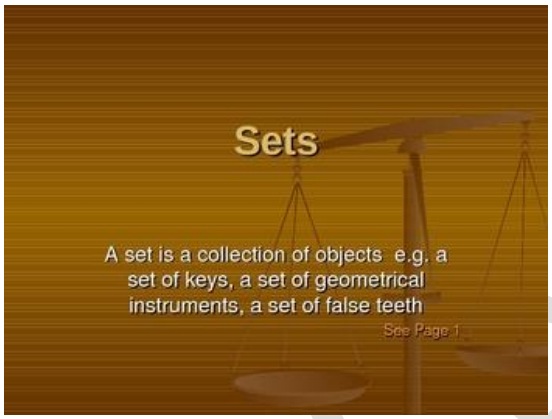
# CHAPTER TWO

## Set Theory

## نظرية المجموعات




## Chapter Two Contents:

**1. Basic notion of sets مفهوم المجموعات**

**2. Subsets المجموعات الجزئية**

**3. Algebra of sets (union, intersection, difference, complement, symmetric difference) جبر المجموعات أو العمليات على المجموعات**

## Definition 2.1: Set

A set is an unordered collection of objects. The objects are called **the elements** or **members** of the set.

المجموعة هي تجمع من الأشياء المعرفة بدون ترتيب والتي تسمى بالعناصر أو أعضاء تنتمي للمجموعة.

## Remark 2.2

1. The capital letters usually used to represent sets such as $A, B, C, \ldots$etc.
2. The small letters such as $a, b, c, d, \ldots$etc are used to represents the members or the elements of the set.

3. Membership in a set is denoted as follows: انتماء عنصر لمجموعة يعبر عنه بالشكل التالي

| $a \in A$ denotes that ***a* belongs to** a set $A$ |
|---|

4. Non-membership to a set is denoted as follows: عدم انتماء عنصر لمجموعة يعبر عنه بالشكل التالي

| $a \notin A$ denotes that ***a* does not belong to** a set $A$ |
|---|

### Specifying a Set: طرق التعبير عن المجموعة

### 1. Listing members of a set: الطريقة الجدولية

In this way, we list all non-repeated members of a set separated by commas and contained in braces { }. The members are not in an order.

الطريقة الجدولية أو طريقة القائمة: في هذه الطريقة نضع جميع العناصر الغير المعادة بين قوسي مجموعة وبفواصل تفصل بينها. عناصر المجموعة لايشترط أن تكون مرتبة بطريقة معينة

**Example2.3:**

1. $A = \{1,2,-5,0,9\}$, $B = \{x, y, \text{Ali, fish}\}$, $C = \{y_1, y_2, y_3\}$ are sets

2. The set of vowel letters in English: $V = \{a, e, i, o, u\}$

3. The set of even positive numbers less than 8 is: $W = \{0, 2, 4, 6\}$.

4. The set of positive numbers less than 50 is: $K = \{1, 2, \dots, 49\}$

**2. Listing a set property: استخدام الصفة المميزة للمجموعة**

In this way, we state the property that characterize the elements in a set in as follows: $\{x: p(x)\}$, where $x$ is a variable and $p(x)$ is an open sentence.

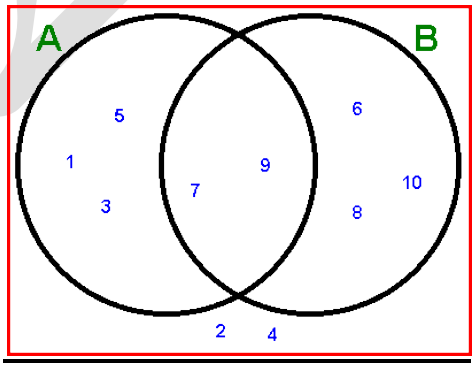
**Example2.4:** $A = \{x: x \in Q\}$

$B = \{x: x \text{ is positive odd and } x < 10\} = \{1,3,5,7,9\}$

$C = \{x \in N: -3 \leq x \leq 5\} = \{1,2,3,4,5\}$

**3. Venn Diagrams: مخططات فن**

**في هذه الطريقة توضع عناصر المجموعة داخل منحني مغلق يمثل المجموعة وتستخدم هذه الطريقة لأغراض توضيحية فقط.**




**Definition2.5: Empty Set المجموعة الخالية**

The set that contains no elements is called an empty set and is denoted by { } or ∅.

