الفصل الثاني

اختبارات الفرضيات: Tests of Hypotheses

1.2 المقدمة:

المقصود بالفرضيات الإحصائية **Statistical Hypotheses** بمعنى الفرضيات التي تتعلق بالمجتمع الإحصائي المسحوبة منه العينة، أو توزيع هذا المجتمع أو معالمه كالوسط الحسابي أو النسبة في المجتمع.

والفرضية ما هي إلا تخمين أو استنتاج ذكي مبني على حيثيات معقولة أو منطقية ولكنه ليس مبنياً على حسابات دقيقة خاصة بالمجتمع لأننا نفترض أنه لا يمكن دراسة المجتمع بالكامل عن طريق الحصر الشامل بل نحاول استنتاج أو الاستدلال على مقاييس المجتمع باستخدام بيانات ونتائج العينة.

فمثلاً : قد يفترض الباحث أن متوسط الدخل الشهري للفرد في دولة ما هو 200 دولار (بناءً على ما يراه من مستوى المعيشة في هذا البلد وأوضاعه الاقتصادية)، ويحتاج إلى اختبار علمي (إحصائي) لمعرفة مدى صحة هذه الفرضية أو قد يفترض باحث آخر أن نسبة الناخبين في إحدى الدوائر الذين يؤيدون مرشحاً معيناً لا تقل عن % 30 وهكذا... والمطلوب هو اختيار مدى صحة هذه الفرضيات. أي أن يصل الباحث إلى قرار إما بقبول الفرضية أو عدم قبولها (أي رفضها) وذلك باحتمال معين. وقبل تناول كيفية إجراء الاختبارات الإحصائية نستعرض أولاً بعض المفاهيم والتعريفات الأساسية اللازمة لهذا الموضوع حتى تكون الصورة أكثر وضوحاً..

2.2 الفرضية العدمية (أو الصفرية) The Null Hypothesis

الفرضية العدمية هي "الفرضية الأساسية المراد اختبارها". ويرمز لها عادة بالرمز :Ho. هذه الفرضية تأخذ عادة شكل معادلة أو مساواة. فمثلاً إذا كانت الفرضية العدمية المراد اختبارها هي أن متوسط دخل الفرد في إحدى المناطق هو 200 دولار شهرياً فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$Ho: \mu = 200$$

ويقرأ بالشكل التالي :

الفرضية العدمية: هي أن متوسط دخل الفرد في المنطقة هو 200 دولاراً شهرياً.

وكمثال آخر : إذا كان الفرض المراد اختباره هو أن نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين بين عمال أحد المصانع هي % 30، فإن هذه الفرضية تكتب بالرموز كما يلي :

$$Ho : P = 0.30$$

وتقرأ بالشكل التالي :

الفرضــية العدميــة: هــي أن نسـبة المؤيـدين للبرنـامج الاقتصــادي بـين عمـال المصـنع هي 0.30

وليس شرطاً أن تصـاغ الفرض العدمية بـالرموز، فقد يتم التعبير عنه بدون رموز. فقد يريد الباحث أن يختبر ما إذا كانت هناك علاقة بين الأمية والاستعداد للانحراف، أو بين المؤهل العلمي ودرجة الوعي السياسي. فقد يصيغ الباحث الفرضية العدمية بالشكل التالي على سبيل المثال الأمية والاستعداد للانحراف مستقلان (أي لا توجد علاقة بينهما، أو أن العلاقة بينهما منعدمة).

3.2 الفرضية البديلة : The Alternative Hypothesis

في اختبارات الفرضيات يتحتم وضع فرضية أخرى غير الفرضية العدمية المراد اختبارها تسمى الفرضية البديلة. وهذه الفرضية " هي التي ستقبل في حالة رفض الفرضية العدمية " أي لابد من تحديد فرضية أخرى بديلة في الوقت الذي نحدد فيه الفرضية العدمية، وبالتالي فإن الفرضية البديلة تعرف كما يلي :

الفرضية البديلة هي الفرضية الأخرى التي ستقبل في حالة رفض الفرضية العدمية" ويرمز له عادة بالرمز : H_1

والفرضية البديلة لها أهمية كبيرة وبالذات في قياس الظواهر الاجتماعية – كما سوف نرى فهي التي تحدد نوع الاختبار المستخدم لذلك فهو يأخذ أحد أشكال ثلاثة هي :

أ– أن يأخذ شكل " لا يساوي ". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار الطرفين

فمثلاً : إذا كانت الفرضية العدمية هي أن متوسط الدخل الشهري لفئة معينة في المجتمع هي 200 دولار.

$$Ho: \mu = 200$$

فإن الفرضية البديلة في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي :

$$H1: \mu \neq 200$$

بمعنى أن متوسط دخل هذه الفئة من المجتمع " لا يساوي " 200 دولار شهرياً.

ب- أو أن يأخذ شكل " أكبر من ". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى" اختبار الطرف الأيمن".

فمثلاً: قد تكون الفرضية البديلة كما يلي :

$$H1: \mu > 200$$

أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أكبر من 200 دولار شهرياً.

ج- وأخيراً قد يأخذ الفرض البديل شكل" أقل من". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى " اختبار الطرف الأيسر".

فمثلاً: قد تكون الفرضية البديلة هي:

$$H1: \mu < 200$$

أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أقل من 200 دولاراً شهرياً.

والخلاصة هي لابد للباحث من تحديد الفرضية البديلة التي لا تخرج عن أحد الأشكال الثلاثة السابقة، وهذا التحديد مهم جداً قبل الدخول في تفاصيل الاختبار الإحصائي وذلك لأنه هو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم كما سوف نرى.

4.2 الخطأ في اتخاذ القرار:

ففي حالة قبول الباحث لفرضيته العدمية، فلا مجال للبحث في الفرضية البديلة، أما في حالة حدوث العكس بمعنى رفض الفرضية العدمية فإنه يتحتم في هذه الحالة قبول الفرضية البديلة، على أنه من الجدير بالذكر أن الباحث هنا عرضة للوقوع في الخطأ عند اتخاذ قراره بقبول الفرضية العدمية أو رفضها، فقد يرفض فرضاً هو في الواقع صحيح، وقد يقبل فرضا هو في الواقع غير صحيح. لذلك فقد تم تصنيف هذه الأخطاء إلى نوعين هما:

الخطأ من النوع الأول : Type I error

الخطأ من النوع الأول هو "رفض الفرضية العدمية بينما هي صحيحة ". أي أنه على الرغم من أن الفرضية العدمية في الواقع انها صحيحة وكان من الواجب قبولها فقد تم أخذ قرار خاطئ برفضها. وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الأول هو " رفض الفرضية صحيح".

الخطأ من النوع الثاني : Type II error

وفي المقابل فإن الخطأ من النوع الثاني يعني " قبول الفرضية العدمية بينما هي خاطئة " أي أنه على الرغم من أن الفرضية العدمية خاطئة وكان من الواجب رفضها فقد تم أخذ قرار خاطئ بقبولها وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الثاني هو " قبول الفرضية خاطئ ". وقد يتساءل البعض عند مدى إمكانية تصغير الخطأين معاً ولكن لسوء الحظ لا يمكن تصغيرهما معاً إلى أدنى حد ممكن، ويبدو أن الطريقة الوحيدة المتاحة لذلك هي زيادة (أو تكبير) حجم العينة، الأمر الذي قد لا يكون ممكنا في كل الحالات. لذلك فإن الذي يحدث عادة هو تثبيت أحدهما كأن يكون نسبة أو احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول ومحاولة تصغير الآخر.

