(1-2) الشحنة الكهربائية : Electric charge

الشحنة هي خاصية اساسية مميزة للجسيمات الاولية التي تتكون منها المادة والحقيقة ان جميع المواد تتكون من بروتونات والكترونات ونيوترونات واثنين من هذه الجسيمات تحملان شحنة هي (البروتونات والالكترونات) والمقصود بالشحنة من وجهة النظر العينية هو صافي الشحنة او الشحنة الفائضة فعندما نقول ان الجسم مشحون فان ذلك يعني ان الجسم يمتلك شحنة فائضة ناتجة اما عن فائض في عدد الالكترونات (سالب الشحنة) او فائض في عدد البروتانات (موجب الشحنة) والحقيقة ان الشحنة محفوظة لايمكن ان تفنى او تخلق.

(2-2) قانون كولوم : Coulomb Law

أن حصيلة القياسات التجريبية على القوى العاملة بين الشحنات الكهربائية هي:

1- هناك نوعان فقط من الشحنات الكهربائية هي الشحنات الموجبة والشحنات السالبة.

2- تؤثر شحنتان نقطيتان احداهما على الاخرى بقوة :

أ- تعمل على امتداد الخط الواصل بين الشحنتين .

ب- يتناسب مقدار هذه القوة طرديا مع حاصل ضرب الشحنتين .

ج- يتناسب مقدارها عكسيا مع مربع المسافة بينهما .

3- القوة المؤثرة بين الشحنتين اما قوة تنافر اذا كانت الشحنتان متماثلتين او تجاذب اذا كانت الشحنتان مختلفتين.

يمثل النصان الاخيران (نقطة 2,3) نص قانون كولوم :(القوة الكهربائية بين شحنتين تتناسب طرديا مع حاصل ضرب الشحنتين وعكسيا مع مربع المسافة بينهما).

ويمكن صياغة قانون كولوم بصيغة المتجهات على النحو الاتي:

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

But $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1q_2}{||\vec{r}|_{12}|^3}\vec{r}_{12}$$

ووحداتها نيوتن N وان :

حيث ان : $\vec{r}_{12}$ المتجه من q_1 الى $q2$. وكذلك

$$\epsilon_o = 8.85\times10^{-12}\frac{F}{m} or \frac{C^2}{J} or \frac{C^2}{N.m^2}, \quad and \quad K = 9\times10^9\frac{N.m^2}{coul^2}$$

يستخدم قانون كولوم على الشحنات النقطية , ويقصد بالشحنة النقطية حسب المفهوم العيني ، بأنها تلك الشحنة التي حيزا ابعاده صغيرة جدا مقارنة مع اي طول.

ويطبق قانون كولوم على الشحنات المستقرة النقطية في الفراغ وفي العوازل والموصلات ويصح تطبيق قانون كولوم على الجسيمات الاولية المشحونة (البروتونات والالكترونات).

$$\vec{F}_{21} = K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{21}|^3}\hat{r}_{21}, \quad |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| \qquad but \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(3-2) قاعدة التراكب للقوى :-

في حالة وجود اكثر من شحنتين نقطتين , فيمكن تعيين القوى المتبادلة بين هذه الشحنات بتكرار استخدام معادلة (1) . لو أفترضنا وجود منظومة من من (N) من الشحنات النقطية , فالقوى المؤثرة على الشحنة q_i هي:

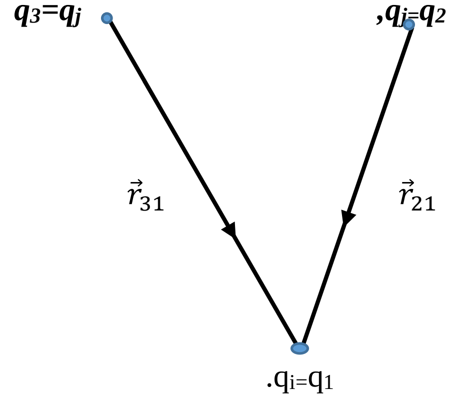
$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q_i \sum_{j\neq i}^{N} q_j \frac{\vec{r}_{ji}}{|\vec{r}_{ji}|^3}$$

اذ تشير علامة الجمع ($\sum$) الى حقيقة ان الجمع الاتجاهي يشمل جميع الشحنات عدا الشحنة (i) وهذه هي قاعدة التراكب للقوى والتي تنص على ان :-

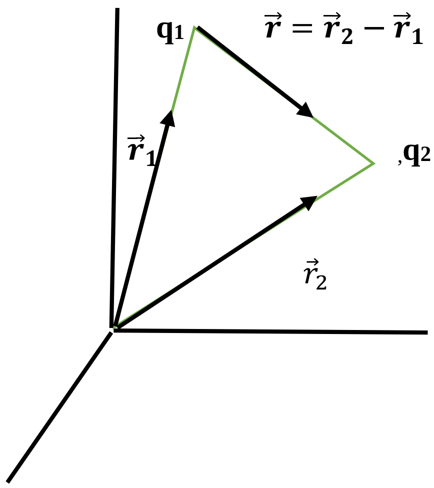
القوى الكلية المؤثرة على جسم تساوي المجموع الاتجاهي لجميع القوى المؤثرة على الجسم كلا على انفراد.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^2}\hat{r}_{21} + \frac{1}{4\pi \in_o}\frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_{31}|^2}\hat{r}_{31} + \cdots \qquad as\ q_i = q_1, and\ q_j = q_2.q_3, \dots\dots$$

حيث q_1 تكون مرجع وليس نقطة اصل . $\vec{F} = K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{21}|^2}\hat{r}_{21} + K\frac{q_1q_3}{|\vec{r}_{31}|^2}\hat{r}_{31}$ كما في الرسم التوضيحي التالي:-



اذا عبرنا عن مواقع الشحنات بوجود نقطة الاصل : $\vec{r}_1 + \vec{r} = \vec{r}_2 \implies \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.



$$\vec{F} = K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1q_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_o}\frac{[\hat{\imath}(x_2-x_1)+\hat{\jmath}(y_2-y_1)+\hat{k}(z_2-z_1)]}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{3/2}}$$

(4 – 2) كثافة الشحنة : *Charge density*

يمكن توسيع فكرة لتاثير المتبادل بين N من الشحنات النقطية وجعلها تسمل التاثير المتبادل بين شحنة نقطية وتوزيع متصل (ممتد) من الشحنة .

معنى التوزيع المتصل للشحنة:ان الشحنة الكهربائية تتكون من مضاعفات لشحنة اساسية هي شحنة الالكترون ($1.6x10^{-19}coul$) وهو مقدار ضئيل جدا, وهذا يعني ان قيمة اي شحنة كهربائية يجب ان تكون مساوية لشحنة الالكترون مضروبة في عدد صحيح . وهذا بدوره يعني ان اي عنصر صغير من الحجم مأخوذ من توزيع شحني يحتوي على عدد كبير جدا من الالكترونات وعندئذ يصبح بالامكان ان نصف اي توزيع شحني بدلالة دالة كثافة الشحنة والتي تمثل :- غاية الشحنة لوحدة الحجم عندما يصبح حجم الشحنة متناهي الصغر ويمكن وصف التوزيع الشحني بدلالة الدوال النقطية الاتية:

1- دالة كثافة الشحنة الحجمية ρ:- وتعرف كثافة الشحنة الحجمية بموجب العلاقة

$$\rho = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad and\ dq = \rho dV, \therefore \quad q = \int \rho dV$$

2- كثافة الشحنة السطحية σ :- وتعرف الكثافة السطحية للشحنة بموجب العلاقة

$$\sigma = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad and\ , dq = \sigma dS \ \therefore\ q = \int \sigma dS$$

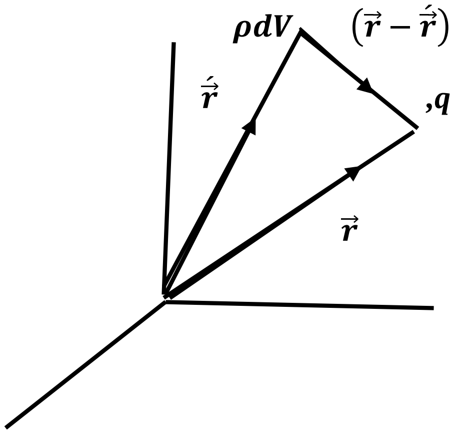
3- كثافة الشحنة الطولية λ :- وتعرف كثافة الشحنة الطولية بموجب العلاقة

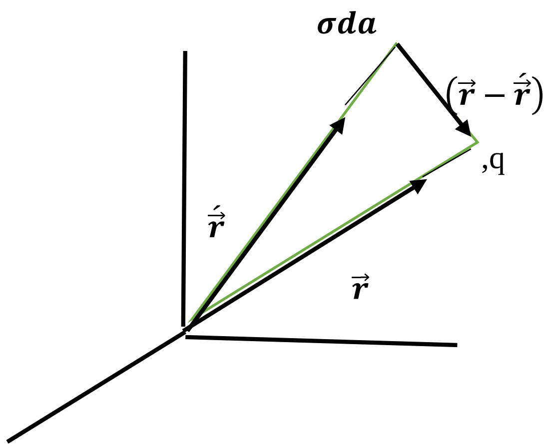
$$\lambda = \lim_{\Delta \ell\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell} \quad and\ , \ dq = \lambda d\ell, \ q = \int \lambda d\ell$$

ان $\rho, \sigma. \lambda$ تمثل كثافة الشحنة الفائضة اوكثافة صافي الشحنة .