تسمى المجموعة التي لاتحوي أي عنصر بالمجموعة الخالية.

**Example2.6:** $A = \{x \in N: 2 < x < 3\} = \emptyset$

$B = \{x \in E: \sqrt{x}=1\} = \emptyset$

$C = \{x \in N: x < 0\} = \{\}$

**Subsets: المجموعات الجزئية**

The set $A$ is a subset of a set $B$ ($A \subseteq B$) if and only if every element of $A$ is an element of $B$. In other words,

$$A \subseteq B \text{ iff } \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

**Remark2.7:** $A$ is **not a subset** of $B$ is denoted by $A \not\subseteq B$.

$A \not\subseteq B$ if and only if $\sim[\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B]$
if and only if $\exists x; x \in A \wedge x \notin B$

**Example2.8:** Consider the sets A= {2}, B= {1, 2, 3} and C = {4, 5} and D= {-2, 1, 2, 3, 4, 5}. Then $A \subseteq B, . A \subseteq D,\ B \subseteq D \text{ and } C \subseteq D$.
It is true that $A \subseteq A,\ B \subseteq B,\ C \subseteq C \text{ and } D \subseteq D$.

**Example2.9:** Let $A$= {4, 9} and $B = \{x \in N: 1 < x < 10\}$. Determine whether $A \subseteq B$ or $B \subseteq A$.

**Solution:** The set B be can be written as $B$={2,…,9}. Then

$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$

Hence, $A \subseteq B$.
But $B \not\subseteq A$ because, for example, $\exists x = 5 \in B \wedge x \notin A$.

**Example2.10:** Let $A$= $\{x \in N: x > 3\}$ and $B = \{x \in N: x^2 > 4\}$. Is $A \subseteq B$? Is $B \subseteq A$?

**Solution:** Let $x \in A \Rightarrow\ x \in N\ and\ x > 3$

$\Rightarrow\ x^2 > 9$

$\Rightarrow\ x^2 > 4 \Rightarrow x \in B.$

$\Rightarrow A \subseteq B.$

Is $B \subseteq A$?

**Example2.11:** (**H. W.**) Let $A = \{-2, 3\}, B = \{x \in Z: x^3 - x^2 - 6x = 0\}$. Determine whether $A \subseteq B$ or $B \subseteq A$?

**Example2.12:** (**H. W.**) Let $A = \{x \in N : x \geq 4\}$ and $B = \{x \in N : x < 9\}$. Determine whether $A \subseteq B$ or $B \subseteq A$?

**Theorem2.13:** Let $A, B$ and $C$ be any sets, then

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq A$
3. If $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$ then $A \subseteq C$

**Proof 1:** T. P $\emptyset \subseteq A$, $i.e.$, T. P $\forall x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

F $\Rightarrow$ ( T or F) = T

$\Rightarrow\ \emptyset \subseteq A.$

**Proof 2:** T. P $A \subseteq A$, $i.e.$, T. P $\forall x \in A \Rightarrow x \in A$

T $\Rightarrow$ T = T

$\Rightarrow\ A \subseteq A.$

**Proof 3:** T. P If $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$ then $A \subseteq C$

T. P $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in C$

$\because A \subseteq B \Rightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$

$\because B \subseteq C \Rightarrow \forall x, x \in B \Rightarrow x \in C$

$\therefore \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$

$\therefore \forall x, x \in A \Rightarrow x \in C$

$\therefore A \subseteq C.$

**Definition2.14: Proper Subset المجموعة الجزئية الفعلية**

A set A is called a **proper** subset of B and denoted by $(A \subset B)$ if and only if $A \subseteq B$ and there exist an element x ∈ B that is $x \notin A$.

i.e., $A \subset B$ iff $\{\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B\} \wedge \{\exists y, y \in B \wedge y \notin A\}$

**Example2.15:** Let $A = \{x \in N \text{ v } x^2 - 16 = 0\}$
$B = \{x \in N: x^2 - 16 = 0\}$
Determine if $A \subset B$ *or* $B \subset A$.

**Solution:** $A = \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{4, -4\}$ and $B = \{4\}$
It is clear that $B \subset A$ because $B \subseteq A$ and
$\exists y = \{1,2,3,5, \dots\} \in A \wedge y \notin B$.