5.2 مستوى المعنوية : Level of Significance

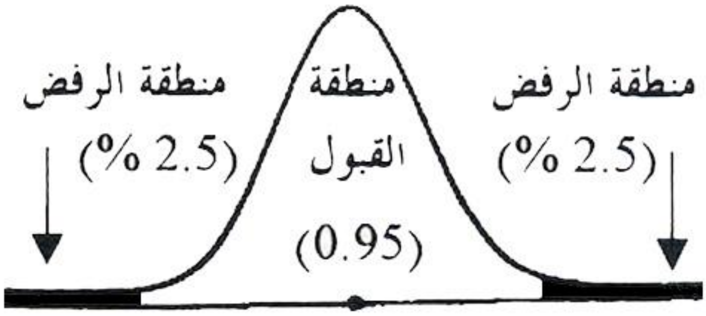
يعتبر مصطلح " مستوى المعنوية " واحداً من أهم المصطلحات المستخدمة في دراسة نظرية اختبارات الفرضيات. والمقصود بمستوى المعنوية هو" احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول ". أو نسبة حدوثه " أي احتمال رفض الفرضية العدمية بينما هي صحيحة ".

وعادة ما يرمز إلى مستوى المعنوية بالرمز اللاتيني ألفا α وأشهر قيمتين لمستوى المعنوية هما **5% ، 1 %** ولكن ليس هناك ما يمنع من أن يأخذ قيما أخرى.

ومن الملاحظات المهمة هنا هو أن "مستوى المعنوية " والذي يسمى أحياناً " مستوى الدلالة " هو المكمل لدرجة الثقة " **بمعنى أن مجموعهما يساوي 100% أو واحد صحيح**. فإذا كانت درجة الثقة 95% فإن مستوى المعنوية يساوي 5%. والعكس صحيح فإذا كان مستوى المعنوية 5% فإن هذا يعني أن درجة الثقة 95 %. ولعل من أهم الملاحظات هنا هو استخدام تعبير "مستوى المعنوية" في حالات اختبارات الفرضيات، بينما يستخدم مصطلح "درجة أو مستوى الثقة" في حالات التقدير.

والفكرة الأساسية في اختبار الفرضية هي تقسيم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين: أحداهما تسمى " منطقة القبول " أي منطقة قبول الفرضية العدمية. والأخرى تسمى " منطقة الرفض"، أي منطقة رفض الفرضية العدمية والتي تسمى أحيانا " بالمنطقة الحرجة Critical region ". والنقطة الجديرة بالملاحظة هنا هي أن منطقة القبول تمثل درجة الثقة، بينما تمثل منطقة الرفض مستوى المعنوية. وهناك ثلاث حالات مختلفة لمنطقتي القبول والرفض هي :

الأولى : إذا كانت الفرضية البديلة تأخذ شكل " لا يساوي " كأن يكون الفرض في هذه الحالة هو أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 200 دولاراً فإن منطقة الرفض تكون موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي، ويسمى الاختبار في هذه الحالة " اختبار الطرفين "، والذي يأخذ الشكل التالي (بافتراض أن $\alpha = 5\%$) :

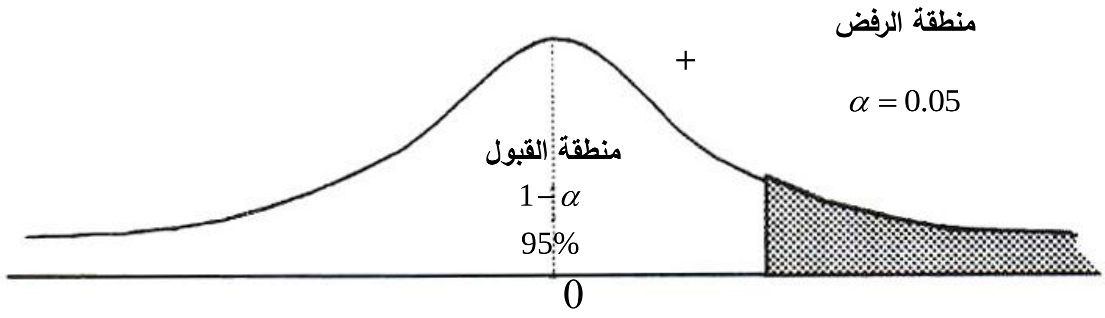


اختبار الطرفين

فالفرضية العدمية هنا $Ho: \mu = 200$ يعني أن متوسط دخل الفرد يساوي 200 دولار شهريا، والفرضية البديلة في هذه الحالة هو $H_1: \mu \neq 200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 200 دولار شهرياً. حيث تمثل المنطقة البيضاء غير المظللة منطقة القبول والتي قد تساوي 95% وبالتالي **فمنطقة الرفض مقسمة بالتساوي على طرفي المنحنى في هذه الحالة تكون قيمة كل منهما % 2.5.**

والنتيجة هو أن القرار أيا كان نوعه سيكون بمستوى معنوية % 5 بمعنى أن احتمال أو نسبة الخطأ فيه من النوع الأول تساوي % 5.

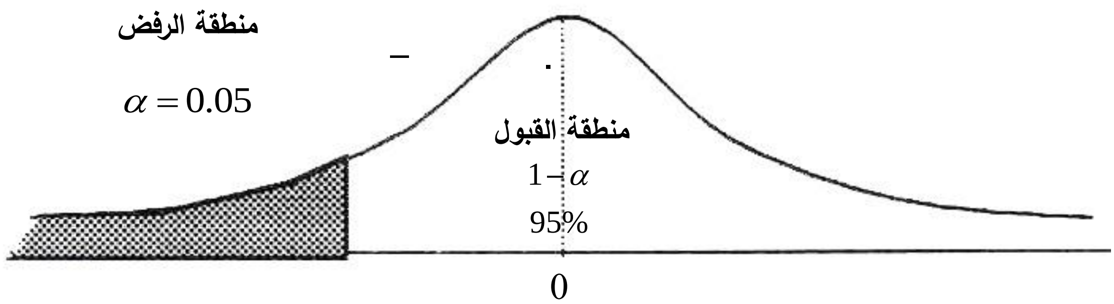
الثانية: إذا كانت الفرضية البديلة تأخذ شكل "أكبر من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيمن للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الأيمن. والذي يأخذ الشكل التالي أدناه:



اختبار الطرف الأيمن

فالفرضية العدمية هنا نفس فرض المثال السابق، بينما الفرضية البديلة هي $H1: \mu > 200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أكبر من 200 دولاراً شهرياً. وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلاً 5% مركز في الطرف الأيمن من المنحنى.

الثالثة : إذا كانت الفرضية البديلة تأخذ شكل " أقل من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيسر للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الأيسر. والشكل التالي يوضح ذلك:



اختبار الطرف الأيسر

مع افتراض ثبات الفرضية العدمية كما في المثال السابق، بينما الفرضية البديلة هي $H1: \mu < 200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أقل من 200 دولار شهرياً، وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلاً % 5 مركز في الطرف الأيسر من المنحنى.

وسوف نتناول فيما يلي خطوات الاختبار الإحصائي بشيء من التفصيل.