اذا توزعت الشحنة بحيث شغلت حجما قدره V بكثافة حجمية ρ واصبحت كثافتها السطحية σ على السطح S المحيط بالحجم V لامكن ايجاد قوة كولوم التي يؤثر بها هذا التوزيع الشحني على شحنة نقطية q محدد موضعها بالمتجه $\vec{r}$ وفق العلاقة التالية:-

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\int \frac{(\vec{r}-\acute{\vec{r}})}{|\vec{r}-\acute{\vec{r}}|^3}\rho dV + \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\int \frac{(\vec{r}-\acute{\vec{r}})}{|\vec{r}-\acute{\vec{r}}|^3}\sigma da$$





(5-2) المجال الكهربائي : Electric Field

يعرف المجال الكهربائي عند نقطة ما بأنه القوة المؤثرة على شحنة اختبارية موضوعة عند تلك النقطة الى قيمة الشحنة الاختبارية ويعطى بالعلاقة التالية :-

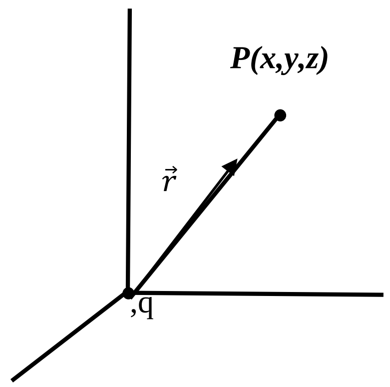
$$\vec{E}=\lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q}=\frac{\vec{F}}{q}\ \frac{volt}{m}\ or\ \frac{N}{coul}\quad ,as\ \frac{N}{coul}=\frac{J/m}{coul}\ \text{but}\ \frac{J}{coul}=\text{volt}\Longrightarrow\frac{volt}{m}=\frac{N}{coul}$$

ان الهدف من ادخال الغاية في تعريف المجال هو لجعل الشحنة الاختبارية غير مؤثرة على التوزيع الشحني المولد للمجال . (الشحنة الاختبارية تؤخذ عادة بقيمة واحد كولوم)

$$\vec{F}=K\frac{q_1q_2}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\Longrightarrow\vec{E}=\frac{\vec{F}_{12}}{q_2}=\frac{q}{4\pi\in_o r^2}\hat{r}$$

اذا كانت الشحنة المسببة للمجال الكهربائي (q) واقعة في نقطة الاصل والشحنة الاختبارية واقعة عند النقطة (P) على مسافة r من الشحنة q فعندئذ يعطى المجال الكهربائي بالعلاقة التالية:

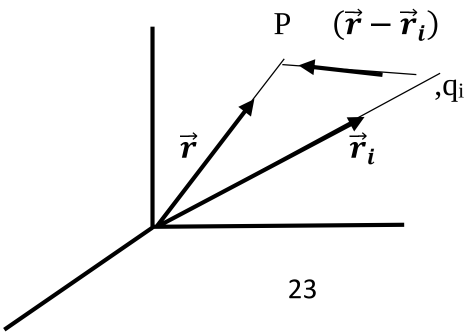
$$\vec{E}=K\frac{q}{r^2}\hat{r}\qquad or\qquad \vec{E}=K\frac{q}{r^3}\vec{r}$$



اما اذا كانت لدينا مجموعة من الشحنات النقطية مسببة للمجال الكهربائي (q_i) حيث ($i=1,2,3,\ldots$) ولاتقع في نقطة الاصل ولكن تبعد بمسافة r_i عن نقطة الاصل اما الشحنة الاختبارية عند النقطة P على مسافة r من نقطة الاصل عندئذ يعطى المجال الكهربائي بالعلاقة التالية :

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\ ,\qquad as\ \vec{r}_i+(\vec{r}-\vec{r}_i)=\vec{r}$$

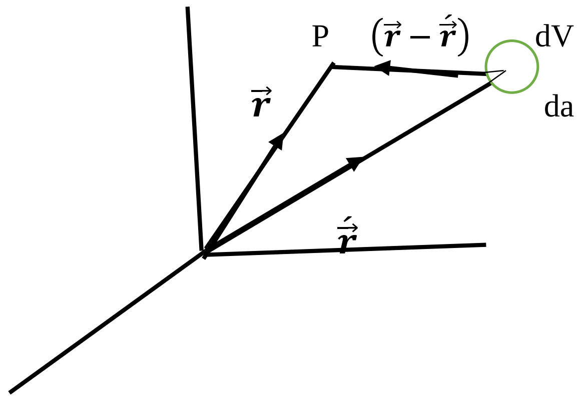
ويكون المجال بنفس اتجاه القوة .



لنأخذ توزيع شحني مكون من N من الشحنات النقطية $q_1, q_2, \dots\dots, q_N$ ونفرض انها موضوعة على النقاط $r_1, r_2, \dots\dots, r_N$ على الترتيب ومن توزيع حجمي لشحنة تشغل حجما قدره V بكثافة حجمية $\rho(\acute{r})$, ومن توزيع سطحي لشحنة موزعة على سطح S مميز بكثافة سطحية $\sigma(\acute{r})$ فاذا وضعت شحنة اختبارية (q) عند النقطة P التي تبعد مسافة r عن نقطة الاصل اي ان لدينا توزيع حجمي وسطحي فالمجال الكهربائي في هذه الحالة يعطى بالعلاقة الاتية بحيث يغطي التوزيع الشحني بأكمله -:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_V \frac{(\vec{r}-\acute{\vec{r}})}{|\vec{r}-\acute{\vec{r}}|^3}\rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S \frac{(\vec{r}-\acute{\vec{r}})}{|\vec{r}-\acute{\vec{r}}|^3}\sigma dS, \qquad as\ \acute{\vec{r}} + (\vec{r}-\acute{\vec{r}}) = \vec{r}$$

↑ نقطي   ↑ حجمي   ↑ سطحي



لأثبات ان المجال الكهربائي محافظ (Conserved) نتبع مايلي -:

اذا ازيحت شحنة مقدارها q في مجال كهربائي E بحيث لايؤثر وجودها على شكل المجال او مقداره , ازاحة تفاضلية ($d\ell$) من نقطة a الى نقطة b وبدون تغيير في طاقتها الميكانيكية فان الشغل المنجز عليها يكون :

$$W = -\oint_a^b \vec{E}\, Q . d\ell \qquad \text{(الشغل = F=القوة x الازاحة =QE)}$$

والاشارة السالبة تعني ان الشغل قد انجز ضد المجال الكهربائي $\vec{E}$ وكانت الشحنة على مسار مغلق ولسهولة الحل نتصور ان الجسم هو شحنة نقطية مقدارها Q فالشغل المنجز عندئذ هو-:

$$W = -\oint \vec{E}\acute{Q} . d\ell = -\frac{Q\acute{Q}}{4\pi\epsilon_o}\oint_a^b \frac{\vec{r}.d\ell}{\vec{r}^3}$$

الحد داخل التكامل يمثل $\frac{d\ell}{r^2} = \frac{-d}{dr}$ وعليه:

$$W = -\frac{Q\acute{Q}}{4\pi\epsilon_o}\oint_a^b \frac{-d}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{Q\acute{Q}}{4\pi\epsilon_o}\oint_a^b \frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q\acute{Q}}{4\pi\epsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b$$

ان مجموع الزيادات في 1/r في مسار مغلق يساوي صفر لان قمة r ثابتة هي نفسها عند بداية ونهاية المسار وعليه فالتكامل الخطي يساوي صفر وعليه فالشغل المنجز لتحريك شحنة نقطية حول اي مسار مغلق في مجال شحنة نقطية اخرى يساوي صفر اي ان -:

$$\oint \vec{E}.d\ell = 0$$

ومن نظرية ستوكس وعند كل نقاط الفراغ :

$$\oint \vec{E}.d\ell = \oint \vec{\nabla}\times\vec{E}dS = 0$$

(2 – 6) الجهد الكهروستاتيكي :- *The Electrostatic Potential*

اذا تلاشى التفاف كمية متجهة لأمكن التعبير عن هذه الكمية المتجهة بمثابة انحدار لكمية لامتجهة وهذا الكلام ينطبق على المجال الكهربائي المعطى بالمعادلة (2) ولتحقيق ذلك تأخذ التفاف المجال الكهربائي .

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{i=1}^{N} q_i\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_V \vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}-\acute{\vec{r}}}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^3}\rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S \vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}-\acute{\vec{r}}}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^3}\sigma dS$$

$$from\ the\ hypothesis\quad \vec{\nabla}\times\emptyset F = \emptyset\vec{\nabla}\times F + \vec{\nabla}\emptyset\times F$$

$$let\ \emptyset = \frac{1}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^3}\ , and\quad \vec{r}-\acute{\vec{r}}_i = F$$

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}-\acute{\vec{r}}}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^3} = \frac{1}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^3}\nabla\times\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right) + \nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^3}\times\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right) \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\because\ \vec{\nabla}\times\vec{r} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$we\ proved\ that\quad \nabla\frac{1}{|r|^3} = -3\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^4} = -3\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

$$\therefore\ \nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^3} = -3\frac{\vec{r}-\acute{\vec{r}}}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1)

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}-\acute{\vec{r}}}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^3} = 0 - \frac{3\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^5}\times\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right),\qquad but\ \left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)\times\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right) = 0$$, متوازيان

$$\therefore\ \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|^3} = 0$$

القوة محفوظة

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \ldots\ldots\ldots..(4)}$$

تشير معادلة 4 الى وجود دالة لامتجهة ذات انحدار مسار للمجال الكهربائي وهذه الدالة هي الجهد الكهروستاتيكي u.

