(5 – 1) مقدمة :-

تقسم طاقة منظومة من الشحنات بصورة عامة الى طاقة حركية وطاقة كامنة ولكن الطاقة الكلية لمنظومة شحنية واقعة تحت ظروف ستاتيكية تعد طاقة كامنة والتي تكون ناشئة من التأثيرات الكهربائية المتبادلة للشحنات والتي تدعى الطاقة الكهروستاتيكية .

ان الشغل المنجز على شحنة نقطية (q) لنقلها من الموضع A الى الموضع B هو .

$$W=-\int_A^B F.d\ell=-q\int_A^B E.d\ell \qquad as: \qquad (F=qE)$$

$$\because E=-\nabla U, \qquad \rightarrow W=q\int_A^B \nabla U.d\ell$$

وعليه فالطاقة الكامنة لشحنة نقطية واحدة تعطى بالعلاقة :-

$$W=q(U_B-U_A)$$

والتي تمثل التغير الحاصل في الطاقة الكهروستاتيكية للشحنة نتيجة انتقالها $A\rightarrow B$.

ملاحظة :- تكون الاشارة سالبة في المعادلة اعلاه لأن القوى المقاومة معاكسة للشغل , اي يجب ان يكون المجال عكس القوى لأنجاز الشغل .

(5 – 2) الطاقة الكامنة لمجموعة من الشحنات النقطية :-

Potential Energy of a group of point charges

الطاقة الكامنة لمنظومة مكونة من (m) من الشحنات النقطية يمكن الحصول عليها من حساب الشغل اللازم لتجميع هذه الشحنات وجلبها واحدة تلو الاخرى من المالانهاية .

ان جلب الشحنة الاولى ووضعها في مكانها لايتطلب بذل شغل , اي ان $W_1=0$, بينما جلب الشحنة الثانية يتطلب شغل ووضعها في مكانها وهو W_2 حيث :-

$$W_2=q_2U_{21}=\frac{q_1q_2}{4\pi\in_o r_{12}}, \qquad where\ \vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$$

وبالنسبة الى جلب الشحنة الثالثة q_3 فان الشغل المنجز :

$$W_3=q_3U_{31}+q_3U_{32}=q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\in_o r_{13}}+\frac{q_2}{4\pi\in_o r_{23}}\right)$$

وبنفس الطريقة يتم جلب الشنحنات q_4 و q_5 من اللانهاية , اي الشغل المنجز :

$$W_4=q_4U_{41}+q_4U_{42}+q_4U_{43}, \quad W_5=q_5U_{51}+q_5U_{52}+q_5U_{53}+q_5U_{54}$$

وعليه فالطاقة الكهروستاتيكية الكلية تكون مساوية لمجموع الشغل المنجز لكل الشحنات (الشغل المنجز يمثل الطاقة الكامنة).

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + \cdots$$

$$W_E = q_2U_{21} + q_3U_{31} + q_3U_{32} + q_4U_{41} + q_4U_{42} + q_4U_{43} + q_5U_{51} + q_5U_{52} + q_5U_{53} + q_5U_{54} + \cdots \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$as: \quad q_3U_{31} = q_3\frac{q_1}{4\pi \in_o r_{13}} = q_3\frac{q_1}{4\pi \in_o r_{31}} = q_1\frac{q_3}{4\pi \in_o r_{31}}, \quad because \ \vec{r}_{13} = \vec{r}_{31}$$

اي يحصل مجموع مزدوج حيث يحسب كل زوج مرتين حيث يسهم الزوج المتكون من شحنتين q_3 و q_4 مرة W_{34} ومرة W_{43}

عند الجمع : $W_{34} + W_{43} = 2W_{34}$

$$\therefore \mathrm{W} = W_{21} + W_{12} + W_{31} + W_{13} + W_{32} + W_{23} + \cdots$$

وبناء على ذلك تصبح معادلة (1) بالشكل :

$$W_E = q_1U_{12} + q_1U_{13} + q_2U_{23} + q_1U_{14} + q_2U_{24} + q_3U_{34} + \cdots \ldots\ldots (2)$$