6.2 خطوات الاختبار الإحصائى :

يمكن تلخيص خطوات الاختبار الإحصائي في خمس خطوات كما يلي :

1) صياغة الفرضية العدمية Ho ، والذي يأخذ عادة شكل "يساوي" فمثلاً إذا كان المطلوب هو اختبار ما إذا كان متوسط عمر الناخب هو 20 سنة فإن هذا الفرض يصاغ كما يلي:

$$Ho: \mu = 20$$

2) صياغة الفرضية البديلة H_1 ، والذي يأخذ أحد أشكال ثلاثة إما:

" لا يساوي"

أو " أكبر من"

أو " أقل من"

وبالرموز فإن الفرضية البديلة قد يأخذ شكل أحد الصيغ التالية:

$$H_1: \mu \neq 20$$

$$OR\ \mu > 20$$

$$OR\ \mu < 20$$

والذي يحدد شكل الفرضية البديلة هو مدى اقتناع الباحث بذلك أو مدى توفر المعلومات الأولية، فمثلاً إذا كانت وجهة نظر الباحث أن متوسط عمر الناخب لا يمكن أن يقل عن 20 سنة فإنه يختار الفرض البديل " أكبر من " والعكس صحيح إذا كان يعتقد أن متوسط عمر الناخب لا يزيد عن 20 سنة فإنه يختار الفرض البديل " أقل من " أما إذا لم يكن لديه أي تصور أو أي معلومات فإنه يختار الفرضية البديلة " لا يساوي ".

3) إحصائية الاختبار: وهي الإحصائية التي يتم حسابها من بيانات العينة بافتراض أن الفرضية العدمية صحيحة. ويتوقف شكل الإحصائية على العوامل التالية:

أ– توزيع المجتمع، وهل هو طبيعي أم لا، وهل تباينه معروف أم لا.

ب– حجم العينة، وهل هو كبير أم صغير.

جـ- الفرضـية العدمية المـراد اختبارهـا وهـل هـو عـن الوسـط أو النسـبة أو التبـاين أو الارتباط... الخ.

والفكرة الأساسية (غالباً) في إحصائية الاختبار هي : حساب الفرق بين قيمة المعلمة التـي نفترضـها للمجتمـع (فـي الفرضـية العدميـة) والقيمـة المقابلـة لهـا فـي العينـة أي التـابع الإحصائي، ثم نقسم (أو ننسب) هذا الفرق إلى الخطأ المعياري للتابع الإحصائي. فمثلاً: إذا كـان الاختبـار عن الوسط الحسابي فإنـه يتم حساب الفرق بين قيمـة الوسط الحسابي للمجتمـع التـي نفترضـها وقيمـة الوسـط الحسـابي للعينـة، ثم نقسـم هـذا الفـرق علـى الخطـأ المعياري للوسط. وهكذا مع باقي الإحصائيات. فلو أراد الباحث اختبار فرضية أن متوسط عمر الناخب في دولة ما هو مثلاً 30 سنة ولاختبار مدى صحة هذه الفرضية فإنه عادة ما تسحب عينة عشوائية من المجتمع، ولنفرض أن متوسط عمر الناخب في هذه العينة كان 31 سنـة، فـالفرق هنـا هـو سنـة واحـدة وهـو فـرق صـغير بـين الافتـراض والعينـة الحقيقيـة فالباحث عادة ما يميل إلى قبول فرضه العدمي.

أما إذا كان متوسط عمر الناخب في العينة مثلاً هو 45 سنة، فالفرق هنا كبير بين الفرض والعينة، ولذا فإن احتمال رفض الفرضية العدمية هو احتمال كبير نظراً لكبر الفرق بين قيمة الفرض وقيمة العينة. من هنا نستطيع القول بأن إحصائية الاختبار تعتمد على حساب الفرق بين قيمة الوسط المفترض وقيمة متوسط العينة.

هنا قد يُثار تساؤل عن المعيار الذي يستطيع من خلاله الباحث الحكم على هذا الفرق ومدى كبره أو صغره. والإجابة الإحصائية عليه تتم من خلال قسمة هذا الفرق على الخطأ المعيـاري للوسط، ثم مقارنـة خـارج القسمة بالقيمـة الجدوليـة أو مـا يسمى بحدود منطقتـي القبول والرفض كما سوف نرى لاحقاً.

4) الخطوة الرابعة في الاختبار هي تحديد منطقتي القبول والرفض وذلك بناءً على الجداول الإحصائية والتي تعتمد على:

أ- توزيع المعاينة (وهل هو طبيعي أو t أو...)

ب- الفرضية البديلة (هل هو لا يساوي أو أكبر من أو أقل من أي هل يستخدم اختبار الطرفين أو الطرف الأيمن أو الأيسر).

ج- ومستوى المعنوية (هو 1% أو 5% أو غير ذلك).

5) المقارنـة والقرار : بمعنـى أن نقـارن قيمـة الإحصـائية (المحسوبة من الخطـوة الثالثـة) بحـدود منطقتـي القبـول والـرفض (والتـي حـددناها فـي الخطـوة الرابعـة). فـإذا وقعـت قيمـة الإحصـائية داخل منطقة القبول فإن القرار هو : قبول الفرضية العدميـة. أمـا إذا وقعـت قيمة الإحصائية في منطقة الرفض فإن القرار هو رفض الفرضية العدمية، وفـي هذه الحالـة نقبل الفرضية البديلـة. مع ملاحظـة أن القرار مرتبط بمستوى المعنويـة المحدد. بمعنـى أن القـرار قد يتغير إذا تغيـر مسـتوى المعنويـة المسـتخدم (وفـي بعـض الحـالات قد لا يتغيـر القرار، فهذا يتوقف على قيمـة الإحصـائية ومـا إذا كانت تقع في منطقة القبول أو منطقة الرفض).

مما سبق يمكن تلخيص خطوات الاختبار الإحصائي فيما يلي :

1- صياغة الفرضية العدمية.

2- صياغة الفرضية البديلة.

3- الدالة الإحصائية للاختبار.

4- حدود منطقتي القبول والرفض.

5- المقارنة والقرار.

وفيما يلي صيغ الإحصائية لاختبارات الوسط الحسابي للعينات الكبيرة والصغيرة وكذلك للنسبة، ثم نستكمل بعدها خطوات الاختبار الإحصائي.

1.6.2 الإحصائية في حالة اختبار الوسط الحسابي :

أ) بـافتراض أن المجتمـع الإحصـائي المسـحوبة منـه العينـة هـو مجتمـع طبيعـي وانحرافـه المعياري σ معروف، بغض النظر عن حجم العينة فإن إحصائية الاختبار والتي نرمز لها بالرمز Z تأخذ الشكل التالي :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

لاحظ أن البسط هو الفرق بين متوسطي المجتمع والعينة، والمقام هو الخطأ المعياري للوسط.

مثال(1): عينة عشوائية حجمها 49 شخصاً اختيرت من أفراد دولة ما، فإذا كان الوسط الحسابي لدخول الأفراد الأسبوعية في العينة هو 75 دولاراً إذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع لدخول الأفراد يساوي 14 دولاراً. كيف يمكن اختبار الفرض العدمي بأن متوسط الدخل الأسبوعي لمواطني هذه الدولة يساوي 72 دولاراً مقابل الفرض البديل أنه لا يساوي 72 وذلك بمستوى معنوية 5 %

الحل: أن المعلومات المتوافرة $n=49,\ \sigma=14\ ,\ \overline{X}=75\ ,\ \mu=72$

1- الفرضية العدمية : أن متوسط المجتمع للدخل الاسبوعي يساوي 72 وبالرموز:

$$Ho:\mu=72$$

2- الفرضية البديلة : أن المتوسط المجتمع للدخل الاسبوعي لا يساوي 72 وبالرموز:

$$H1:\mu\neq 72$$

3- الإحصائية : بما أن العينة التباين او الانحراف المعياري معلوم فإن الإحصائية في حالة اختبار الوسط تأخذ الشكل التالي :