وعليه اذا كان التفاف كمية متجهة يساوي صفر فنعبر عن هذه الكمية المتجهة بدلالة انحدار كمية لامتجهة اي ان :

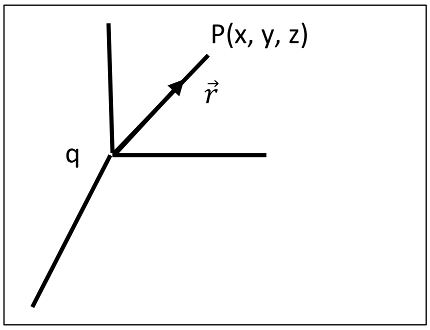
$$\boxed{\vec{E} = -\nabla u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)}$$

$$\because\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\ ,\quad also\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\therefore\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left(-\nabla\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = -\nabla\frac{q}{4\pi\epsilon_o|\vec{r}|} = -\nabla u$$

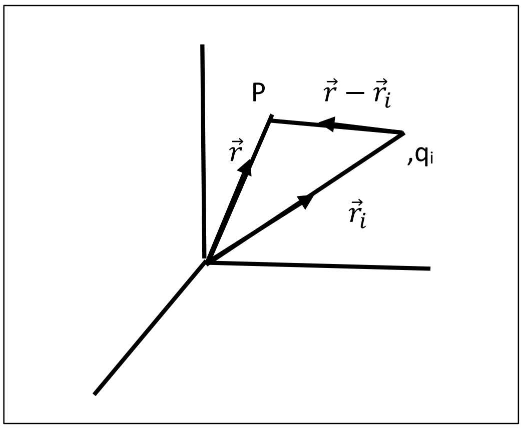
$$u = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{|\vec{r}|} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

حيث الشحنة q هي المسببة للجهد الكهروستاتيكي ونفرض انها تقع في نقطة الاصل والشحنة الاختبارية عند الموقع P على بعد r من نقطة الاصل .



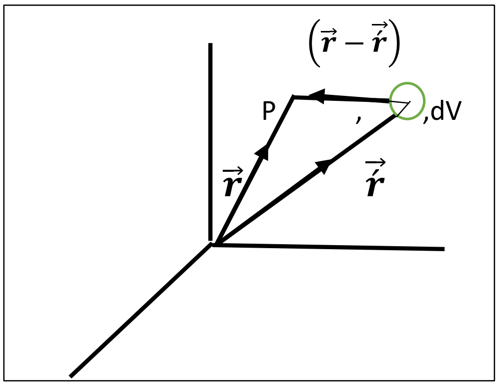
ويعطى الجهد الكهروستاتيكي الناشىءعن مجموعة من الشحنات النقطية (q_i) والتي لا تقع في نقطة الاصل بل على بعد r_i من نقطة الاصل والشحنة الاختبارية في الموقع P على بعد r من نقطة الاصل بالعلاقة :-

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \ldots\ldots\ldots..(7)$$



واذا كان لدينا توزيع شحني بشكل (نقطي و حجمي و سطحي) والشحنة الاختبارية في الموقع P على بعد r من نقطة الاصل فالجهد الكهروستاتيكي عندئذ يعطى بالعلاقة ادناه:-

$$u(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}+\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_V\frac{\rho(r)dV}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}+\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_S\frac{\sigma(r)da}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$



كما يمكننا الحصول على الجهد الكهروستاتيكي بصورة مباشرة وذلك بوجود المجال الكهربائي كما في المعادلة التالية

$$E(r)=-\nabla u$$

وبأخذ التكامل للطرفين : $\int_{ref}^{r}E(r).dr=-\int_{ref}^{r}\nabla u.dr$

حيث ref نقطة المرجع واختبرت عند نقطة يكون عندها الجهد يساوي صفر ومن تعريف الانحدار نجد ان :-

$$\nabla u(r)=\frac{du(r)}{dr}\Longrightarrow\nabla u(r).dr=du(r)\qquad but\int_r du(r)=u(r)$$

$$\int_{ref}^{r}E(r).dr=-\int_{ref}^{r}du(r)=-u(r)$$

$$\boxed{u(r)=-\int E(r)dr\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(8)}$$

(7 – 2) الطاقة الكامنة :- *Potential Energy*

ان هناك علاقة بين الجهد الكهروستاتيكي والطاقة الكامنة المصاحبة للقوة المحافظة الكهروستاتيكية وبصورة عامة يمكن التعبير عن الطاقة الكامنة المصاحبة لقوة محافظة بالشغل المبذول لتحريك الشحنة (q) من موقع الى اخر داخل المجال E والذي يعطى بالعلاقة :-

$$w(r) = -\int_{ref}^{r} F(r).dr$$

حيث w(r) تمثل الطاقة الكامنة عند الموقع r نسبة الى نقطة المرجع (ref) تكون عندها الطاقة الكامنة (اي الشغل والجهد) تساوي صفر وظهرت الاشارة السالبة لأن الشغل غير ناتج عن قوة المجال وانما من قوة مقاومة او الجهة المعاكسة للقوة.

$$F = qE, \;\; w = -\int_{ref}^{r} F.dr \;, \qquad \therefore w = -q\int_{ref}^{r} E.dr \,, \;\; but \;\; E = -\nabla u$$

$$\therefore w = q\int_{ref}^{r} \nabla u.dr \;, \quad but \;\; \nabla u = \frac{du}{dr}, \Longrightarrow \nabla u.dr = du$$

$$\therefore w = q\int_{ref}^{r} du = qu(r)]_{ref}^{r}$$

$$w = q(u(r) - u(ref)) = qu$$

$$\boxed{u = \frac{w}{q} \;\; \frac{Joul}{coul} = volt}$$

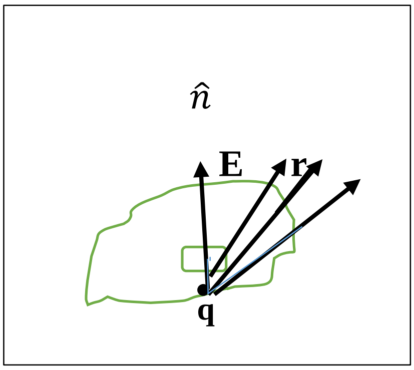
اي ان فرق الجهد يمثل مقدار الشغل المنجز لوحدة الشحنة

(8 – 2) قانون كاوس :- *Gauss Law*

اوجد كاوس العلاقة بين تكامل المركبة العمودية للمجال الكهربائي على سطح مغلق والشحنة الكلية التي يضمها السطح. بما ان المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة نقطية (q) واقعة في نقطة الاصل عند نقطة محددة بالمتجه $\vec{r}$ يساوي :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

بأخذ التكامل السطحي للمركبة العمودية لهذا المجال على سطح مغلق والذي يحيط بالشحنة (q) سنحصل على:



$$\oint_s \vec{E}.\hat{n}da = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\oint \frac{\vec{r}.\vec{n}}{|\vec{r}|^3}da$$

$$but \;\; \oint_s \frac{\vec{r}.\hat{n}}{|\vec{r}|^3}da = 4\pi$$

$$\therefore \oint \vec{E}.\hat{n}\,da = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}.4\pi = \frac{q}{\epsilon_o}$$

الصيغة التكاملية لقانون كاوس

$$\boxed{\oint \vec{E}.\hat{n}da = \frac{q}{\epsilon_o}}$$

تشير المعادلة اعلاه الى ان التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي على اي سطح مغلق (الفيض) يساوي المجموع الكلي للشحنات الموجودة ضمن السطح المغلق مقسوما على سماحيته.

اما اذا كان لدينا شحنتين يصبح القانون :

$$\oint \vec{E}.dS = \frac{q_1}{\epsilon_o} + \frac{q_2}{\epsilon_o} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_o}$$

وبصورة عامة يعطى القانون بالصيغة :-

$$\oint \vec{E}\,.dS = \frac{1}{\epsilon_o}\sum q_i$$

ولأيجاد الصيغة التفاضلية لقانون كاوس نستخدم نظرية التباعد .

$$\oint \vec{F}.\hat{n}\,da = \int_V \vec{\nabla}.\vec{F}\,dV$$

$$\oint \vec{E}.\hat{n}\,da = \int_V \vec{\nabla}.\vec{E}\,dV \qquad but \oint \vec{E}.\hat{n}da = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}\,dV = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$but\;\; dq = \rho dV \;\Rightarrow q = \int \rho\, dV$$

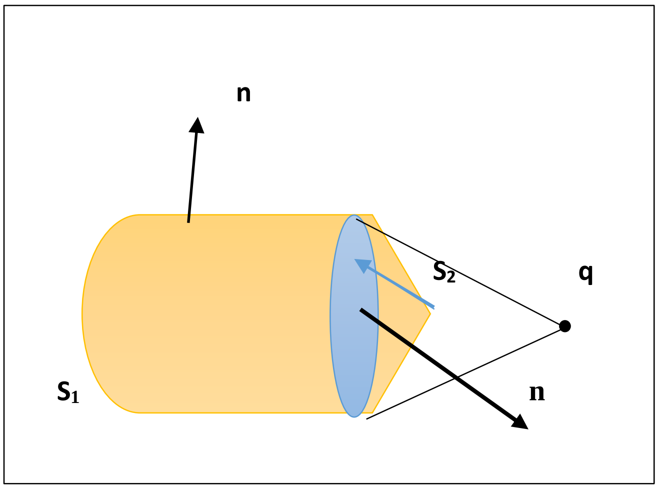
$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}\,dV = \frac{1}{\epsilon_o}\int_V \rho\, dV$$

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}}$$

اذا وقعت الشحنة خارج السطح , يمكن تقسيم السطح الى قسمين مساحتهما S_1 و S_2 وهما في مواجهة الزاوية المجسمة نفسها المتكونة عند الشحنة (q) وتكون مساهمة كل من السطحين للتكامل السطحي متساوية بالمقدار ومتعاكسة في الاشارة مما يؤدي الى تلاشي التكامل الكلي للسطح المغلق اي يصبح التكامل السطحي لشحنة واقعة

خارج السطح المغلق يساوي صفر وبذلك يمكننا ان نستنتج أنه اذا احاط السطح المغلق بالشحنة النقطية لأصبح التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال العمودية الكهربائي مساويا الى $\frac{q}{\epsilon_o}$ اما اذا وقعت الشحنة خارج السطح المغلق اصبح التكامل السطحي مساويا للصفر.