بجمع معادلة (1) و(2) نحصل على -:

$$2W_E = q_1(U_{12} + U_{13} + U_{14} + \cdots) + q_2(U_{21} + U_{23} + U_{24} + \cdots) + q_3(U_{31} + U_{32} + U_{34} + \cdots) + q_4(U_{41} + U_{42} + U_{43} + \cdots) + ..$$

$$U_1 = U_{12} + U_{13} + U_{14} + \cdots$$

$$U_2 = U_{21} + U_{23} + U_{24} + \cdots$$

$$U_3 = U_{31} + U_{32} + U_{34} + ..$$

$$2W_E = q_1U_1 + q_2U_2 + q_3U_3 + q_4U_4 + \cdots$$

بقسمة المعادلة على 2

$$W_E = \frac{1}{2}[q_1U_1 + q_2U_2 + q_3U_3 + q_4U_4 + \cdots]$$

اذن كثافة الطاقة بالنسبة لتوزيع نقطي يعطى بالعلاقة -:

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=N} q_mU_m$$

$$but: \quad U_m = \sum_{K=1}^{m} \frac{q_K}{4\pi \in_o r_{Km}}$$

$$\therefore \ W_E = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{q_mq_K}{4\pi \in_o r_{km}} \qquad or \ W_E = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} q_m \sum_{k=1}^{N}\frac{q_K}{4\pi \in_o r_{km}}$$

ملاحظة :- اذا وجد سطح عازل بدل الفراغ يستبدل $\in_o$ بـ $\in$.

(5 – 3) الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني :-

Electrostatic Energy of Charge Distribution

عند حساب الطاقة الكهروستاتيكية اذا كانت الشحنة موزعة توزيعا سطحيا اوحجميا اي مستمرا وليس نقطيا نلجأ الى التكامل فيكون:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(r)U(r)\,dV, \quad or \quad W = \frac{1}{2}\int \sigma(r)U(r)\,da, \quad or \quad W = \frac{1}{2}\int \lambda)r)U(r)\,d\ell$$

حجمي ↑ سطحي ↑ خطي ↑

اذا كان لدينا توزيع شحني متصل (سطحي وحجمي) نستخدم المعادلة الاتية للعوازل للتعبير عن طاقة التوزيع الشحني:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(r)U(r)\,dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma(r)U(r)\,da, \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وبما ان الموصل يعد بمثابة منطقة متساوية الجهد بالامكان انجاز التكامل للموصلات فيكون : (عندما Q_j شحنة الموصل)

$$\frac{1}{2}\int \sigma U\,da = \frac{1}{2}Q_jU_j$$

واذا وجدت عوازل وموصلات, ستصبح معادلة (1) بالشكل :

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(r)U(r)\,dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma(r)U(r)\,da + \frac{1}{2}\sum Q_jU_j \ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

الحد الاخير من المعادلة يعبر عن مساهمة جميع الموصلات في طاقة المنظومة وبهذا يقتصر التكامل السطحي في الحد الثاني من المعادلة على السطوح غير الموصلة فقط.

في العديد من المسائل التي تتضمن شحنات طليقة (*free charges*) مستقرة على سطوح الموصلات لذلك فمعادلة (2) تؤول الى:

$$W = \frac{1}{2}\sum_j Q_jU_j$$

يمكن كتابة جهد الموصل (j) كمجموع حدين : $U_j = U_{j1} + U_{j2}$ حيث:

U_{j1}: يمثل الجهد الناشئ عن شحنة الموصل نفسه. U_{j2} الجهد الناشئ عن الشحنة التي تحملها الموصلات الاخرى.

$$W = \frac{1}{2}\sum_j Q_jU_{j1} + \frac{1}{2}\sum_j Q_jU_{j2}$$

الحد الاول يمثل طاقة ذاتية للموصل وتعتمد على الظروف المحيطة بالموصل (لأن توزيع الشحنة على كل موصل ترتب نفسها حسب الظروف المحيطة بها) والحد الثاني يمثل طاقة التأثير المتبادل بين الشحنات.

