الفصل الرابع

الغايات والاستمرارية Limits and continuty

الغايات Limits

الغاية للدالة $f(x)$ هي تلك القيمة التي تصلها الدالة عندما x تقترب الى ثابت مثل a ويتم ايجاد الغاية بتعويض قيمة $x=a$ في الدالة إن امكن ذلك ويرمز لها:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

الخصائص

باعتبار $a, c \in R$ ثوابت

1- اذا كانت $f(x) = c$ حيث ان c ثابت فأن $\lim_{x \to a} f(x) = c$

مثال:- أوجد غاية الدالة $f(x) = 2$ عند النقطة $x = 3$

الحل:- $\lim_{x \to 3} 2 = 2$

2- اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = A$ و $\lim_{x \to a} g(x) = B$ فأن:

$$\lim_{x \to a} [g(x) \pm f(x)] = B + A$$

مثال:- أوجد غاية الدالة $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ في النقطة $x = 3$

الحل:-

$$\lim_{x \to 3} \left(x^3 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 3} x^3 + \lim_{x \to 3} \frac{1}{x}$$

$$= (3)^3 + \frac{1}{3} = 27 + \frac{1}{3} = \frac{81+1}{3} = \frac{82}{3}$$

3- اذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = A$ و $\lim_{x \to a} g(x) = B$ فأن :

$$\lim_{x \to a} [g(x) \cdot f(x)] = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

$$= B \cdot A$$

مثال :- أوجد غاية الدالة $f(x) = x^3\left(\frac{1}{x}\right)$ عند النقطة $x = 3$ ؟

الحل :-

$$\lim_{x \to 3} x^3\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\lim_{x \to 3} x^3\right]\left[\lim_{x \to 3} \frac{1}{x}\right]$$

$$= (27)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{27}{3} = 9$$

4- اذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = A$ وكان c عدد ثابت فأن :

$$\lim_{x \to a} c\, f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

$$= c \cdot A$$

مثال :- أوجد غاية الدالة $f(x) = x^3 - 3x + 4$ عند النقطة $x = 5$ ؟

الحل :-

$$\lim_{x \to 5} (x^3 - 3x + 4) = \lim_{x \to 5} x^3 - \lim_{x \to 5} 3x + \lim_{x \to 5} 4$$

$$= (5)^3 - 3 \lim_{x \to 5} x + 4$$

$$= 125 - 3(5) + 4$$

$$= 125 - 15 + 4$$

$$= 129 - 15$$

$$= 114$$

5- إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ وكان $B \neq 0$

فأن :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$$

مثال :- اوجد غاية الدالة $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ عند النقطة $x=1$ ؟

الحل :-

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1)$$

$$= \sqrt{1}+1 \quad = 1+1 \quad = 2$$

6- إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ و n أي عدد نسبي فأن :

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

مثال :- أوجد غاية الدالة $f(x) = x^{\frac{5}{7}}$ عند النقطة $x=3$ ؟

الحل :-

$$\lim_{x\to 3} x^{\frac{5}{7}} = \left[\lim_{x\to 3} x\right]^{\frac{5}{7}} = [3]^{\frac{5}{7}} = 3^{\frac{5}{7}}$$

مثال :- جد غاية الدالة التالية :-

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^2-7x-4}{x-4}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^2-7x-4}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(2x+1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}$$

$$= \lim_{x\to 4} (2x+1) = 2\cdot 4+1 = 8+1 = 9$$

تعريف

للدالــة غاية من جهة اليمين (a^+) تعني تعويض القيم التي تكون اكبر من قيمة (a) في الدالــة وبنفس الاسلوب فإن الغايـة من جهة اليسار (a^-) تعني تعويض القيمة التي تكون اصغر من قيمة (a) في الدالـة.

نظريـة

إن الغايـة موجودة للدالــة $f(x)$ عندما $x=a$ اذا وفقط اذا كانت الغاية من جهة اليمين = الغاية من جهة اليسار أي إن :-

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

مثال :- أوجد $\lim_{x\to -8} f(x)$ و $\lim_{x\to +8} f(x)$ و $\lim_{x\to 8} f(x)$ اذا كانت :

$$f(x) = \log_2 x \quad \text{if} \quad x < 8$$
$$= x-5 \quad \text{if} \quad x \geqslant 8$$

الحل :-

$$\lim_{x\to ^-8} f(x) = \lim_{x\to 8} \log_2 x = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2$$

$$= 3 \cdot 1 = \boxed{3}$$

$$\lim_{x\to ^+8} f(x) = \lim_{x\to 8} (x-5) = 8-5 = \boxed{3}$$

$$\because \lim_{x\to -8} f(x) = \lim_{x\to +8} f(x) = 3 \longrightarrow \lim_{x\to 8} f(x) = 3$$

مثال:- أوجد $\lim_{x \to 2} f(x)$ إن وجد للدالة:

$$f(x) = x^2 \quad if \quad x \leqslant 2$$
$$= x+1 \quad if \quad x > 2$$

الحل:-

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = \boxed{4}$$

$$\lim_{x \to +2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x+1) = 2+1 = \boxed{3}$$

$$\because \lim_{x \to -2} f(x) = 4 \neq \lim_{x \to +2} f(x) = 3$$

$\therefore$ لايوجد غاية للدالة عند $x = 2$

الغايات اللانهائية Infinite Limits

عندما تكون $x \longrightarrow \infty$ أو $x \longrightarrow -\infty$ نقسم على أكبر أس في البسط أو المقام ومن ثم نعوض بقيمة x.