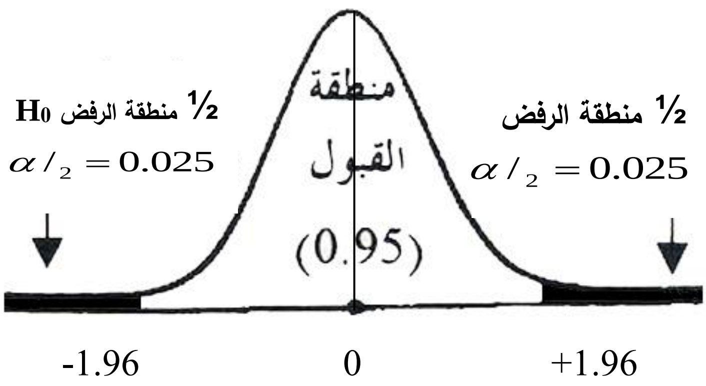
$$Zcal=Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{75-72}{\frac{14}{\sqrt{49}}}=\frac{3}{\frac{14}{7}}=\frac{3}{2}=1.5$$

أي أن القيمة الإحصائية المحسوبة تساوي 1.5

$$Ztab=Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{\frac{0.05}{2}}=Z_{0.025}=\pm1.96$$

و أن القيمة الإحصائية الجدولية ذات اختبار طرفين تساوي ±1.96

4- حدود منطقتي القبول والرفض: نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري حيث مستوى المعنوية 5% وبما أن الفرضية البديلة هو:" لا يساوي " فإن ما يستعمل في هذه الحالة هو اختبار الطرفين كما في الشكل التالي:



وقد حصلنا على حدود منطقتي القبول والرفض وذلك بقسمة درجة الثقة (المكملة لمستوى المعنوية) والتي تساوي 0.95 وبالكشف في جدول التوزيع الطبيعي المعياري عن Z نجد أنها تساوي 1.96 وحيث أنها موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي فنضع إشارة موجبة في النصف الأيمن، وإشارة سالبة في النصف الأيسر، أي أن منطقة القبول تبدأ من القيمة 1.96- وتستمر حتى القيمة 1.96+ (أي أن أي قيمة محصورة بين هاتين القيمتين تكون في منطقة القبول، وأي قيمة خارج هذه الحدود تكون في منطقة الرفض).

5- المقارنة والقرار : وبمقارنة قيمة الإحصائية المحسوبة من الخطوة رقم 3 (والتي تساوي 1.5) بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 4) نجد أنها تقع في منطقة القبول لذلك فإن القرار هو : قبول الفرضية العدمية التي تنص بأن متوسط دخول الأفراد الأسبوعية في هذه الدولة يساوي 72 دولاراً وذلك بمستوى معنوية % 5.

مثال(2): إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعا من الألبان حيث يصل متوسط وزن العبوة 240 جرام، وذلك بانحراف معياري 18 غرام حيث كانت أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي .تم أخذ عينة من 9 عبوات وذلك عند إجراء اختبار الرقابة على الجودة فوجد أن متوسط وزن العبوة 235 غرام .هل ترى أن هناك عيبا بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة عند مستوى معنوية 10%

الحل: أن المعلومات المتوافرة $n=9, \sigma=18 , \bar{X}=235 , \mu=240$

1- الفرضية العدمية : أن متوسط وزن العبوة يساوي 240 وبالرموز :

$$H_0 : \mu = 240$$

2- الفرضية البديلة : أن متوسط وزن العبوة يقل او ينخفض عن 240 وبالرموز :

$$H_1 : \mu < 240$$

3- الإحصائية : بما أن العينة التباين او الانحراف المعياري معلوم فإن الإحصائية في حالة اختبار الوسط تأخذ الشكل التالي :

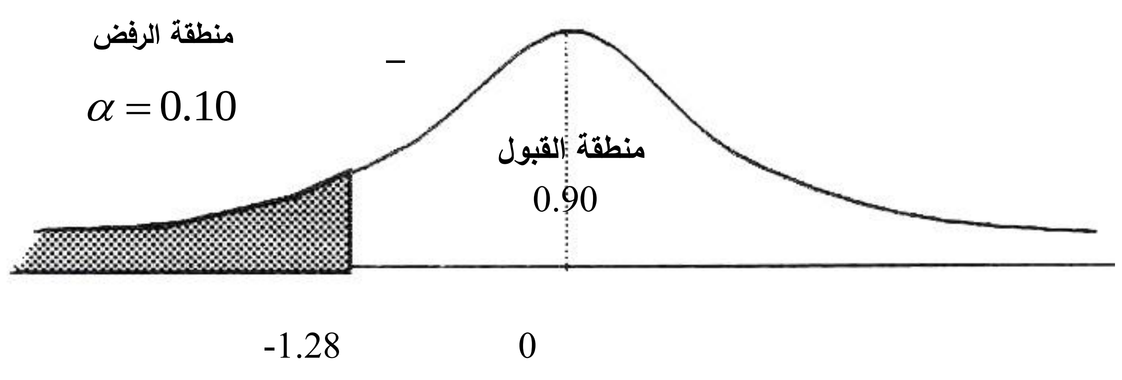
$$Z_{cal} = Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{235-240}{\frac{18}{\sqrt{9}}} = \frac{-5}{6} = -0.83$$

أي أن القيمة الإحصائية المحسوبة تساوي 0.83-

$$Z_{tab} = -Z_{\alpha} = -Z_{0.10} = -1.28$$

وأن القيمة الإحصائية الجدولية ذات اختبار من طرف اليسار تساوي 1.28-

4- حدود منطقتي القبول والرفض نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري الاتي وتحت مستوى معنوية 10% وكالاتي



5- المقارنة والقرار: وبمقارنة قيمة الإحصائية المحسوبة (والتي تساوي 0.83-) بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 4) نجد أنها تقع في منطقة القبول لذلك فإن القرار هو : قبول الفرضية العدمية الذي ينص على ان متوسط وزن العبوة يصل 240 جرام وذلك بمستوى معنوية 10%.

ب) أما في حالة العينات الصغيرة $(n \leq 30)$ وذلك عندما يكون المجتمع طبيعياً وانحرافه المعياري غير معروف فإنه يمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة S بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع σ. وان الإحصائية سوف تأخذ الشكل التالي:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

والتي لها توزيع t بدرجات حرية n – 1 ومستوى معنوية α

مثال(3): اختار باحث عينة عشوائية قوامها (9) من طلبة المرحلة الثانية واجرى لهم اختباراً في مادة الاساليب الكمية وتم الحصول على الدرجات الآتية، فهل يمكن اعتبار متوسط هذه العينة اعلى من المتوسط العام لجميع طلبة المرحلة الثانية البالغ (5.7) اختبر ذلك عند مستوى 0.05

X= 10 9 7 8 9 3 5 8 5

الحل:

1- الفرضية العدمية: متوسط هذه العينة يمثل المتوسط العام لجميع طلبة المرحلة الثانية البالغ (5.7) وبالرموز :

$$H_0 : \mu = 5.7$$

2- الفرضية البديلة :متوسط هذه العينة اعلى من المتوسط العام لجميع طلبة المرحلة الثانية البالغ (5.7) وبالرموز:

$$H_1 : \mu > 5.7$$

وان الوسط الحسابي للعينة

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{64}{9} = 7.1$$

وان

$$\sum X^2 = 100 + 81 + 49 + ... = 498$$

وعليه فان الانحراف المعياري للعينة

$$S = \sqrt{\frac{n\sum X^2 - (\sum X)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(9)(498) - (64)^2}{9(9-1)}}$$