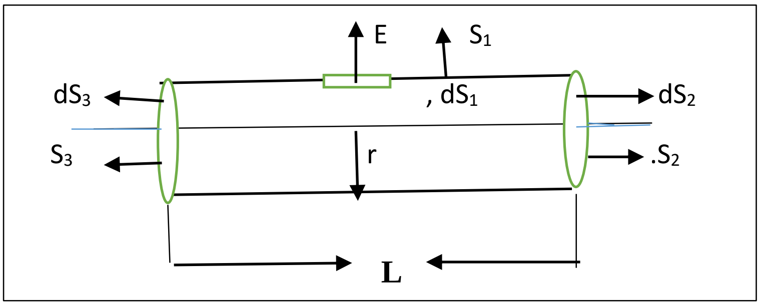


(9 – 2) تطبيقات قانون كاوس : *Application of Gauss's law*

لقانون كاوس فوائد عملية تتجلى في توفير اسلوب سهل لحساب المجالات الكهربائية في الحالات التي يكون فيها المجال بقدر كاف من التماثل , وعليه يجب اختيار سطح مغلق (سطح كاوس) بحيث يكون للمجال مركبة عمودية عليه ذات قيمة ثابتة لجميع نقاط السطح او ان تكون قيمة المركبة صفرا , وعلى سبيل المثال :

لأيجاد المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة خطية طويلة جدا ذات كثافة شحنية قدرها λ لوحدة الطول .

لحل هذا المثال نجد ان طبيعة التماثل في هذه الحالة تشير الى ان المجال الكهربائي المتولد يكون شعاعيا وغير معتمد على الموقع سواء من ناحية البعد على امتداد خط الشحنة او من ناحية الموضع الزاوي حول الشحنة الخطية كما في الشكل :



وهذا يعني ان التوزيع المنتظم للشحنة على على طول الخط المستقيم اللانهائي يشير الى ان المجال الناشئ عن الخط يكون بأتجاه شعاعي منبعث من الخط وان مقدار شدة المجال مساوي لجميع النقاط التي تبعد مسافة قدرها (r) وعليه نجد ان افضل سطح كاوس ملائم لهذا التناسق الشعاعي للمجال المحيط بالخط المشحون هو سطح اسطواني دائري مغلق نصف قطره (r) وطوله (L) ومحوره منطبق على الخط المشحون كما في الشكل اعلاه.

$$\oint E.n\,da = \oint E\,.\,dS = \oint E\cos\theta\,dS = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$\oint Ecos\theta\, dS = \oint_{S_1} Ecos\theta\, dS + \oint_{S_2} Ecos\theta\, dS + \oint_{S_3} Ecos\theta\, dS = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$\oint Ecos\theta\, dS = \oint_{S_1} Ecos(o)\, dS + \oint_{S_2} Ecos(90)\, dS \oint_{S_3} Ecos(90)\, dS = ES_1 = E(2\pi rL) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$but\ q = \int \lambda\, d\ell = \lambda \int d\ell = \lambda L$$

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} \quad \text{(مقدارا)}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi\epsilon_o \vec{r}^2} \quad \text{اتجاها}}$$

(10 -2) الموصلات والعوازل *Conductors and Insulators*

بالامكان تصنيف المواد تبعا لسلوكها الكهربائي الى صنفين :- الموصلات والعوازل .

الموصلات : هي تلك المواد التي تحتوي على عدد كبير من ناقلات الشحنة الطليقة مثل الفلزات وتمتلك ناقلات الشحنة (وهي الالكترونات في معظم الحالات) حرية التجول في الوسط الموصل وتستجيب الى اضعف المجالات الكهربائية وهذه الناقلات هي المسؤولة عن تكوين التيار الكهربائي في الموصل طالما كان هناك مجال كهربائي مسلط على الموصل من مصدر خارجي للطاقة .

العوازل : هي تلك المواد التي تكون فيها الجسيمات المشحونة مشدودة بقوة ببقية مكونات جزيئات الوسط المادي وتنحصر استجابة الجسيمات المشحونة الى المجال الكهربائي في قدرتها على الانحراف قليلا عن مواضعها الاصلية ولكنها غير قادرة على تغيير مواضعها المحددة داخل الجزيئات وعليه يمكن ان نعرف الغاز المثالي على ذلك الوسط الذي لايحدث فيه توصيل كهربائي عندما يسلط عليه مجال كهربائي خارجي ويمكننا القول ان العوازل تعد غير موصلة .

وهناك مواد معينة (انصاف الموصلات او اشباه الموصلات والالكترونيات) تمتلك خواصا كهربائية متوسطة بين الموصلات والعوازل وتسلك هذه المواد سلوك مشابه لسلوك الموصلات في المجال الكهربائي الساكن (الاستاتيكي) ولكن استجابتها نوعا ما ابطأ من الموصلات اي انها تستغرق وقتا اطول لكي تصل الى حالة الاتزان في مجال ساكن .

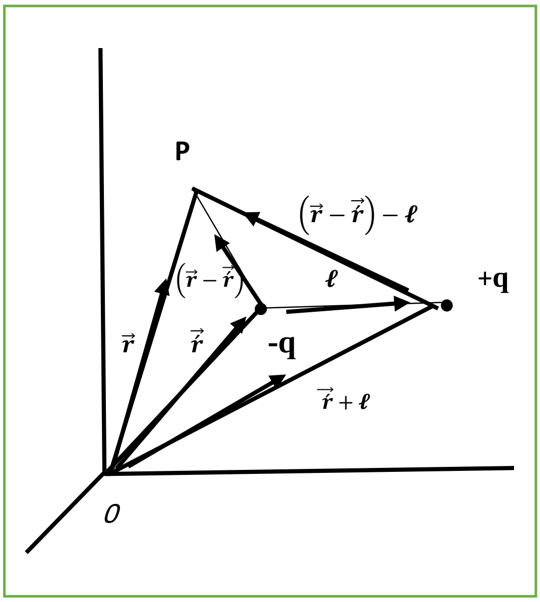
وبما ان الشحنة يمكنها ان تتحرك بحرية في الموصل حتى في حالة وقوعها تحت تأثير مجالات ضعيفة جدا فان ناقلات الشحنة (الالكترونات والايونات) تستمر في التحرك الى ان تصل الى مواضع تكون فيها محصلة القوة المؤثرة عليها صفرا وعند وصول الشحنات الطليقة الى حالة الاسقرار تصبح المنطقة الداخلية للموصل منطقة خالية من المجال الكهربائي وسبب ذلك يعود الى ان تعداد ناقلات الشحنة في المنطقة الداخلية للموصل يجب ان تنضب (تستنزف) وإلا استمرت بالحركة في حالة وجود المجال ولهذا يتلاشى المجال الكهربائي في الجسم الموصل تحت الظروف الاستاتيكية وبذلك يصبح الجهد متساويا لجميع نقاط المادة الموصلة لان $E=0$ داخل الجسم الموصل وبمعنى اخر فأن كل موصل يمثل منطقة متساوية الجهد في الفضاء عندما يكون تحت ظروف ستاتيكية.

(2 -11) ثنائي القطب الكهربائي : *The electric dipole*

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين في الاشارة تفصل بينهما مسافة صغيرة (ℓ) , نفرض ان شحنة قدرها (q -) تبعد مسافة ($\vec{r}'$) عن نقطة الاصل وان شحنة قدرها ($+q$) تبعد مسافة ($\vec{r}'+\ell$) عن نقطة الاصل وكما هو موضح بالشكل , عندئذ يمكن ايجاد المجال الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب عند النقطة P التي تبعد مسافة ($\vec{r}$) عن نقطة الاصل :

$$\vec{E}(r)=\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)-\vec{\ell}}{\left|\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)-\vec{\ell}\right|^3}-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\right]$$

والاشارة السالبة ظهرت لان الشحنة الثانية هي سالبة الشحنة (q -) .



نأخذ الحد الاول من القوس من المعادلة اعلاه :-

$$\frac{1}{\left|\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)-\vec{\ell}\right|^3}=\left|\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)-\vec{\ell}\right|^{-3}=\left[\left|\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)-\vec{\ell}\right|^2\right]^{-3/2}=\left[\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2-2\ell\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)+\ell^2\right]^{-3/2}$$

نضرب ونقسم بالمقدار $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2$:

$$\frac{1}{\left|\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)-\vec{\ell}\right|^3}=\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{-3}\left[1-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}')\ell}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}+\frac{\ell^2}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}\right]^{\frac{-3}{2}}\quad but\ \ \ell\lll\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

لذلك الحد الاخير يهمل وبأستخدام مفكوك نظرية ذي الحدين :-

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)x^{n-1}}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-2}}{3!}+\cdots$$

نفرض $x=\frac{-2(\vec{r}-\vec{r}')\ell}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}$ و n=-3/2 ونستخدم مفكوك نظرية ذي الحدين :

$$\left|\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)-\vec{\ell}\right|^{-3}=\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{-3}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\left(-2\ell\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{2}}-\frac{3}{2}*\frac{-5}{2}*\frac{1}{2}\left(\frac{-2\ell\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)^{-5/2}}{\left\|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right\|^{3}}\right)\right]$$

وبما ان ℓ في البسط في الحد الثاني داخل القوس في الطرف الايمن صغيرة جدا اقل بكثير من $\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|$ لذا يهمل هذا الحد. فتصبح المعادلة :

$$\left|\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)-\vec{\ell}\right|^{-3}=\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{-3}\left[1+\frac{3\ell.\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{2}}\right]$$

نعوض هذه القيمة في معادلة المجال (E) :

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\left(q\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)-q\ell\right)\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{3}}+\frac{3\ell\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{5}}\right)-\frac{q\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{q\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{3}}+\frac{q\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)x3\ell\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{5}}-\frac{q\ell}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{3}}-\frac{q\ell.3\ell\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{5}}-\frac{q\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{3}}\right]$$

الحد الاول يختصر مع الحد الاخير ويهمل الحد الرابع لكونه صغير جدا لاحتوائه على ℓ^2 في البسط فتصبح النتيجة :-

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{3q\ell.\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{5}}\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)-\frac{q\ell}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{3}}\right]$$

بما ان عزم ثنائي القطب dipole moment هو $P=q\ell=$

$$\boxed{\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3\vec{P}.\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{5}}\left(\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right)-\frac{\vec{P}}{\left|\vec{r}-\acute{\vec{r}}\right|^{3}}\right]}$$