**Example2.16: (H. W.)** Let $A = \{\text{fish, dog, bird}\}$, $B = \{x, y, z, w\}$.
Determine if $A \subset B$ *or* $B \subset A$.

**Example2.17: (H. W.)** Let $A = \{x \in Z: -2 \leq x \leq 10\}$
$B = \{x \in Z \text{ v } x^2 + 9 = 0\}$
Determine if $A \subset B$ *or* $B \subset A$.

**Solution:** $A = \{-2, -1, 0, 1, \dots, 10\}$ and $B = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{3i, -3i\}$

**Complete the solution!**

**Definition2.18: Equal Sets المجموعات المتساوية**

Two sets A and B are equal if they both have the same elements or, equivalently, if each is contained in the other.
يقال أن المجموعة A تساوي المجموعة B إذا كانت لهما نفس العناصر أو إذا كانت كل مجموعة جزئية من الأخرى.

$$A = B \; iff \; A \subseteq B \; \wedge \mathrm{B} \subseteq A$$
$$\leftrightarrow \{ \forall x, x \in A \rightarrow x \in B \} \; \wedge \; \{ \forall x, x \in B \rightarrow x \in A \}$$
$$\leftrightarrow \{ \forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B \}$$

**Example2.19:** Let $A = \{x \in Z \; \wedge 5\mathrm{x}^2 + 2 = 0\}$
$B = \{x \in N : 2x + 3 = 0\}$
Is $A = B$?

**Solution:** $A = Z \; \cap \{\mp\sqrt{\frac{2}{5}}\; i\} = \emptyset$

$B = \emptyset$

$\Longrightarrow A = B$

**Lemma2.20:** ( **H. W.** ) Prove that: $A = A$, for any set $A$.

## Definition2.21: Universal Set المجموعة الشاملة

Universal set $U$ is the set that contains all the elements or the sets we have under discussion.
المجموعة الشاملة: هي المجموعة التي تحوي جميع العناصر أو المجموعات قيد المناقشة ويرمز لها بالرمز $U$.

**Example2.22:** Let $A = \{x, y, 3\}, B = \{2, -5, 100\}, C = \{2, 3, 1\}$
Find a universal set $U$.

**Example2.23:** Let $A = \{x \in R : 2 \leq x \leq 5\} \; and \; B = \{x \in R : \; -1 \leq x \leq 2\}$
Find a universal set $U$.

## Definition2.24: Family of Sets عائلة المجموعات

Family of sets is a set that have other sets as members.
يقال للمجموعة التي يكون كل عنصر من عناصرها مجموعة أنها **عائلة مجموعات**

**Example2.25:**

1. $A = \{\{1\},\{2\}\}$ is a family of sets

2. $B = \{\emptyset\}$ is a family of a set

3. $X = \{X\}$ is a family of a set

4. $A = \{x, \{y, z\}, \{1, \dots, 5\}\}$

5. $H = \{ A: A \text{ is a subset of } \{1,2,3\}\}$

6. $K = \{A_i: A_i = \{2, \frac{2}{i}\}, i = 1,2,3\}$

**Definition2.26: Power Set مجموعة القوى أو مجموعة الأجزاء**

Given a set $X$, the **power set of $X$** is the set of all subsets of $X$. The power set of $X$ is denoted by $P(X)$.

لتكن $X$ مجموعة يقال لمجموعة كل المجموعات الجزئية من $X$ أنها مجموعة القوى ل $X$ ويرمز لها بالرمز $P(X)$.

$$P(X) = \{A: A \subseteq X\}, \qquad A \in P(X) \Leftrightarrow A$$

**Example2.27:** Find $P(X)$ for the following sets $X$:

1. $X$=$\{1, 2, a\}$, $P(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1, a\}, \{2, a\}\}$

2. $X = \{\emptyset\}$, $P(X) = \{\emptyset, X\}$

3. $X = \{\{-2\}, 3\}$, $P(X) = \{\emptyset, X, \{\{-2\}\}, \{3\}\}$

**Remark2.28:** 1. Since $X \subseteq X, then\ P(X) \neq \emptyset$.

2. If $X$ is finite and has $n$ elements, then $P(X)$ has $2^n$ elements.