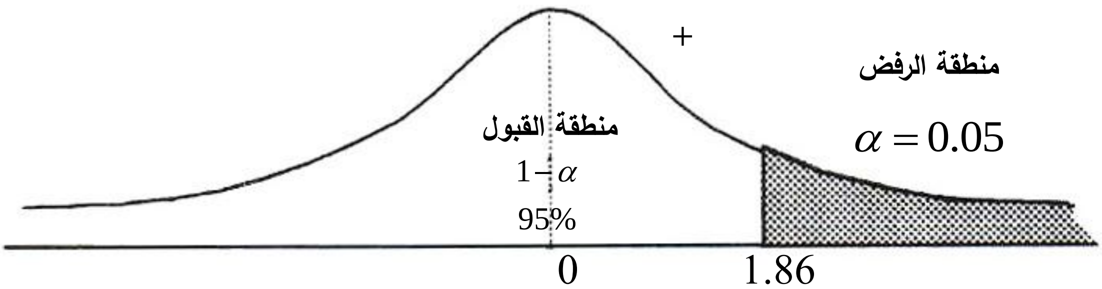
$$S = \sqrt{\frac{4482 - 4096}{72}} = \sqrt{\frac{386}{72}} = \sqrt{5.36} = 2.32$$

3–دالة الاختبار لتوزيع t تأخذ الشكل الاتي

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{7.1 - 5.7}{\frac{2.32}{\sqrt{9}}} = \frac{2.4}{\frac{2.32}{3}} = \frac{7.2}{2.32} = 3.10$$

وان القيمة الجدولية عند مستوى 0.05 ودرجة حرية 8 لاختبار ذو نهاية واحدة من طرف اليمين = 1.86 بمعنى $t(\alpha, n-1) = t(0.05,8) = 1.86$

4– حدود منطقتي القبول والرفض نحصل عليها من التوزيع t الاتي وتحت مستوى معنوية 10% وبدرجة حرية (n-1=8) وكالاتي



5–المقارنة و القرار **نرفض الفرضية الصفرية ونقبل بالفرضية البديلة التي تنص بان متوسط هذه العينة اعلى من المتوسط العام لجميع طلبة المرحلة الثانية عند مستوى 0.05**

ج) أما في حالة العينات الكبيرة $(n > 30)$ وذلك عندما يكون المجتمع طبيعياً وانحرافه المعياري غير معروف فإن الإحصائية تأخذ الشكل التالي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

مثال(4): يدعي احد الاطباء ان من الاثار الجانبية لاستعمال دواء معين هو انخفاض ضغط الدم بمتوسط هو (75) ، تم سحب عينه قوامها (49) مريض ، وتم قياس ضغط الدم بعد تعاطي هذا الدواء فوجد ان متوسط ضغط الدم في العينة (65.5) وبانحراف معياري قدره (6.4).فهل توافق الطبيب في ادعائه في صحة استعماله للدواء تحت مستوى معنوية 0.05

الحل: البيانات المتوافرة $n = 49,\ s = 6.4,\ \overline{X} = 65.5, \mu = 75$

1-صياغة الفرضية الاحصائية

الفرضية الصفرية : ان استعمال الدواء لا يؤدي الى انخفاض الضغط ورياضياً

$$Ho : \mu = 75$$

الفرضية البديلة :ان استعمال الدواء يؤدي الى انخفاض الضغط ورياضياً

$$H1 : \mu < 75$$

2-تحديد الاختبار الاحصائي :وهنا سيتم الاختبار من الجانبين الايسر وعليه فان دالة الاختبار الاحصائي ستكون بالشكل الاتي عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

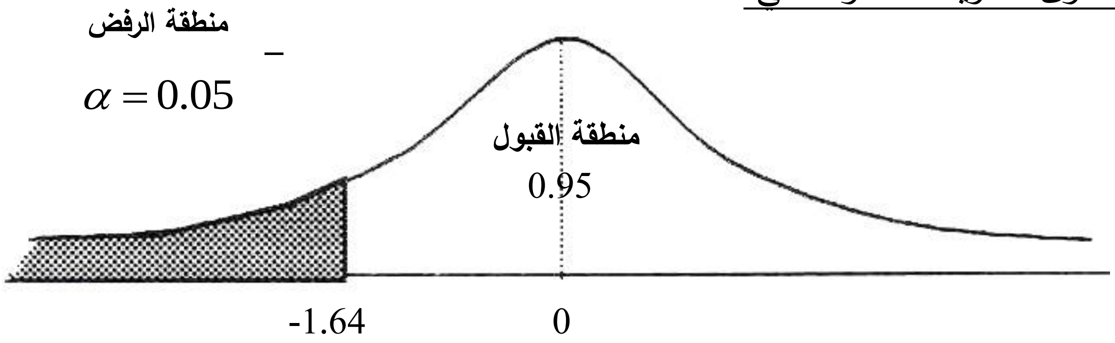
$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{65.5 - 75}{\frac{6.4}{\sqrt{49}}} = -4.92$$

أي أن القيمة الإحصائية المحسوبة تساوي 4.92-

$$Z_{tab} = -Z_{(\alpha)} = -Z_{(0.05)} = -1.64$$

وأن القيمة الإحصائية الجدولية ذات اختبار من طرف اليسار تساوي 1.64-

3-تحديد منطقة القبول والرفض نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري الاتي وتحت مستوى معنوية 5% وكالاتي



4-عملية اتخاذ القرار من خلال المقارنة بين قيمة المحسوبة $Z_{cal} = -4.92$ وقيمة $-Z_{tab} = -1.64$ الجدولية وعليه فان القرار هو قبول الفرضية البديلة التي تنص ان ادعاء الطبيب صحيح وان استعمال الدواء يؤدي الى انخفاض الضغط ونوصي باستعمال دواء غيره

2.6.2 اختبار الفرق بين وسطين حسابيين :

قد يرغب الباحث في إجراء اختبار عما إذا كان متوسط الدخل في إحدى الدول يساوي متوسط الدخل في دولة أخرى، أو إجراء اختبار عما إذا كان متوسط عمر الناخب في إحدى المناطق يساوي متوسط عمر الناخب في منطقة أخرى... وهكذا بمعنى آخر قد يرغب الباحث في إجراء اختبار عما إذا كان متوسط المجتمع الأول يساوي متوسط المجتمع الثاني.. في مثل هذه الحالات يسمى الاختبار

أ- اختبار الفرق بين وسطين حسابيين في حالة كون العينات مستقلة و كبيرة وتكون خطوات هذا الاختبار كما يلي :

1- الفرض العدمي : أن متوسط المجتمع الأول يساوي متوسط المجتمع الثاني (أي لا يوجد فرق بين متوسطي المجتمعين).

وبالرموز : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

2- الفرض البديل : أن المتوسطين غير متساويين وبالرموز :

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

ويمكن للباحث استخدام أكبر من أو أقل من بدلاً من لا يساوي إذا كان لديه معلومات تشير إلى ضرورة ذلك.

3- الإحصائية : وبافتراض أن المجتمعين طبيعيان وأن العينتين مستقلتان وكبيرتان فإن إحصائية الاختبار في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي :

$$Z_{\bar{X}1-\bar{X}2} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

إذ أن:

يرمز بـ n_1 إلى حجم العينة الأولى.

يرمز بـ n_2 إلى حجم العينة الثانية.

يرمز بـ $\bar{X}1$ إلى الوسط الحسابي للعينة الأولى.