تحفظ هذه المعادلة

ولوكان ثنائي القطب موضوع في نقطة الاصل اي ان : $\acute{\vec{r}}=0$ فتصبح المعادلة بالشكل :-

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3\vec{P}.\left(\vec{r}\right)}{|\vec{r}|^{5}}\left(\vec{r}\right)-\frac{\vec{P}}{|\vec{r}|^{3}}\right]$$

ويمكن حساب الجهد الناشئ عن ثنائي القطب مباشرة من المعادلة :

$$u(r) = \frac{q}{4\pi \in_o} \frac{1}{\left|\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right) - \boldsymbol{\ell}\right|} - \frac{q}{4\pi \in_o} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} = \frac{q}{4\pi \in_o} \left[\frac{1}{\left|\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right) - \boldsymbol{\ell}\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|}\right]$$

بتبسيط المقام في الحد الاول بنفس الطريقة السابقة :-

$$\left|\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right) - \boldsymbol{\ell}\right|^{-1} = \left[\left|\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right) - \boldsymbol{\ell}\right|^2\right]^{-1/2} = \left[\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|^2 - 2\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right)\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}^2\right]^{-1/2}$$

$$\left|\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right) - \boldsymbol{\ell}\right|^{-1} = \left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|^{-1} \left[1 - \frac{2\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|^2} + \frac{\boldsymbol{\ell}^2}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|^2}\right]^{-1/2}$$

الحد الاخير يهمل لان $\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right) \lll \boldsymbol{\ell}$ وباستخدام مفكوك ذي الحدين وتعويض النتائج في معادلة الجهد نحصل على :-

$$u(r) = \frac{q\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right).\boldsymbol{\ell}}{4\pi\epsilon_o \left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|^3} \quad , \qquad but\ \vec{P} = q\boldsymbol{\ell}$$

تحقق هذه المعادلة

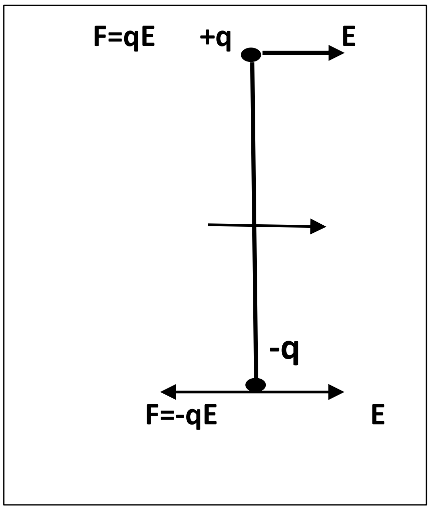
$$\boxed{u(r) = \frac{P.\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right)}{4\pi\epsilon_o \left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|^3}}$$

فاذا كانت $\vec{\acute{r}} = 0$

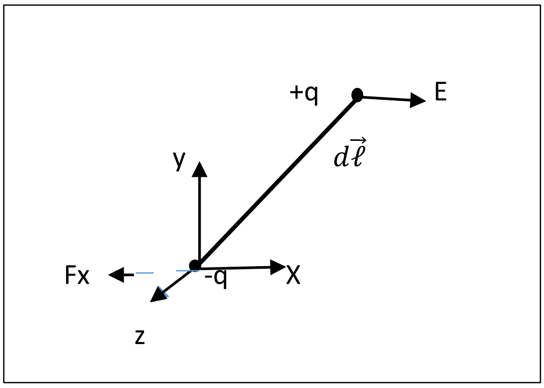
$$u(r) = \frac{q.\vec{r}}{4\pi\epsilon_o |\vec{r}|^3}$$

(2 – 12) ثنائي القطب الكهربائي في مجال كهربائي غير منتظم : -

عندما يكون المجال منتظم تكون محصلة القوى مساوية للصفر اي ان $\vec{F} = 0$ كما في الشكل ادناه :



اما عند وضع ثنائي القطب في مجال غير منتظم فيمكن ايجاد القوة الموثرة حيث نفرض ان نقطة الاصل لنظام الاحداثيات تنطبق على الشحنة السالبة (q-) لثنائي القطب .



$$F = F_{q^+} + F_{q^-} = \mathrm{qE}$$

نحسب اولا القوة باتجاه المركبة x . فالقوة المؤثرة على الثنائي القطب الكهربائي في الاتجاه السيني الموجب هي:-

$$\vec{F}_x^+ = q^+(E_x + dE_x)$$

وفي الاتجاه السالب تكون القوة مساوية الى $\vec{F}_x = -qE_x$

لان الشحنة السالبة (q -) تقع في نقطة الاصل توجد مركبة واحدة حيث البعد من نقطة الاصل r=0 وعليه تصبح محصلة القوة في اتجاه x تعطى بالعلاقة :　　$\vec{F}_x = +qdE_x$

$$\because\ d\vec{E}_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz$$

$$\therefore\ \vec{F}_x = \mathrm{q}\left(\mathrm{dx}\frac{\partial E_x}{\partial x} + dy\frac{\partial E_x}{\partial y} + dz\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = q\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)E_x$$

$$but\quad \vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z},\quad and\quad d\vec{\ell} = \vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz$$

$$\vec{F}_x = q(d\vec{\ell}.\vec{\nabla})\vec{E}_x \qquad but\quad \vec{P} = qd\vec{\ell}$$

$$\therefore\ \vec{F}_x = (\vec{P}.\vec{\nabla})\vec{E}_x$$

وبنفس الطريقة نوجد القوة بأتجاه المركبات الاخرى y,z وعليه بصورة عامة فأن القوة المؤثرة على ثنائي القطب الكهربائي تعطى بالعلاقة الاتية :-

$$\boxed{\therefore\ \vec{F} = (\vec{P}.\vec{\nabla})\vec{E}}$$

يعطى عزم الازدواج Torque بالعلاقة الاتية :-

$$\vec{\tau} = d\ell \times \vec{F} = d\ell \times q\vec{E} = qd\vec{\ell} \times \vec{E} = \vec{P} \times \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} = PEcos\theta}$$

$$if\vec{P} \parallel \vec{E} \Longrightarrow, \vec{\tau} = 0$$

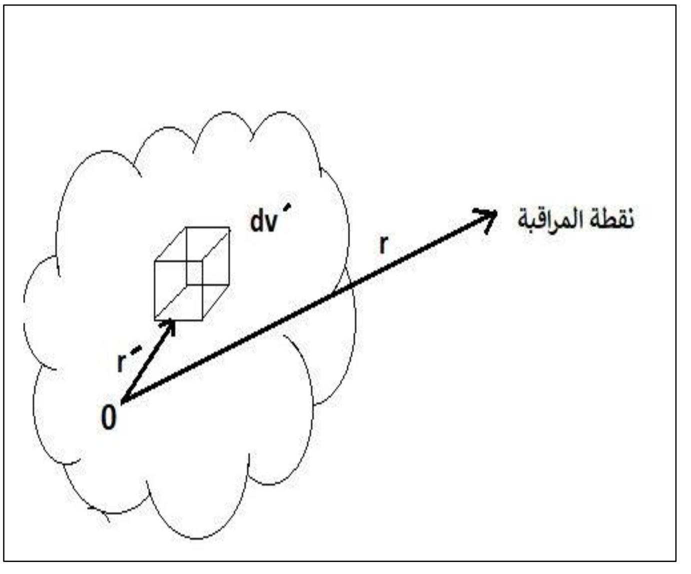
وعليه نستنتج انه لثنائي القطب اذا كان المجال منتظم فأن محصلة القوة المؤثرة عليه تساوي صفر وعليه يصبح $\vec{\tau} = 0$ وذلك لأن $\vec{\tau} = d\ell \times \vec{F}$.

(2 –13) مفكوك متعدد الاقطاب للمجالات الكهربائية : *Multipole expansion of electric fields*

يظهر من تعريف عزم ثنائي القطب ان جوانبا معينة لتوزيع الجهد الناشئ عن توزيع محدد من الشحنة يمكن التعبير عنها بدلالة عزم ثنائي القطب الكهربائي . وبدلا من التعريف سناخذ مفكوك تعبير معين لجهد كهروستاتيكي ناشئ عن توزيع شحني اعتباطي ولتقليل عدد المحاور الموضعية سنأخذ توزيع شحني في المنطقة المجاورة لنقطة الاصل ونفرض ان التوزيع الشحني برمته محصورا داخل كرة نصف قطرها (a) وان نصف القطر صغير مقارنة مع بعد نقطة المراقبة .