أو اتباع القاعدة التالية :.

1- اذا كان أكبر أس في البسط مساوي لأكبر أس في المقام فالنتيجة تكون النسبة بين معامل أكبر أس في البسط على معامل أكبر أس في المقام.

2- اذا كان أكبر أس في البسط أكبر من أكبر أس في المقام فالنتيجة تكون (∞) مالانهاية.

3- اذا كان أكبر أس في البسط أصغر من أكبر أس في المقام فالنتيجة تكون صفر.

ملاحظة :-

$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \infty$ ، $\frac{\text{عدد}}{\infty} =$ صفر

مثال:- أوجد غاية الدوال التالية:-

1) $\lim_{X \to 1} \frac{1}{(X-1)^2}$

الحل:-

$$\lim_{X \to 1} \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

2) $\lim_{X \to \infty} \frac{X^3-2X+1}{3X^3+X^2+5}$

الحل:-

$$\lim_{X \to \infty} \frac{(X^3-2X+1)/X^3}{(3X^3+X^2+5)/X^3} = \lim_{X \to \infty} \frac{\frac{\cancel{X^3}}{\cancel{X^3}} - \frac{2\cancel{X}}{X^{\cancel{3}2}} + \frac{1}{X^3}}{\frac{3\cancel{X^3}}{\cancel{X^3}} + \frac{\cancel{X^2}}{X^{\cancel{3}}} + \frac{5}{X^3}}$$

$$= \lim_{X \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{X^2} + \frac{1}{X^3}}{3 + \frac{1}{X} + \frac{5}{X^3}} = \frac{1 - \frac{2}{(\infty)^2} + \frac{1}{(\infty)^3}}{3 + \frac{1}{\infty} + \frac{5}{(\infty)^3}} = \frac{1-0+0}{3+0+0} = \frac{1}{3}$$

3) $$\lim_{X \to \infty} \frac{3X^3+6X-21}{X^2+1} = \lim_{X \to \infty} \frac{(3X^3+6X-21)/X^3}{(X^2+1)/X^3}$$

$$= \lim_{X \to \infty} \frac{\frac{3\cancel{X^3}}{\cancel{X^3}} + \frac{6\cancel{X}}{X^{\cancel{3}2}} - \frac{21}{X^3}}{\frac{\cancel{X^2}}{X^{\cancel{3}}} + \frac{1}{X^3}} = \frac{3 + \frac{6}{(\infty)^2} - \frac{21}{(\infty)^3}}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{(\infty)^3}}$$

$$= \frac{3+0-0}{0+0} = \frac{3}{0} = \infty$$

الاستمرارية Continuity

تسمى الدالة $f(X)$ مستمرة عند $X = a$ اذا وفقط اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

1- قيمة $f(a)$ موجودة

2- قيمة $\lim_{X \to a} f(x)$ موجودة

3- $\lim_{X \to a} f(x) = f(a)$

وبخلافه (أي اذا لم يتحقق أحد هذه الشروط فتسمى الدالة $f(X)$ غير مستمرة عند النقطة $X = a$).

مثال :- هل الدالة التالية مستمرة عند النقطة $X = 2$ ؟

$$f(x) = 5X + 3 \quad \text{when} \quad X \leq 2$$

$$= 3X + 7 \quad \text{when} \quad X > 2$$

الحل :- الشرط الاول قيمة $f(a)$ دائماً تعوض في الدالة التي تقابل قيمة X التي تحتوي على المساوات ($\geq$ ، $=$ ، $\leq$). ①

$$f(x) = 5X + 3$$

$$f(2) = 5 \cdot 2 + 3$$

$$= 10 + 3 = \boxed{13}$$

② الشرط الثاني $\lim\limits_{x \to a}$ تقترب الغاية من القيمة الموجبة في الدالة التي تقابل قيمة X مع الاكبر او اكبر ويساوي وتقترب الغاية من القيمة السالبة في الدالة التي تقابل قيمة X مع الاصغر او الاصغر ويساوي.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (3x+7) = 3.2+7 = 6+7 = \boxed{13}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (5x+3) = 5.2+3 = 10+3 = \boxed{13}$$

$$\because \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \boxed{13}$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 13$$

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 13 = \boxed{13}$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند النقطة $x = 2$

مثال :- اذا كانت الدالـــة

$$f(x) = 4 \quad \text{when} \quad x < 0$$

$$= 2x \quad \text{when} \quad x \geq 0$$

هل الدالـــة مستمرة عند النقطة $x = 0$ ؟

الحل :-

1) $f(x) = 2x$

$$f(0) = 2 * 0 = 0$$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 4 = \boxed{4}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 2x = 2 * 0 = \boxed{0} \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

وهذا يعني ان أحد الشروط لم يتحقق وعليـــة فأن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند النقطة $x = 0$.