يرمز بـ $\bar{X}2$ إلى الوسط الحسابي للعينة الثانية.

يرمز بـ σ_1^2 إلى تباين المجتمع الأول.

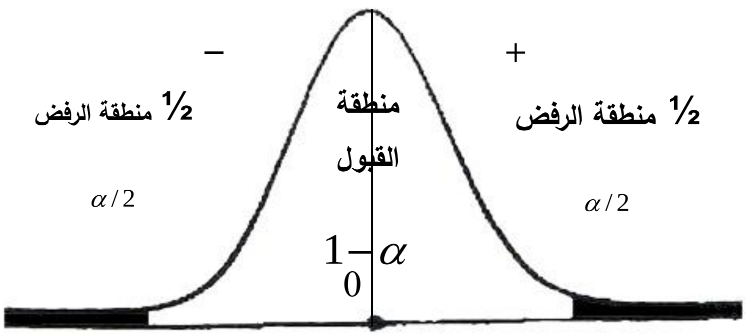
يرمز σ_2^2 إلى تباين المجتمع الثاني.

4- حدود منطقتي القبول والرفض ويمثلها الشكل التالي مع ملاحظة أن:

أ- التوزيع طبيعي (نحصل على القيم من توزيع Z).

ب- اختبار الطرفين (لأن الفرض البديل لا يساوي).

جـ- مستوى المعنوية يساوي α



5- المقارنة والقرار نقارن قيمة الإحصائية بحدود منطقتي القبول والرفض، فإذا وقعت في منطقة القبول نقبل الفرض العدمي، وإذا وقعت في منطقة الرفض نرفض الفرض العدمي، ونقبل الفرض البديل.

مثال(5): البيانات التالية تمثل نتائج عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبتين من منطقتين لمقارنة متوسط عمر الناخب فيهما: إذ أن $\overline{X}_1 = 35, \overline{X}_2 = 29, n_2 = 80, n_1 = 100$

اختبر الفرضية العدمية: أن متوسط عمر الناخب في المنطقة الأولى يساوي متوسط عمر الناخب في المنطقة الثانية بمستوى معنوية 5% مقابل الفرض البديل أنهما غير متساويين إذا علمت أن : $\sigma_1^2 = 60 \quad , \quad \sigma_2^2 = 32$

الحل: البيانات المتوافرة $n_1 = 100, n_2 = 80, \overline{X}_1 = 35, \overline{X}_2 = 29, \sigma_1^2 = 60, \sigma_2^2 = 32$

1- الفرضية العدمية أن المتوسطين متساويان وبالرموز:

$$Ho: \mu_1 = \mu_2$$

2- الفرضية البديلة أن المتوسطين غير متساويين وبالرموز:

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

3- الإحصائية : تأخذ الشكل التالي :

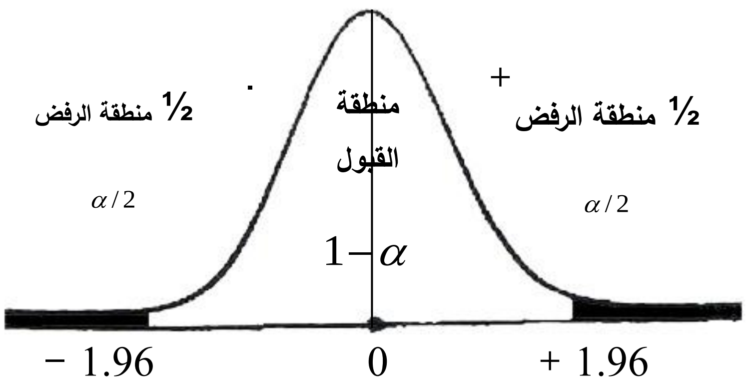
$$Z_{cal} = Z_{\overline{X}1-\overline{X}2} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{35-29}{\sqrt{\frac{60}{100} + \frac{32}{80}}} = \frac{6}{\sqrt{0.60+0.40}} = \frac{6}{\sqrt{1}} = 6$$

أي أن قيمة الإحصائية المحسوبة تساوي 6

$$Z_{tab} = Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = \pm 1.96$$

و أن القيمة الإحصائية الجدولية ذات اختبار طرفين عند نصف مستوى معنوية 0.025 تساوي ±1.96

4- حدود منطقتي القبول والرفض التي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي Z لأن العينات كبيرة، والاختبار هو اختبار الطرفين (لأن الفرض البديل لا يساوي) عند نصف مستوى المعنوية المطلوب هو % 2.5.



أي أن منطقة القبول تبدأ من 1.96- إلى 1.96+ ومنطقة الرفض هي القيم التي أصغر من 1.96 - والتي أكبر من 1.96 +.

5- المقارنة والقرار ولما كانت قيمة الإحصائية (والتي تساوي) 6 تقع في منطقة الرفض فإن القرار هو رفض الفرضية العدمية وقبول الفرضية البديلة عند مستوى معنوية 5% أي **أننا نرفض الفرض القائل بأن متوسط عمر الناخب في المنطقة الأولى يساوي متوسط عمر الناخب في المنطقة الثانية وذلك بمستوى معنوية % 5.**

ب- اختبار الفرق بين وسطين في حالة كون العينات مستقلة وصغيرة :

إذا كانت العينات صغيرة (مجموع العينتين أقل من 30 مفردة أو حتى 31 مفردة) فإن الإحصائية في هذه الحالات بافتراض أن المجتمعين طبيعيان، وأن تباين المجتمع الأول يساوي تباين المجتمع الثاني ولكنه مجهول (بمعنى أن $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ ولكن قيمة هذا التباين غير معروفة) وأن العينتين مستقلتان فإن إحصائية الاختبار تأخذ الشكل التالي والتي لها توزيع t بدرجات حرية تساوي $n_1 + n_2 - 2$

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

إذ ان التباين المدمج:

$$S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

أي يتم حساب S^2 أولاً قبل التعويض في الإحصائية وتكون خطوات الاختبار هي:

1- الفرض العدمي: (هو نفسه)

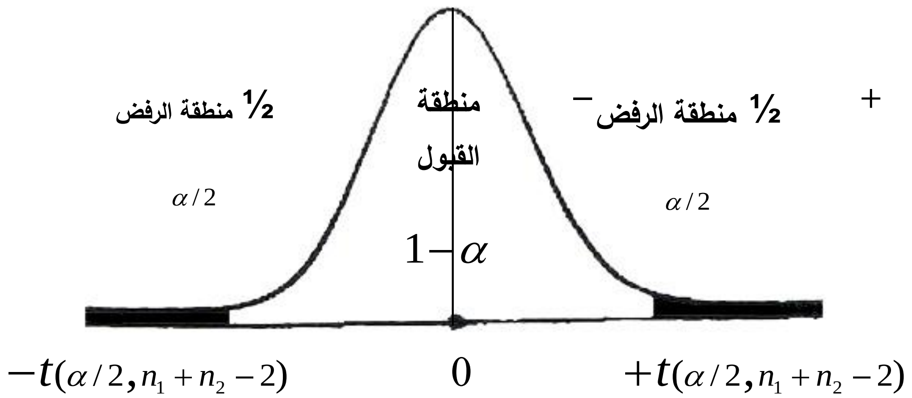
$$Ho: \mu_1 = \mu_2$$

2- الفرض البديل: (هو نفسه)

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

3- الإحصائية هي كما مبين أعلاه (وهي في هذه الحالة t)

4- حدود منطقتي القبول والرفض ونحصل عليها في هذه الحالة من جدول t عند درجات حرية تساوي $n_1 + n_2 - 2$ وعند نصف مستوى معنوية يساوي $\frac{\alpha}{2}$ كما في الشكل التالي:



5- المقارنة والقرار : كما سبق ذكره

مثال(6): البيانات التالية تمثل نتائج عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبتين من مدينتين عن أعمار الناخبين بهما (بافتراض أن تباينهما هو نفسه) : $n_1 = 10, n_2 = 10, \bar{X}_1 = 28, \bar{X}_2 = 26, S_1^2 = 50, S_2^2 = 30$ اختبر الفرض العدمي : $Ho: \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ وذلك بمستوى معنوية 5 % بافتراض أن الأعمار في المدينتين لهما توزيع طبيعي.