لنأخذ نقطة بصورة كيفية داخل التوزيع الشحني ونحدد موقعها بالمتجه $\acute{r}$ ونفرض ان كثافة الشحنة عند هذه النقطة هي $\rho(\acute{r})$ ونقطة المراقبة محددة بالمتجه r كما مبين في الشكل ادناه :-

نلاحظ ان الشحنة تشغل الحجم $\acute{V}$ بكثافة شحنية قدرها $\rho(\acute{r})$ والمطلوب حساب المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة r وتعطى بالعلاقة



$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\acute{v}}\frac{\rho(\acute{r})}{|r-\acute{r}|}d\acute{v}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

علما ان $d\acute{V}$ تمثل عنصر من الحجم داخل توزيع شحني, $\acute{v}$ يمثل الحجم الذي تشغله الشحنة باجمعها وعلى فرض ان نقطة المراقبة بعيدة عن نقطة الاصل يصبح بالامكان فك الكمية $|r-\acute{r}|^{-1}$ على شكل متوالية ذات اس تصاعدي لـ $\frac{\acute{r}}{r}$ وبهذا نحصل على :-

$$\begin{aligned}|r-\acute{r}|^{-1}&=(r^2-2r.\acute{r}+\acute{r}^2)^{-1/2}\\&=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[-\frac{2r.\acute{r}}{r^2}+\frac{\acute{r}^2}{r^2}\right]+\frac{1}{2}\frac{3}{2}(\quad)^2+\cdots\ldots\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{aligned}$$

يمكن اهمال $\left(\frac{\acute{r}}{r}\right)^2$ مقارنة مع $\left(\frac{2r.\acute{r}}{r^2}\right)$ من المجموعة الاولى من الكميات المحصورة بين الاقواس وباستعمال معادلة (2) بعد حذف الحدود التي تحتوي على $\acute{r}^3$ فما فوق تصبح معادلة (1) بالشكل :

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\acute{v}}\left\{\frac{1}{r}+\frac{r.\acute{r}}{r^3}+\frac{1}{2}\left[\frac{3(r.\acute{r})^2}{r^5}-\frac{\acute{r}^2}{r^3}\right]+\cdots\right\}\rho(\acute{r})d\acute{v}\ \dots\dots\dots(3)$$

وبما ان r مقدار ثابت لايعتمد على $\acute{r}$ يمكن اخراجه خارج علامة التكامل وبهذا تصبح المعادلة :

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{1}{r}\int_{\acute{v}}\rho(\acute{r})\,d\acute{v}+\frac{r}{r^3}\int_{\acute{v}}\acute{r}\rho(\acute{r})\,d\acute{v}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{X_iX_j}{r^5}\int_{\acute{v}}\left(3\acute{X}_i\acute{X}_j-\delta_{ij}\acute{r}^2\right)\rho(\acute{r})d\acute{v}\right\}\dots\dots\dots..(4)$$

تمثل X_i و X_j المركبات الافقية والشاقولية للمتجه r و $\acute{X}_j, \acute{X}_i$ تمثل المركبات الافقية والشاقولية للمتجه $\acute{r}$.

اما δ_{ij} فهو (*Kronecker delta*) كرونكر دلتا ويعرف كالتالي :

$$\delta_{ij}=\begin{pmatrix}0\ , & i\neq j\\ 1 & i=j\end{pmatrix}$$

من المعادلة (4) نلاحظ ان:

التكامل الاول يمثل الشحنة الكلية والحد الاول يمثل الجهد الذي يمكن ان ينشأ فيما لوكانت الشحنة باجمعها مركزة عند نقطة الاصل .

اما التكامل الثاني فإنه يشبه عزم ثنائي القطب الكهربائي ولهذا يدعى ثنائي قطب التوزيع الشحني والحد الثاني من معادلة (4) هو الجهد الذي يمكن ان ينشأ فيما لو كان ثنائي القطب النقطي الذي يساوي عزم ثنائي قطب التوزيع الشحني واقعا عند نقطة الاصل , ومن المثير ان نلاحظ ان عزم ثنائي قطب التوزيع الشحني مستقل عن نقطة اصل الاحداثيات فيما اذا كانت الشحنة الكلية صفر. ولتحقيق ذلك نأخذ نظاما جديدا للاحداثيات بحيث تقع نقطة الاصل لهذا النظام عند الموضع R في النظام القديم واذا رمزنا لنقطة في النظام القديم بالمتجه $\acute{r}$ وللنقطة نفسها حسب النظام الجديد بالمتجه $\acute{\acute{r}}$ لينتج لدينا :

$$\acute{r}=\acute{\acute{r}}+R\ \dots\dots\dots..(5)$$

ولهذا يأخذ عزم ثنائي القطب حسب النظام القديم الصيغة التالية:

$$P=\int_{\acute{v}}\acute{r}\rho(\acute{r})\,d\acute{v}=\int_{\acute{v}}(r''+R)\rho(\acute{r})\,d\acute{v}=\int_{\acute{v}}r''\,d\acute{v}+RQ\ \dots\dots\dots..(6)$$

وهذا مايثبت صحة النص المذكور في اعلاه .

والحد الثالث من المعادلة (4) يمكن كتابته كالاتي :-

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{X_iX_j}{r^5}Q_{ij}\ \dots\dots\dots\dots\dots(7)$$

حيث ان :

$$Q_{ij}=\int_{\acute{v}}\left(3\acute{X}_i\acute{X}_j-\delta_{ij}\acute{r}^2\right)\rho(\acute{r})\,dv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

هناك تسع مركبات للكمية Q_{ij} مصاحبة لقيم i و j التي تساوي 1, 2 , 3 ومن هذه المركبات التسع يوجد ست مركبات متساوية على شكل ازواج وبهذا يبقى ست مركبات متميزة , هذه المجموعة من الكميات تشكل مايدعى ممتد (*tensor*) عزم رباعي القطب (*quadrupole moment tensor*) وتمثل امتدادا لمفهوم عزم ثنائي القطب وبطبيعة الحال هناك عزم ذات رتب اعلى ناشئة عن الحفاظ على الحدود ذات الرتب العالية عند فك المعادلة (4).

ان متعددة الاقطاب ذات الرتب العالية مهمة في الفيزياء النووية وتستعمل متعددة الاقطاب الكهربائية حسبما تشير معادلة (4) لتقريب المجال الكهربائي الناشئ عن توزيع شحني وهناك استعمالات اخرى ولكنها جميعا تقع في نطاق تقريب توزيع شحني حقيقي متصل الى شحنات نقطية وثنائيات اقطاب نقطية وهذا مايجعل حل المسائل المعقدة جدا ممكنا .

اسئلة الفصل الثاني

س1/ كرة نصف قطرها R ملئت بالشحنة باسلوب ما , فاذا كان المجال لهذه المنطقة $\vec{E}=\frac{E_o}{R}|\vec{r}|\vec{r}$ حيث E_o ثابت و R متجه من مركز هذه الكرة اوجد تعبيرا للكثافة الحجمية ؟

الجواب / باستخدام الصيغة التفاضلية لقانون كاوس :

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_o}\Longrightarrow \rho=\epsilon_o\,\vec{\nabla}.\vec{E}$$

بتعويض معادلة المجال المعطاة بالسؤال نحصل على:

$$\rho=\epsilon_o\,\nabla.\left[\frac{E_o}{R}|\vec{r}|\vec{r}\right]=\frac{\epsilon_o}{R}E_o\nabla.|\vec{r}|\vec{r}$$

بأستخدام المتطابقة :-

$$\vec{\nabla}.\emptyset\vec{A}=\emptyset\vec{\nabla}.\vec{A}+\vec{A}.\nabla\emptyset,\quad let\ \emptyset=|\vec{r}|, and\ \vec{A}=\vec{r}$$

$$\vec{\nabla}.|\vec{r}|\vec{r}=|\vec{r}|\vec{\nabla}.\vec{r}+\vec{r}.\vec{\nabla}|\vec{r}|\ , but\ \vec{\nabla}.\vec{r}=3,\qquad and\ \vec{\nabla}|\vec{r}|=\hat{r}.=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}.|\vec{r}|\vec{r}=3|\vec{r}|+\vec{r}.\hat{r}=3|\vec{r}|+\vec{r}.\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=3|\vec{r}|+\frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|}=4|\vec{r}|$$

$$\therefore\ \rho=\frac{4\epsilon_oE_o}{R}|\vec{r}|$$

س2/ اذا كان الجهد لتوزيع كروي للشحنة معطى بالعلاقة $u(r)=K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ حيث α, K ثوابت جد المجال الكهربائي .

الجواب / من العلاقة:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}u(r)=-\frac{du(r)}{dr}=-K\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right)=-\mathrm{K}\left(\frac{re^{-\alpha r}(-\alpha)-e^{-\alpha r}}{r^2}\right)$$

$$=K\left(\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r}+\frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\right)=Ke^{-\alpha r}\left(\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{r^2}\right)=Ke^{-\alpha r}\left(\frac{r\alpha+1}{r^2}\right)$$

$$\therefore\ \vec{E}=Ke^{-\alpha r}\left(\frac{1+\alpha r}{r^2}\right)$$

س3/ تتوزع الشحنة على كرة(نصف قطرها R) بكثافة شحنة حجمية متجانسة , جد المجال والجهد الكهربائي للحالات الاتية: 1- نقطة خارج الكرة على على بعد r من المركز $r>R$ 2- نقطة داخل الكرة حيث $r<R$

الجواب/ $1-)r>R$

من قانون كاوس :-

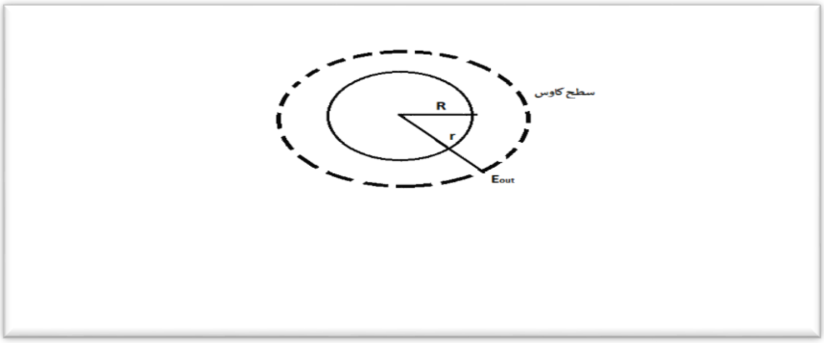
$$\oint\vec{E}_{out}.\vec{n}da=\frac{q}{\epsilon_o},\Rightarrow\qquad E_{out}\oint da=\frac{q}{\epsilon_o}\ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$but:\ \ q=\int\rho dV$$

والحجم بالاحداثيات الكروية يعطى بالعلاقة التالية : $dV=r^2 sin\theta dr d\theta d\emptyset$

$$\therefore\ \ \mathrm{q}=\rho\int_0^R r^2\,dr\int_0^\pi sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\emptyset=\rho\left[\frac{R^3}{3}-0\right][-cos\theta]_0^\pi[\phi]_0^{2\pi}$$

$$q=\rho\left[\frac{R^3}{3}\right][-(-1)+1](2\pi)=\frac{4}{3}\pi\rho R^3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$



المساحة السطحية للكرة (سطح كاوس) هو (a) حيث : $a=\int da=4\pi r^2$ ....(3)

