} - (u_a - u_b) \ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$= \frac{(u_a - u_b) \ln r + u_a (\ln r_a - \ln r_b) - (u_a - u_b) \ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$\therefore U = \frac{u_b \ln r_a - u_a \ln r_b + (u_a - u_b) \ln r}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

س3/ اثبت ان جهد الشحنة النقطية يحقق معادلة لابلاس .

الجواب / يعطى جهد الشحنة النقطية بالعلاقة الاتية :-

$$u = \frac{1}{4\pi \in_o} \cdot \frac{q}{|\vec{r}|}$$

وبأستخدام هذه المعادلة يجب ان تحقق معادلة لابلاس ($\nabla^2 u = 0$) وسنستخدم الاحداثيات الكروية ولمتغير واحد (r)

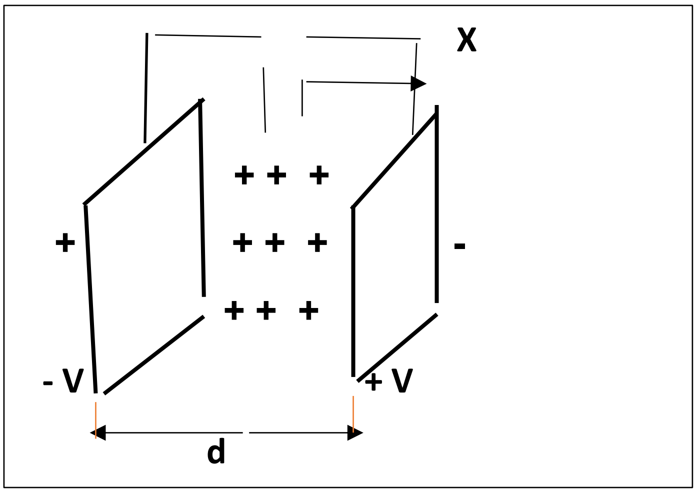
$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q}{4\pi \in_o r}\right]\right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left[\frac{q r^2}{4\pi \in_o}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(\frac{-q}{4\pi \in_o}\right) = 0$$

لان مشتقة الثابت = صفر   لذلك :

$$\boxed{\nabla^2 u = 0}$$

س4 / ربطت صفيحتا متسعة ذات لوحين متوازيين المسافة بينهما (d) ببطارية بفرق جهد (V) فاذا كانت كثافة الشحنة في الفراغ بين الصفيحتين تساوي (ρ) وهي منتظمة ، اوجد في كل نقطة داخل المتسعة العلاقة الخاصة لكل من 1- الجهد بالنسبة للصفيحة الموجبة ، 2- شدة المجال.



الجواب /

نلاحظ ان الجهد u يتغير باتجاه واحد عمودي على مستوى الصفيحتين وليكن بالاتجاه x .

ولحل هذا السؤال نستخدم معادلة بويزون

وذلك لكون ρ محدودة ومعلومة اي ان :-

$$\nabla^2 u = \frac{-\rho}{\epsilon_o}$$

ولو كانت الكثافة ρ غير معلومة لاستخدمنا معادلة لابلاس ($\nabla^2 u = 0$)

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-\rho}{\epsilon_o}, \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{-\rho}{\epsilon_o} \quad , \quad \Rightarrow \int d\left(\frac{du}{dx}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\int dx, \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{\rho x}{\epsilon_o} + A$$

$$\int du = \frac{-\rho}{\epsilon_o}\int x dx + A\int dx \Rightarrow \mathrm{U} = -\frac{\rho x^2}{2\,\epsilon_o} + Ax + B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

هذا هو الحل العام ولايجاد الثوابت A , B نطبق الشروط الحدودية :

$$if\ x = 0\,, then\ U = U_o\,, \qquad and\ if\ x = d\,, then\ \ U = U_o - V$$

نعوض الشروط الحدودية في معادلة (1) نحصل على :-

$$if\ x = 0, \qquad U = U_o, \quad B = U_o$$

$$if\ x = d, \qquad U = U_o - V, \qquad \therefore U_o - V = -\frac{\rho d^2}{2\,\epsilon_o} + Ad + U_o, \quad \therefore A = -\frac{V}{d} + \frac{\rho d}{2\,\epsilon_o}$$

نعوض قيم الثوابت A, B في معادلة (1) فنحصل على :-

$$U = -\frac{\rho x^2}{2\,\epsilon_o} + \left(\frac{\rho d}{2\,\epsilon_o} - \frac{V}{d}\right)x + U_o$$

ولايجاد قيمة المجال E ، حيث U تتغير باتجاه x فقط فان :

$$E_x = -\nabla U = -\frac{dU}{dx} = \ -\frac{d}{dx}\left[-\frac{\rho x^2}{2\,\epsilon_o} + \left(\frac{\rho d}{2\,\epsilon_o} - \frac{V}{d}\right)x + U_o\right]$$

$$E_x = \left[\frac{V}{d} + \frac{\rho}{2\,\epsilon_o}(2x - d)\right]$$

ملاحظة :- اذا كانت $\rho = 0$ فأن $E = \frac{V}{d}$ وهي تمثل العلاقة بين الجهد و شدة المجال بين لوحي المتسعة .