الحل :

1- الفرضية العدمية: أي متوسط أعمار الناخبين في المدينتين متساوٍ $Ho: \mu_1 = \mu_2$

2– الفرضية البديلة: أي متوسط أعمار الناخبين في المدينتين غير متساوٍ $H1: \mu_1 \neq \mu_2$

3– الإحصائية (بما أن العينات صغيرة، وأن تباين المجتمعين هو نفسه، وأن المجتمعين طبيعيان). فإن الإحصائية المناسبة في هذه الحالة هي t :

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}}$$

إذ أن التباين المدمج يمثل

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

نحسب أولاً S^2 كما يلي :

$$S^2 = \frac{(10-1)\times 50 + (10-1)\times 30}{10+10-2} =$$

$$S^2 = \frac{9\times 50 + 9\times 30}{18} = \frac{450+270}{18} = \frac{720}{18} = 40$$

وبالتعويض في الإحصائية عن:

$$\bar{X}_1 = 28, \bar{X}_2 = 26, S^2 = 40, n_1 = 10, n_2 = 10$$

فنحصل على :

$$t = \frac{28-26}{\sqrt{\frac{40}{10} + \frac{40}{10}}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2.828} = 0.7$$

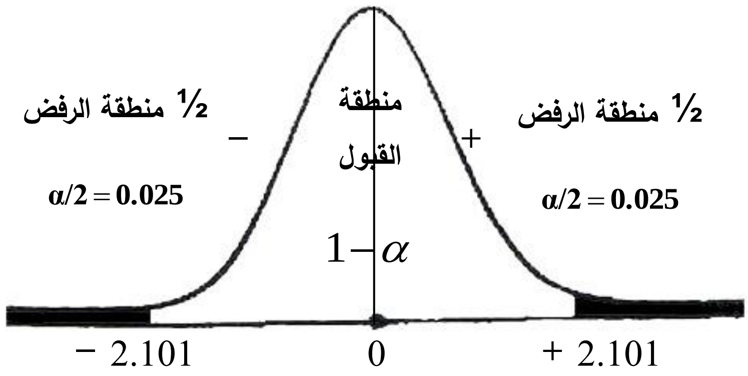
أي أن قيمة الإحصائية المحسوبة تساوي 0.7

وان القيمة الجدولية لتوزيع t عند درجات حرية ($n_1+n_2-2=18$) لاختبار ذو نهايتين او طرفين عند نصف مستوى معنوية 0.025 يساوي 2.101± و رياضياً

$$t_{tab} = t(\alpha/2, n_1 + n_2 - 2) = t(0.025,18) = \pm 2.101$$

4- حدود منطقتي القبول و الرفض:

ونحصل عليها في هذه الحالة من جدول t عند درجات حرية تساوي $n_1 + n_2 - 2$ أي تساوي $(10 + 10 - 2)$ والتي تساوي (18) وذلك عند نصف مستوى المعنوية $0.025 = \frac{0.05}{2}$ أي أن $t_{0.025,18} = \pm 2.101$ كما في الشكل التالي



أي أن منطقة القبول تبدأ من -2.101 وحتى 2.101 +

5- المقارنة والقرار: أن قيمة الإحصائية المحسوبة تساوي 0.7 فإنها تقع في منطقة القبول وبالتالي فإن القرار هو **قبول الفرضية العدمية بأن متوسط أعمار الناخبين في المدينة الأولى يساوي متوسط أعمار الناخبين في المدينة الثانية بمستوى معنوي 5%**

ب- اختبار الفرق بين وسطين في حالة كون العينات مستقلة :

يستخدم هذا الاختبار عندما تكون العينتان مترابطتان اي ان هناك عوامل مشتركة بين افراد المجموعتين كأن يكون اختبار العينتين تم على شكل ازواج متطابقة ثم وضع كل فرد في احدى المجموعتين او ان تكون هناك عينة واحدة فقط واجري عليها اختبارين مختلفين، ويستخدم الاختبار الاحصائي وفق الصيغة الاتية للمقارنة بين متوسطي المجموعتين:

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} \quad and \quad S_d = \sqrt{\frac{n\sum d^2 - (\sum d)^2}{n(n-1)}} \ , \quad \bar{d} = \frac{\sum d}{n}$$

إذ أن:

d : الفرق بين درجتي كل فرد

$\bar{d}$: الوسط الحسابي للفروق

s_d : الانحراف المعياري للفروق

n : حجم العينة

وبعد استخراج القيمة المحسوبة تقارن مع القيمة الجدولية عند مستوى الدلالة المحدد ودرجة حرية (n−1) ، **فإذا كانت القيمة المحسوبة المطلقة اكبر ترفض الفرضية الصفرية التي ترى بعدم وجود فروق بين متوسطي المجموعتين اما اذا كانت القيمة المحسوبة المطلقة اصغر من القيم الجدولية تقبل الفرضية الصفرية اي عدم وجود فروق بين متوسطي المجموعتين.**

مثال(7): إذا كان من المعتقد ان أكل السمك يساعد على زيادة الذكاء أجريت تجربة على 10 أشخاص اداريين يعملون في القطاع الخاص تم اختيارهم عشوائياً وأجري لهم أحد اختبارات الذكاء ثم أعطي لهم طعام يحتوي أساساً على السمك ، وبعد فترة أجري لهم اختبار الذكاء مرة أخرى فكانت نتائجهم كما مبين ادناه : وبفرض أن مستوى الذكاء قبل وبعد أكل السمك يتبع توزيعا طبيعياً عند مستوى معنوية 5 % لاختبار الفرض أن(مستوى الذكاء قبل أكل السمك يقل عن مستوى الذكاء بعد أكل السمك) ؟

65	78	38	13	67	84	72	68	63	48	قبل اكل السمك
63	76	46	13	74	79	81	64	67	52	بعد اكل السمك

الحل : نكتب البيانات المتوافرة بصورة عمودية ، ومن ثم نحسب الفروقات وكالاتي

X_1	X_2	d	d^2
48	52	−4	16
63	67	−4	16
68	64	4	16
72	81	−9	81
84	79	5	25
67	74	−7	49
13	13	0	0
38	46	−8	64
78	76	2	4
65	63	2	4
∑		−19	275

1− الفرضية العدمية: مستوى الذكاء قبل أكل السمك لا يختلف عن مستوى الذكاء بعد أكل السمك $Ho: \mu_1 = \mu_2$

2− الفرضية البديلة: مستوى الذكاء قبل أكل السمك يقل عن مستوى الذكاء بعد أكل السمك $H_1: \mu_1 < \mu_2$

3− الإحصائية فإن الإحصائية المناسبة في هذه الحالة هي إحصاءة t :

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{\sqrt{S_d}}{n}} \quad and \quad S_d = \sqrt{\frac{n\sum d^2 - (\sum d)^2}{n(n-1)}} \;,\; \bar{d} = \frac{\sum d}{n}$$