بتعويض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :- المجال خارج الكرة

$$\vec{E}_{out}.4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{\epsilon_o} \ , \qquad \Rightarrow E_{out} = |\vec{E}_{out}| = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_o r^2}$$

من المعادلة الاخيرة نلاحظ ان : $E_{out} \propto \frac{1}{r^2}$

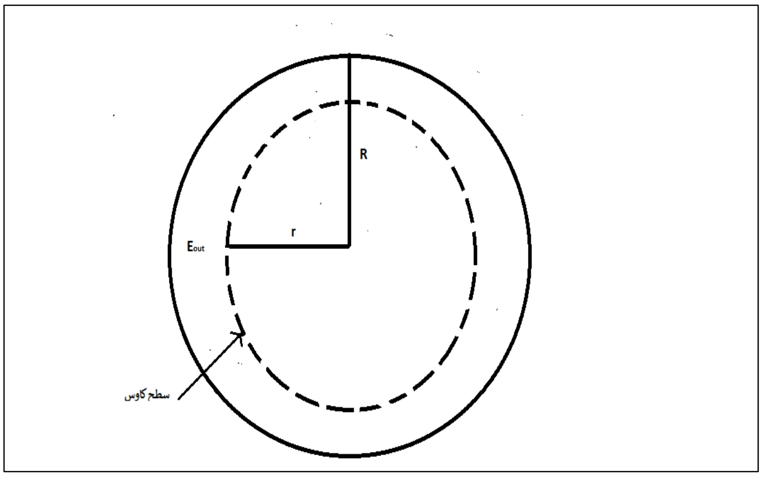
اما الجهد الكهربائي اللازم لتقريب شحنة نقطية من المالانهاية الى سطح كاوس يساوي u_{out} ويحسب كالاتي:

$$u_{out} = -\int_{\infty}^{r} |\vec{E}_{out}|\, dr = -\int_{\infty}^{r} \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_o r^2}\right) dr = \frac{-\rho R^3}{3\epsilon_o}\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_o}\left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right]$$

اذن الجهد الكهربائي لنقطة خارج الكرة هي:

$$u_{out} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_o r} \qquad u_{out} \propto \frac{1}{r}$$

$2)\ r < R$



بتطبيق قانون كاوس :-

$$\oint E_{in}.nda = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} \Rightarrow |\vec{E}_{in}| \int da = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} \ ......(1)$$

حيث $\acute{q}$ هي جزء من الشحنة الكلية للكرة وهي ذلك الجزء الموجود ضمن الحجم المحدد بسطح كاوس(داخل سطح كاوس فقط) ويساوي :

$$\acute{q} = \int \rho\, dV = \rho \int dV = \rho \int_0^r r^2\, dr \int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\emptyset = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \ \dots\dots\dots(2$$

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \ \dots\dots\dots\dots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|\vec{E}_{in}|4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3\right)}{\epsilon_o} \Longrightarrow |\vec{E}_{in}| = \frac{\rho r}{3 \in_o} \quad , \qquad E_{in} \propto r$$

ولايجاد الجهد الكهربائي داخل الكرة فأنه يساوي الجهد اللازم لنقل شحنة اختبارية من المالانهاية الى R والجهد اللازم لنقلها من R الى r وعليه:

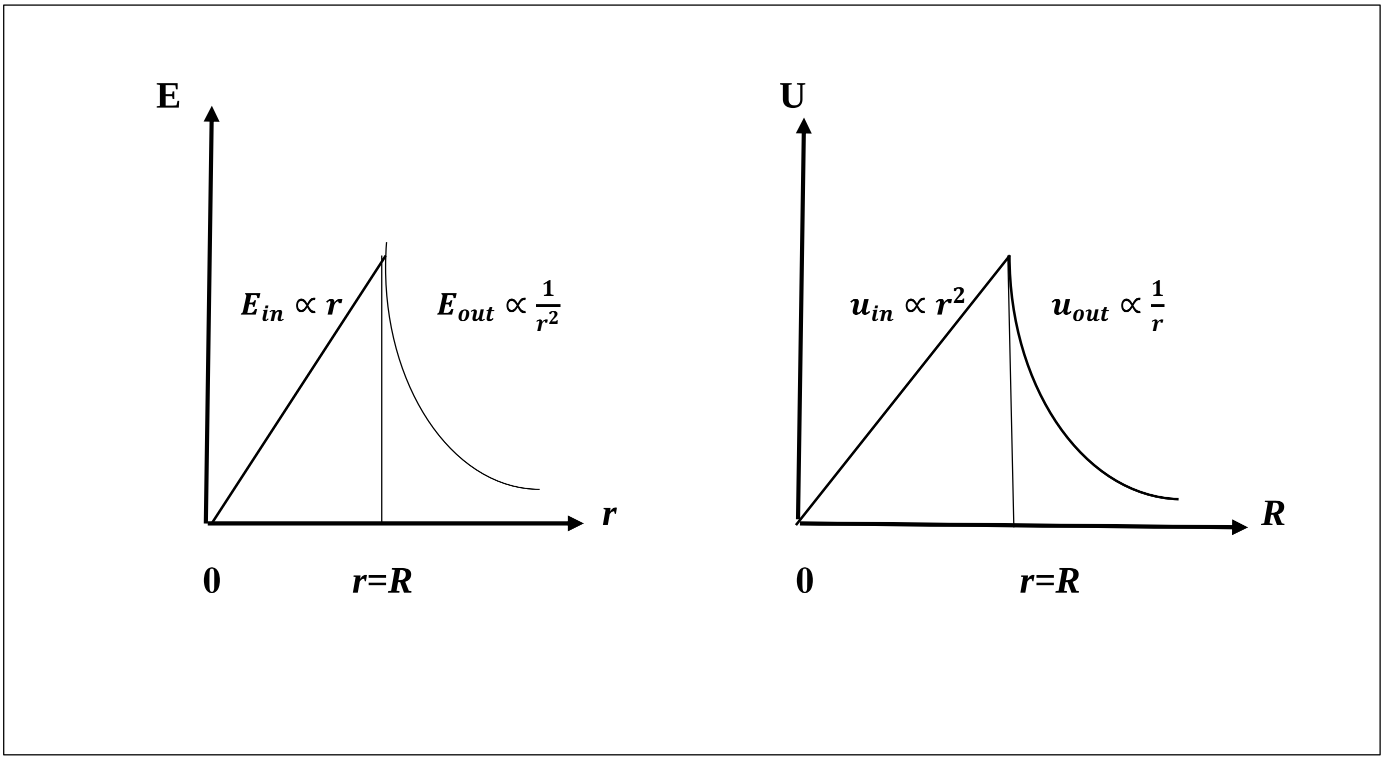
$$u_{in} = -\int_{\infty}^{R} |E_{out}| dr - \int_{R}^{r} |E_{in}| dr$$

$$u_{in} = -\frac{\rho R^3}{3 \in_0}\int_{\infty}^{R}\frac{1}{r^2}dr - \frac{\rho}{3 \in_o}\int_{R}^{r} r\,dr = -\frac{\rho R^3}{3 \in_o}\left[-\frac{1}{R}+\frac{1}{\infty}\right] - \frac{\rho}{3 \in_o}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right] = \frac{\rho R^2}{3 \in_o} - \frac{\rho r^2}{6 \in_o} + \frac{\rho R^2}{6 \in_o}$$

$$= \frac{2\rho R^2 - \rho r^2 + \rho R^2}{6 \in_o} = \frac{3\rho R^2 - \rho r^2}{6 \in_o} = \frac{\rho}{6 \in_o}[3R^2 - r^2]$$

$$or: \quad u_{in} = \frac{\rho}{2 \in_o}\left[R^2 - \frac{r^2}{3}\right] \qquad U_{in} \propto r^2$$

يمكن توضيح العلاقة بين E و u مع r بالمخططات الاتية:



س4/ توزيع شحني كروي يمتلك كثافة شحنية كدالة الى r فقط حيث $\rho = \frac{A}{r}$ جد المجال الكهربائي والجهد :

1- خارج الكرة حيث $r > R$.

2- داخل الكرة حيث $r < R$.

الجواب/ نفس الرسوم في السؤال السابق .

$$1)\ \oint \vec{E}.\vec{n}\, da = \vec{E}_{out} \oint da = \frac{q}{\epsilon_o} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$but:\ \ q = \int_0^R \rho\, dV,\ \ and\ \ \ \rho = \frac{A}{r}\ ,\ \ \ \ dV = r^2 sin\theta d\theta d\emptyset dr$$

$$\therefore\ \ q = \int_0^R \frac{A}{r} r^2\, dr \int_0^\pi sin\theta\, d\theta \int_o^{2\pi} d\emptyset = \mathrm{A}\left[\frac{R^2}{2} - 0\right][-cos\pi + cos0][2\pi - 0]$$

$$\therefore\ \ q = 2\pi A R^2 \dots\dots\dots . (2)$$

ولسطح كاوس نحسب المساحة السطحية له:

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \dots\dots\dots\dots . . (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في (1)

$$|\vec{E}_{out}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi A R^2}{\epsilon_o} \Longrightarrow |\vec{E}_{out}| = \frac{AR^2}{2\ \epsilon_o\ r^2}$$

$$u(r)_{out} = -\int \vec{E}_{out} . dr = -\int_\infty^r E_{out}\, dr = -\int_\infty^r \frac{AR^2}{2\ \epsilon_o\ r^2} dr = -\frac{AR^2}{2\ \epsilon_o}\left[\frac{-1}{r}\right]_\infty^r$$

$$u(r)_{out} = \frac{AR^2}{2\ \epsilon_o}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right] = \frac{AR^2}{2\ \epsilon_o\ r}$$