وبشكل عام تعطى قيمة الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني متصل للموصلات بالعلاقة:

$$W = \frac{1}{2}Q\Delta U$$

ويمكن التعبير عن طاقة المتسعة المشحونة بالشكل الاتي:

$$as:\ Q = C\Delta U,\quad then\ W = \frac{1}{2}Q\Delta U = \frac{1}{2}C(\Delta U)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

(4 – 5) كثافة الطاقة للمجال الكهروستاتيكي : *Energy density for an Electrostatic Field*

لو كان لدينا توزيع شحني حجمي وسطحي مميز بالكثافتين σ, ρ واللذان يرتبطان بالازاحة الكهربائية وفق العلاقتين :

$$\left.\begin{matrix} \nabla.D = \rho \\ D.n = \sigma \end{matrix}\right] \ldots\ldots\ldots.(1)$$

حيث المعادلة الاولى تستخدم للاوساط العازلة والثانية على سطوح الموصلات.

$$as:\ W = \frac{1}{2}\int_V \rho U\,dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma U\,da \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض (1) في (2)

$$as:\ W = \frac{1}{2}\int_V U(\nabla.D)\,dV + \frac{1}{2}\int_S UD.n\,da \ldots\ldots\ldots(3)$$

ويمكن تحويل التكامل الاول باستخدام المتطابقة :

$$\nabla.(FA) = F\nabla.A + A.\nabla F,\qquad let\ F = U, A = D$$

$$\nabla.(UD) = U\nabla.D + D.\nabla u,\quad also:\quad U\nabla.D = \nabla.(UD) - D.\nabla U\ \ and\ E = -\nabla U$$

$$\therefore\ U\nabla.D = \nabla.(UD) + \nabla.E \ldots\ldots\ldots.(4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (3) فنحصل على:

$$as:\ W = \frac{1}{2}\int_V \nabla.(UD)\,dV + \frac{1}{2}\int_V D.E\,dV + \frac{1}{2}\int_S UD.n\,da$$

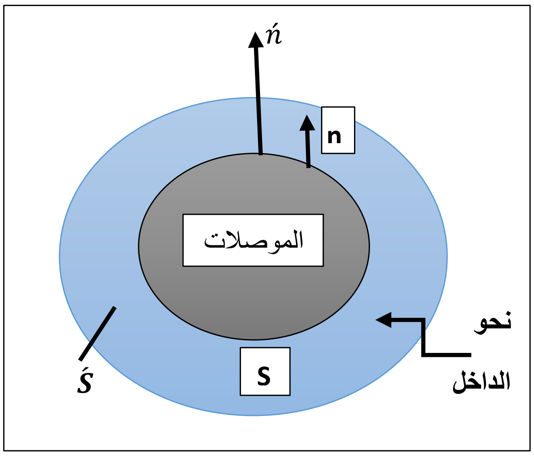
وباستخدام نظرية التباعد على الحد الاول من المعادلة:

$$as:\ W = \frac{1}{2}\int_{S+\acute{S}} UD.\acute{n}\,da + \frac{1}{2}\int_V D.E\,dV + \frac{1}{2}\int_S UD.n\,da$$

السطح ($S + \acute{S}$) يمثل السطح الكلي الذي يحيط بالحجم V وهذا السطح يتكون من جزئين الاول (S) يمثل سطوح جميع الموصلات في المنظومة , بينما يمثل ($\acute{S}$) السطح الذي يحيط بالمنظومة من الخارج, والذي يمكن اختيار موضعه في المالانهاية.

وكذلك $\acute{n}$: هو العمود الذي يشير الى خارج الحجم

nالسطح S نحو الحجم V ولهذا السبب يلغى التكامل السطحي الاول على (S) والتكامل الاخير على السطح S ويبقى التكامل السطحي على ($\acute{S}$). وبما ان ($\acute{S}$) تم اختياره في المالانهاية فعليه نجد ان التكامل للسطح ($\acute{S}$):



$$U=\frac{q}{4\pi \in_o r}, \rightarrow U \propto \frac{1}{r}, and\ D=\frac{q}{4\pi r^2}, \rightarrow D \propto \frac{1}{r^2}, \qquad also\ A=4\pi r^2, \rightarrow da \propto r^2$$

$$\grave{S} \propto \frac{1}{r^2} x \frac{1}{r} x r^2 \rightarrow \acute{S} \propto \frac{1}{r} = \frac{1}{\infty} = 0$$

