Foundation of Mathematics

أسس الرياضيات

Foundations of mathematics is the study of the basic mathematical concepts (logic statements العبارات المنطقية, numbers, relations, sets, functions...).

أسس الرياضيات هو علم دراسة المفاهيم الرياضية الأساسية كالعبارات المنطقية ، أنظمة الأعداد ، العلاقات ، المجاميع والدوال.

Set of Numbers (Subsets of the set of real numbers $\mathbb{R}$)

1. Set of Natural numbers $N = \{1,2,3,\ldots\}$

2. Set of Prime numbers $P = \{2,3,5,7,11,\ldots\}$

3. Set of Integer numbers $Z = I = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

4. Set of Even numbers $E = \{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$

5. Set of Odd numbers $O = \{\ldots,-3,-1,1,3,\ldots\}$

6. Set of Rational numbers $Q = \{\frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0\}$

Example: $\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, 3, 0.5, 0.3333$ are examples of rational numbers

7. Set of Irrational numbers $H = \{x : x \notin \mathrm{Q}\}$

Example: $\pi = 3.1415$ .... is irrational number

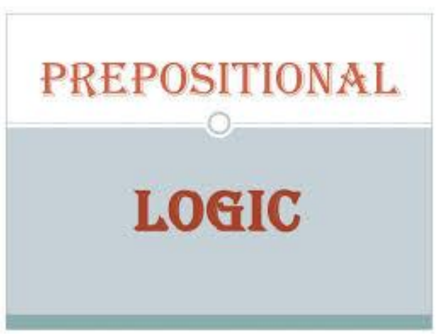
$e = 2.71828\ldots$ is irrational number

$\sqrt{2}, \sqrt{5}$ are irrational numbers

CHAPTER ONE

Mathematical Logic and Proof Using Propositional Calculus

المنطق والبرهان الرياضي باستخدام العبارات الخبرية



Chapter One Contents

1. **Propositions (Statements) العبارات**
2. **Compound Propositions العبارات المركبة**
3. **Mathematical proof البرهان الرياضي**
4. **Quantifiers المسورات**

Definition1.1: Mathematical Logic المنطق الرياضي

Mathematical logic is a subfield of mathematics exploring the applications of formal logic to mathematics. Mathematical logic is widely used in theoretical computer science and other sciences.

المنطق الرياضي هو احد الحقول الرياضية التي تدرس تطبيقات المنطق في الرياضيات. المنطق الرياضي يستخدم بشكل واسع في علوم الحاسبات وعلوم أخرى.

Propositions or Statements العبارات

Definition1.2: A **proposition** is a declarative sentence which is either '**true: T**' or '**false: F**', but not both. We use the letters $\boldsymbol{p, q, r, s}, \ldots etc$ to denote a proposition.

العبارة هي **جملة خبرية** والتي قد تكون صادقة أو كاذبة ومن غير الممكن أن تكون العبارة صادقة وكاذبة بنفس الوقت.

Example1.3: Which of the following sentences are called propositions (statements), and which ones are not propositions.

1) p: $\sqrt{4} = 2$ is a **true proposition**

2) q: $\sum_{x=1}^{3} (x+2) = 13$ is a **false proposition**

Because $\sum_{x=1}^{3} (x+2) = (1+2) + (2+2) + (3+2) = 3+4+5 = 12 \neq 13$.

3) r: Baghdad isn't in Iraq is a **false statement**

4) s: What time is it? is **not a proposition**

لأنها جملة استفهامية وليست جملة خبرية

5) w: Study hard is **not a proposition**

Because it is not a declaration sentence ليست جملة خبرية

6) v: $x + y = 0$ is **not a proposition**

لان الجملة ليست صادقة ولا كاذبة

Example1.4: (**H. W**) Which of the following sentences is called a proposition (statement), and which one is not a proposition.

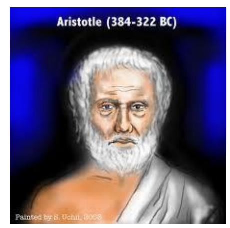
أي من الجمل أدناه تمثل عبارة وأيها لاتمثل عبارة؟

i) p: $x + 1 = 3$

ii) q: $x + y = z$

iii) r: $\frac{3}{4}$ is an even number (عدد زوجي)

The area of logic that deals with propositions is called **propositional logic** or **propositional calculus.** It was first developed by the Greek philosopher **Aristotle** أرسطو more than 2300 years ago.



Definition1.5: Negation of a proposition نفي العبارة

Let p be a proposition. The ***negation*** of p is called ''not p'' and is denoted by ($\sim p$).

لتكن 'p' عبارة. يقال للعبارة 'not p' أو 'ليس p' أنها نفي العبارة p ويرمز لها بالرمز $\sim p$

Example1.6: Re-write the following expressions without using the negation

$\sim(3 < 5)$

$\sim(x > y)$

$\sim(x \geq 5)$

$\sim(2 = 10)$

<u>Example1.7:</u> Find the truth value of each of the following statements. Find $(\sim p)$ negations for the statements q and r.