$2)\ \ r < R$

$$\oint \vec{E}_{in}. n\, da = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} = |\vec{E}_{in}| \oint da = \frac{\acute{q}}{\epsilon_o} \dots\dots\dots\dots . . (1)$$

$$\acute{q} = \int_0^r \frac{A}{r} r^2\, dr \int_0^\pi sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\emptyset = A\frac{r^2}{2}]_0^r[-cos\pi + cos0](2\pi)$$

$$= \frac{Ar^2}{2}(-(-1) + 1)(2\pi) = 2\pi A r^2$$

$$\acute{q} = 2\pi A r^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \;\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|\vec{E}_{in}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi A r^2}{\epsilon_o}$$

$$\therefore\ |\vec{E}_{in}| = \frac{A}{2\,\epsilon_o}$$

$$u_{in} = -\int_{\infty}^{R} |\vec{E}_{out}|\,\mathrm{dr} - \int_{R}^{r} |\vec{E}_{in}|\,dr = -\int_{\infty}^{R}\left(\frac{AR^2}{2\,\epsilon_o\, r^2}\right)dr - \int_{R}^{r}\frac{A}{2\,\epsilon_o}dr$$

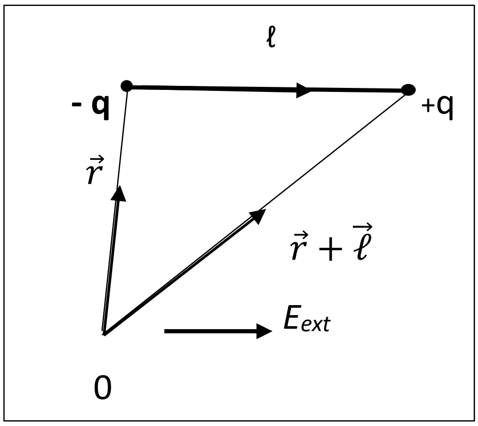
$$= -\frac{AR^2}{2\,\epsilon_o}\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} - \frac{A}{2\,\epsilon_o}\int_{R}^{r} dr = -\frac{AR^2}{2\,\epsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R} - \frac{A}{2\,\epsilon_o}[r]_R^r$$

$$= \frac{AR^2}{2\,\epsilon_o}\frac{1}{R} - \frac{A}{2\,\epsilon_o}(r-R) = \frac{AR}{2\,\epsilon_o} - \frac{Ar}{2\,\epsilon_o} + \frac{AR}{2\,\epsilon_o} = \frac{2AR}{2\,\epsilon_o} - \frac{Ar}{2\,\epsilon_o}$$

$$= \frac{A}{2\,\epsilon_o}(2R - r) \Rightarrow u_{in} = \frac{A}{2\,\epsilon_o}(2R - r)$$

س5/ جد الطاقة الكامنة لثنائي القطب الكهربائي عندما يوضع في مجال كهربائي منتظم (E_{ext}).

الجواب/ $\because\ u = \frac{\omega}{q}$



$$\omega = -q u_{ext}(r) + q u_{ext}(r + \ell)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث ω هي الطاقة الكامنة potential energy , اذا كانت $\vec{r} \ll\ll \vec{\ell}$ نستخدام قانون متسلسلة القوى power series كالاتي:

حفظ $$u_{ext}(\vec{r}+\vec{\ell}) = u_{ext}(\vec{r}) + \vec{\ell}.\vec{\nabla}u_{ext}(\vec{r}) \dots\dots\dots\dots (2)$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) :-

$$\therefore\ \omega = -q\, u_{ext}(\vec{r}) + qu_{ext}(\vec{r}) + q\vec{\ell}.\vec{\nabla}u_{ext}(\vec{r}) = q\vec{\ell}.\vec{\nabla}u_{ext}(\vec{r}), \qquad but: \vec{P} = q\vec{\ell}$$

$$\omega(\mathrm{r}) = \vec{P}.\vec{\nabla}u_{ext}(\vec{r}), \qquad but: \vec{E} = -\nabla u, \quad E_{ext}(\vec{r}) = -\nabla u_{ext}(\vec{r})$$

$$\therefore\ \omega(r) = -\vec{P}.E_{ext}(\vec{r})$$

حيث المجال الخارجي $E_{ext}(\vec{r})$ ناشئ عن شحنات غير الشحنتين المكونتين لثنائي القطب .

س 6 / بين ان القوة المؤثرة على ثنائي القطب في مجال كهربائي خارجي $E_{ext}(\vec{r})$ تعطى بالعلاقة :-

$$\vec{F} = \vec{P}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}$$

الجواب / نفس الرسم في السؤال السابق

$$\vec{F} = \vec{F}_{+q} + \vec{F}_{-q}, \quad and\ \vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{F} = +q\vec{E}_{ext}(\vec{r}+\vec{\ell}) - q\vec{E}_{ext}(\vec{r}) \dots\dots\dots\dots (1), \qquad but, \qquad \vec{\ell} \lll \vec{r}$$

حسب قانون متسلسلة القوى:

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r}+\vec{\ell}) = \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + \vec{\ell}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r}) \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) نحصل على:-

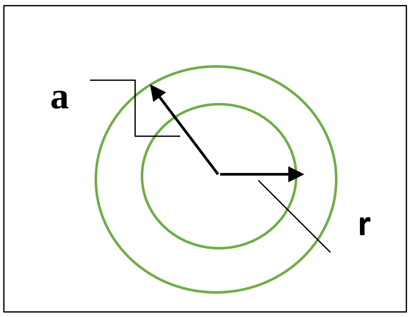
$$\vec{F} = q\vec{E}_{ext}(\vec{r}) + q\vec{\ell}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r}) - q\vec{E}_{ext}(\vec{r}) = q\vec{\ell}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

$$as: \quad \vec{P} = q\vec{\ell}, \qquad \therefore \quad \vec{F} = \vec{P}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

س7/ شحنة كروية نصف قطرها (a) كثافة شحنتها تتغير وفق العلاقتين :-

-1 $\rho_1 = \rho_o\left(\frac{a}{r}\right)$ -2 $\rho_2 = \rho_o\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$, اوجد المجال الكهربائي الداخلي لكلا الحالتين .

الجواب /



$$\oint \vec{E}_{in}.\vec{n}\,da = \frac{q_1}{\epsilon_o}$$

$$|\vec{E}_{in}|\oint da = \frac{q_1}{\epsilon_o} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$q_1 = \int \rho_1\, dV = \int_0^r \rho_o \left(\frac{a}{r}\right) r^2 dr + \int_0^{\pi} sin\theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\emptyset = \frac{a\rho_o r^2}{2}(4\pi)$$

$$q_1 = 2\pi a\rho_o r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$\oint da = a = 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi\rho_o a r^2}{\epsilon_o} \Longrightarrow E_{in} = \frac{\rho_o a}{2\ \epsilon_o}$$

وللحالة الثانية :

$$|E_{in}| \oint da = \frac{q_2}{\epsilon_o} \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$q_2 = \int \rho_2\, dV = \int_0^r \rho_o \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) r^2\, dr + \int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} d\emptyset = \left[\int_0^r \rho_o r^2\, dr - \int_0^r \rho_o a^2\, dr\right](4\pi)$$

$$q_2 = \left[\frac{\rho_o r^3}{3} - \rho_o a^2 r\right](4\pi) = 4\pi\rho_o\left[\frac{r^3}{3} - a^2 r\right] = 4\pi r^2 \rho_o \left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r}\right] \ldots\ldots\ldots..(2)$$

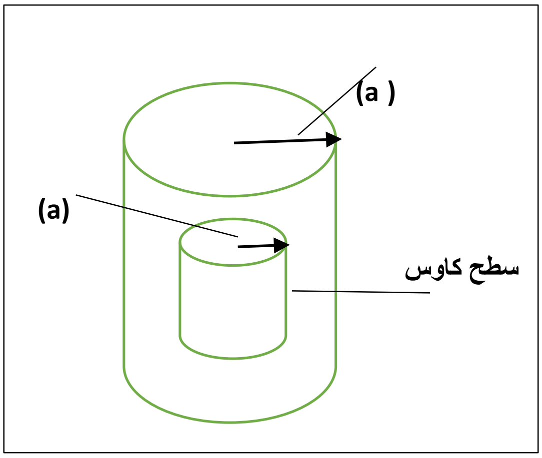
$$\oint da = 4\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

نعوض (2) و (3) في (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(4\pi r^2) = \frac{4\pi r^2 \rho_o \left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r}\right]}{\epsilon_o}, \Longrightarrow \quad |E_{in}| = \frac{\rho_o}{\epsilon_o}\left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r}\right]$$

س 8 / توزيع شحني لاسطوانة لانهائية الطول ذات نصف قطر a وكثافة شحنة $\sigma = \frac{3q(a-r)}{\pi a^3}$ والتي تكون على بعد $r < a$ احسب المجال الكهربائي.

الجواب / بما ان $r < a$ اذن المطلوب حساب المجال الكهربائي الداخلي .



$$\oint \boldsymbol{E_{in}} \, . \, \boldsymbol{dS} = \frac{q_{tot}}{\epsilon_o}$$

$$|E_{in}| \oint dS = \frac{q_{tot}}{\epsilon_o} \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \qquad , \qquad q_{tot} = \int_0^r \sigma \, da$$

المساحة بالاحداثيات الاسطوانية : $da = r dr d\emptyset$

$$\therefore \; q_{tot} = \int_0^r \sigma r \, dr \int_0^{2\pi} d\emptyset = \int_0^r \frac{3q(a-r)}{\pi a^3} r dr (2\pi) = \frac{6q}{a^3}\left[\int_0^r ar \, dr - \int_0^r r^2 \, dr\right]$$

$$= \frac{6q}{a^3}\left[\frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right] = \frac{3qr^2}{a^2} - \frac{2qr^3}{a^3} = \frac{qr^2}{a^3}(3a - 2r) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\oint dS = S = 2\pi r a \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

تعويض (2) و (3) في (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(2\pi r a) = \frac{qr^2}{a^3 \epsilon_o}(3a - 2r) \Rightarrow |E_{in}| = \frac{qr(3a - 2r)}{2\pi a^4 \epsilon_o}$$