اذن التكامل السطحي الاول يلغى ايضا وبذلك :

$$W=\frac{1}{2}\int E.D\,dV = \frac{1}{2}E.DV$$

$$but:\ D = \in E, then \qquad W=\frac{1}{2}\in E^2 V$$

ان كثافة الطاقة الكهروستاتيكية لوحدة الحجم للاوساط المادية هي:-

$$W=\frac{d\omega}{dV}=\frac{1}{2}\epsilon E^2=\frac{1}{2}D.E, \qquad or \quad W=\frac{1}{2}\int \epsilon E^2\,dV$$

وعليه نجد ان كثافة الطاقة اما ان تعطى بدلالة الجهد الكهربائي :

$$W=\frac{1}{2}\int \rho U\,dV$$

او بدلالة المجال الكهربائي:

$$W=\frac{1}{2}\int \epsilon E^2\,dV$$

اسئلة الفصل الخامس

س1/ كرة موصلة نصف قطرها R موجودة في الفراغ تحتل شحنة مقدارها Q اثبت ان الطاقة الكلية المخزونة في الوسط الذي يحيط بالكرة تساوي : - $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_o R}$.

الجواب/

$$W = \frac{1}{2} QU \ldots\ldots\ldots (1)$$

ومن الصيغة التكاملية لقانون كاوس:-

$$\oint_S E.nda = \frac{Q}{\epsilon_o} \rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_o}, \qquad \therefore E = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_o\, r^2} \ldots\ldots (2)$$

$$but: \quad U = -\int_\infty^R E.dr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

نعوض (2) في (3) نحصل على :

$$U = -\int_\infty^R \frac{Q\,dr}{4\pi\,\epsilon_o\, r^2} = -\frac{Q}{4\pi\,\epsilon_o}\int_\infty^R \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_o\, r}\Big]_\infty^R$$

$$\therefore U = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_o\, R} \ldots\ldots (3)$$

نعوضها في معادلة (1)الطاقة اعلاه :

$$W = \frac{1}{2} Q\left(\frac{Q}{4\pi\,\epsilon_o\, R}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\,\epsilon_o\, R}$$

س2/ احسب الطاقة الكامنة الكهربائية لشحنة مقدارها Q موزعة بصورة متجانسة في حيز كروي نصف قطره R باستخدام شدة المجال الكهربائي.

الجواب/

$$W_E = \frac{1}{2}\epsilon_o \int E^2\, dV$$

نحسب شدة المجال الكهربائي داخل وخارج الكرة . نفرض $\acute{E}$ الشدة داخل الكرة عندما $r < R$ وان الشحنة داخل الكرة $\acute{q} =$.

$$\acute{q} = \int_0^r \rho\, \mathrm{dV} = \rho \mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

نرسم سطح كاوس داخل الكرة:-

$$\oint \acute{E}.n\, da = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} \rightarrow \acute{E}.4\pi r^2 = \frac{(4/3)\pi\rho r^3}{\epsilon_o}$$

$$\acute{E} = \frac{\rho r}{3\, \epsilon_o}$$

ونفرض E شدة المجال خارج الكرة عندما $r > R$ والشحنة خارج الكرة q= .

$$q = \int_0^R \rho\, dV \rightarrow q = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

نرسم سطح كاوس خارج الكرة

$$\oint E.n\, da = \frac{q}{\epsilon_o}, \rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\pi\rho R^3}{\epsilon_o}$$

$$\therefore \mathrm{E} = \frac{\rho R^3}{3\, \epsilon_o\, r^2}$$

الطاقة الكامنة الكهربائية ستكون مجموعها داخل وخارج الكرة.(سناخذ $dV=Adr$ حيث A= مساحة المقطع العرضي)

$$W_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \acute{E}^2\, dV + \frac{1}{2}\epsilon_o \int E^2\, dV = \frac{1}{2}\epsilon_o \int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\, \epsilon_o}\right)^2 Adr + \frac{1}{2}\epsilon_o \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3\, \epsilon_o\, r^2}\right)^2 Adr$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_o \int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\, \epsilon_o}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_o \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3\, \epsilon_o\, r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_o \frac{4\pi\rho^2}{9\, \epsilon_o{}^2} \int_0^R r^4\, dr + \frac{1}{2}\epsilon_o \frac{4\pi\rho^2}{9\, \epsilon_o^2} \int_R^\infty \frac{R^6}{r^4} r^2 dr$$