أوجد قيم صدق ونفي كل من العبارات التالية:

1. p : Today is Saturday (F) , $\sim p$: Today is **not** Saturday

2. q : 2+2=4 **(T)**

   $\sim q: 2+2 \neq 4$

3. r : The square has four sides **(H. W)**

<u>Remark1.8:</u> If a proposition p is true, then $\sim p$ is false; and if p is false, then $\sim p$ is true.

أدناه جدول صدق العبارة p ونفيها

The truth table of the negation of a proposition *p*	
p	$\sim p$
T	F
F	T

<u>Double Negation Law:</u> If p is a proposition, then $\sim\sim p = p$.

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
T	F	**T**
F	T	**F**

Compound propositions

Propositions are divided into two types:

1. **Primitive proposition** **عبارة بدائية أو بسيطة :** A proposition is said to be **primitive,** if it cannot be divided into simpler propositions.

   العبارة تسمى بدائية إذا لم يمكن تحليلها إلى عبارات أبسط .

2. **Composite proposition** **عبارة مركبة:** A proposition is called **composite**, if it is compound of more than one primitive proposition using logical connective operators.

العبارة تسمى مركبة إذا كانت تتكون من عبارتين بسيطتين أو أكثر تربطها أداة ربط واحدة او اكثر.

ادوات الربط التي تكون العبارة المركبة هي: $\wedge$ and

or $\vee$

if then $\Rightarrow$

if and only if $\Leftrightarrow$

Example1.9: Propositions **(1)-(3)** in Example (1.3) are primitive.

Example1.10: The following propositions are composite:

1. ‘‘ 2+3 = 5 **and** 6-4 = 1’’

   عبارة مركبة مكونة من عبارتين بسيطة مربوطة بأداة الربط **and**

2. ‘‘Ali is clever **or** he studies every day’’

   عبارة مركبة مكونة من عبارتين بسيطة مربوطة بأداة الربط **or**

ملاحظة: قيمة صدق العبارة المركبة تعتمد على:

١. قيم صدق العبارات البسيطة المكونة لها

٢. أدوات الربط المستخدمة لربط العبارات البسيطة

<u>Basic Logical connective Operators</u> أدوات الربط المنطقية الأساسية

There are some basic logical operators that connect simple propositions to produce composite proposition. These operators are:

1. <u>Conjunction</u> operator (و) أداة الوصل--English word (**and**), symbol (∧).

Let p and q are two primitive propositions. The conjunction of p and q is denoted by ‘‘$p \wedge q$’’ and read as ‘‘p and q’’.

If both p and q are true, then $p \wedge q$ is true, otherwise $p \wedge q$ is false.

أي عبارتين بسيطتين p و q يمكن ربطهما بأداة الربط (و) لتكوين العبارة المركبة ‘‘p ∧q’’. إذا كانت كل من p و q صادقة فان $p \wedge q$ تكون صادقة. إذا كانت إحدى العبارتين على الأقل كاذبة فان $p \wedge q$ تكون كاذبة.

Below is the truth table for the conjunction of two propositions:

Conjunction		
p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

<u>Example1.11</u>: Find the truth value of the following statements:

أوجد قيم صدق العبارات التالية

1. $2+2=4$ and $2+3=5$

   T ∧ T = T

2. $\frac{x}{x}=1$ such that $x \neq 0$ ∧ Baghdad is not in Iraq

   T ∧ F= F

3. -5 is a prime number $\wedge$ π is a rational number

$F \wedge F = F$

<u>Example1.12</u>: Let p: $x + y = y + x$ such that $x, y \in N$

q: $2 > 10$

r: There are three seasons in Iraq

Find the truth value of:

i) $(q \wedge \sim r) \wedge r$,

ii) $(q \wedge \sim\sim q) \wedge (\sim p \wedge r)$

<u>Solution of (i)</u>: $\sim r$: The seasons in Iraq are not three.

$$(q \wedge \sim r) \wedge r = (F \wedge T) \wedge F = F \wedge F = F$$

<u>Example1.13</u>: Let p and q are two propositions such that

p: Fouad is poor (T)

q: Fouad is clever (T)

Find the conjunction of p and q. Discuss the truth values of ''p **and** q''.

اوجد عبارة الوصل بين p و q. ناقش قيم صدق العبارة 'p and q' .

<u>Solution</u>: The conjunction ''p **and** q'' is

''Fouad is poor **and** Fouad is clever''

The compound proposition ''p **and** q'' is **true** if

''Fouad is poor and Fouad is clever''

The compound proposition $(p \wedge q)$ is **false** if:

''Fouad is rich $\wedge$ Fouad is clever''

''Fouad is poor $\wedge$ Fouad is not clever''

''Fouad is not rich $\wedge$ Fouad is not clever''