$$= \frac{2\pi\rho^2}{9\, \epsilon_o}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R + \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\, \epsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_R^\infty = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\, \epsilon_o}\left[\frac{1}{5} + 1\right] = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\, \epsilon_o}\left[\frac{6}{5}\right]$$

$$= \frac{12\pi\rho^2 R^5}{45\, \epsilon_o} \ldots\ldots\ldots.(1)$$

ويمكن تبسيط الناتج كالاتي:

$$as:\ q = \int \rho\, dV = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \rightarrow\ q^2 = \frac{16}{9}\pi^2\rho^2R^6$$

نضرب معادلة (1) بـ $\frac{8\pi R}{8\pi R}$ فيصبح :

$$W_E = \left(\frac{16\pi^2\rho^2R^6}{9}\right)\frac{1}{8\in_o \pi R}\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{16\pi^2\rho^2R^6}{9}\right)\frac{1}{4\in_o \pi R}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3q^2}{20\in_o \pi R}$$

س3/ نفس السؤال السابق , احسب الطاقة الكامنة بأستخدام الجهد الكهروستاتيكي.

الجواب/ نحسب الطاقة الكامنة داخل وخارج الكرة باستخدام الجهد الكهروستاتيكي.

$$W = \frac{1}{2}\int \rho U\, dV, \qquad\qquad r \leftarrow R \leftarrow \infty \leftarrow U_{in}$$

$$as:\ E = -\nabla U\ then\quad E = -\frac{dU}{dr}, \rightarrow dU = -Edr$$

$$U_{in} = -\int E\, dr = -\int_{\infty}^{R} E_{out}\, dr - \int_{R}^{r} E_{in}\, dr = -\int_{\infty}^{R} \frac{\rho R^3}{3\in_o r^2}dr - \int_{R}^{r} \frac{\rho}{3\in_o} r dr$$

$$= -\frac{\rho R^3}{3\in_o}\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} - \frac{\rho}{3\in_o}\int_{R}^{r} r\, dr = -\frac{\rho R^3}{3\in_o}\left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{R} - \frac{\rho}{3\in_o}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R}^{r}$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\in_o R} - \frac{\rho r^2}{6\in_o} + \frac{\rho R^2}{6\in_o}$$

$$= \frac{2\rho R^2}{6\in_o} + \frac{\rho R^2}{6\in_o} - \frac{\rho r^2}{6\in_o} = \frac{\rho}{6\in_o}[3R^2 - r^2]$$

$$U_{out} = -\int_{\infty}^{r} E_{out}.\, dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho R^3}{3\in_o r^2}dr = -\frac{\rho R^3}{3\in_o}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho R^3}{3\in_o}\left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty}\right]$$

$$\therefore\ U_{out} = \frac{\rho R^3}{3\in_o r}$$

والطاقة الكامنة الكلية تكون بجمع الجهد الداخلي والخارجي:

$$W = \frac{1}{2}\rho\int_{0}^{R} U_{in}\, dV + \frac{1}{2}\rho\int_{R}^{\infty} U_{out}\, dV, \quad but \;\; dV = Adr = 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{1}{2}\rho\int_{o}^{R} \frac{\rho}{6 \in_o}[3R^2 - r^2].\, 4\pi r^2\, dr + \frac{1}{2}\rho\int_{R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3 \in_o r}.\, 4\pi r^2\, dr$$

$$= \frac{4\pi\rho^2}{12 \in_o}\left[3R^2\int_{0}^{R} r^2\, dr - \int_{o}^{R} r^4\, dr\right] + \frac{4\pi\rho^2 R^3}{6 \in_o}\int_{R}^{\infty} r\, dr$$

$$= \frac{\pi\rho^2}{3 \in_o}\left[3R^2\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5}\right] + \frac{2\pi\rho^2 R^3}{3 \in_o}\left(-\frac{R^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi\rho^2 R^5}{3 \in_o}\left[1 - \frac{1}{5} - 1\right] = \frac{-\pi\rho^2 R^5}{15 \in_o}$$