<u>في البداية يتم حساب الوسط الحسابي للفروق وكالآتي</u>

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-19}{10} = -19$$

<u>ومن ثم بعدها يتم حساب الانحراف المعياري للفروق</u>

$$S_d = \sqrt{\frac{n\sum d^2 - (\sum d)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(10)(275) - (-19)^2}{10(10-1)}} = \sqrt{\frac{2750-361}{90}}$$

$$S_d == \sqrt{\frac{2389}{90}} = \sqrt{26.54} = 5.15$$

وعليه فان إحصاءة الاختبار المحوسبة او المحسوبة

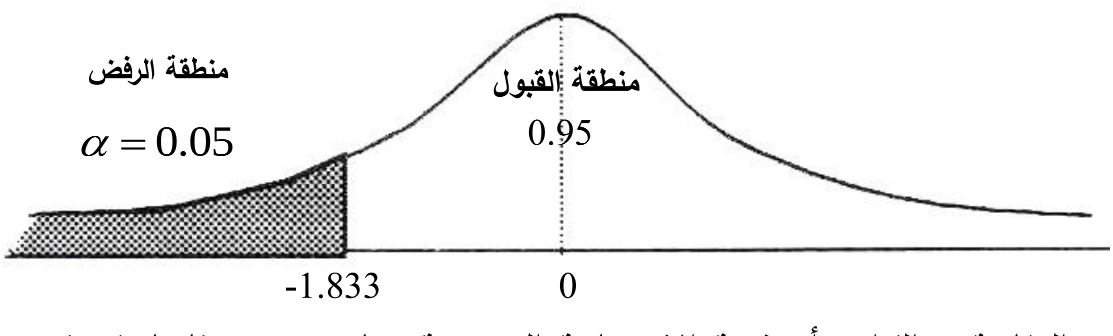
$$t_{cal} = t = \frac{-1.9}{\frac{5.15}{\sqrt{10}}} = \frac{-1.9}{\frac{5.15}{3.16}} = -1.16$$

وان القيمة الجدولية لتوزيع t عند درجات حرية (n−1=9) لاختبار ذو نهاية يسرى او من الطرف الايسر عند مستوى معنوية 0.05 = 1.833− و رياضياً

$$t_{tab} = t(\alpha, n-1) = -t(0.05,9) = -1.833$$

4− حدود منطقتي القبول و الرفض:

ونحصل عليها في هذه الحالة من جدول t عند درجات حرية تساوي n− 1 أي تساوي (9) وذلك عند مستوى معنوية يساوي $\alpha = 0.05$ أي أن $-t_{0.05,9} = -1.833$ كما في الشكل التالي



5− المقارنة و القرار: أن قيمة الإحصائية المحسوبة تساوي 1.16- فإنها تقع في منطقة القبول وبالتالي فإن القرار هو **قبول الفرضية العدمية التي تنص على ان مستوى الذكاء قبل أكل السمك وبعده لا يختلف او لا يؤثر على مستوى الذكاء وكذلك لا يقل من مستوى الذكاء بعد أكل السمك بمستوى معنوي 5%**

3.6.2 اختبار الفرق بين نسبتين :

كذلك قد يرغب الباحث في اختبار ما إذا كانت نسبة المؤيدين لمرشح ما في الانتخابات التشريعية تساوي نسبة المؤيدين لمرشح آخر في الانتخابات نفسها، في مثل هذه الحالات فإن المطلوب هو اختبار ما إذا كانت النسبة في المجتمع الأول تساوي النسبة في المجتمع الثاني، ويسمى الاختبار : اختبار الفرق بين نسبتين وتكون خطوات هذا الاختبار ما يلي :

1- الفرضية العدمية: أن النسبة في المجتمعين متساوية وبالرموز $Ho: P_1 = P_2$

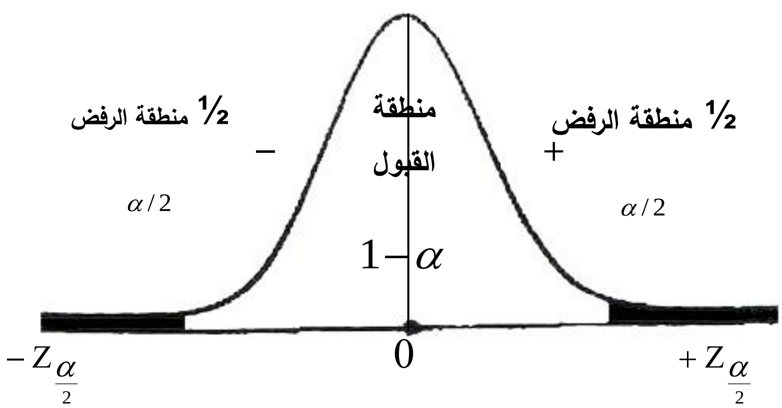
2- الفرضية البديلة: أن النسبتين في المجتمعين غير متساوية وبالرموز $H_1: P_1 \neq P_2$
(ويمكن اختيار شكل آخر للفرض البديل مثل: أكبر من أو أقل إذا دعت الحاجة لذلك).

3- الإحصائية: بافتراض أن العينتين كبيرتان بدرجة كافية تكون الإحصائية كما يلي

$$Z_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n2}}} \quad and \quad \hat{P} = \frac{n_1\hat{P}_1 + n_2\hat{P}_2}{n_1 + n_2}$$

أي يتم أولاً حساب $\hat{P}$ (والتي تمثل متوسط مرجح من نسبتي العينتين) قبل التعويض في الإحصائية والتي لها توزيع طبيعي معياري.

4- حدود منطقتي القبول والرفض ونحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي، والاختبار هنا هو اختبار الطرفين (لأن الفرض البديل لا يساوي) وتحدد المنطقتين بناءً على مستوى المعنوية المطلوب، وذلك كما في الشكل التالي:



5- المقارنة والقرار: كما ذكر مسبقاً

مثــال(8): لاختبـار مـا إذا كانـت نسبـة المؤيـدين لبرنـامج اقتصـادي معين فـي المدينـة (أ) يساوي نسبة المؤيدين لهذا البرنامج في المدينة (ب) تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين من المدينتين حيث : حجم العينـة الأولـى يسـاوي حجم العينـة الثانيـة يساوي 100 وكانـت نسبة المؤيدين للبرنامج في عينة المدينة (أ) هي : $\hat{P}=0.70$ ونسبة المؤيدين للبرنـامج في عينة المدينة (ب) هي $\hat{P}_2=0.50$.

اختبر الفرض العدمي أن النسبة في المدينتين متساوية مقابل الفرض البديل أنها غير متساوية وذلك بمستوى معنوية % 1.

<u>الحل</u> : البيانات المتوافرة $n_1=100\,, n_2=100\,, \hat{P}_1=0.70\,, \hat{P}_2=0.50$

1- الفرض العدمي : أن النسبة في المدينة أ تساوي النسبة في المدينة ب وبالرموز :

$$Ho: \mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2$$

2- الفرض البديل : أن النسبة في المدينتين غير متساوية وبالرموز

$$H1: \mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}_2$$

3- الإحصائية :

$$Z_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}=\frac{\hat{P}_1-\hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n1}+\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n2}}} \qquad and \qquad \hat{P}=\frac{n_1\hat{P}_1+n_2\hat{P}_2}{n_1+n_2}$$

وعليه فان

$$\hat{p}=\frac{100\times 0.70+100\times 0.50}{100+100}=\frac{70+50}{200}=\frac{120}{200}=0.60$$

<u>وبالتعويض في الإحصائية نحصل على:</u>

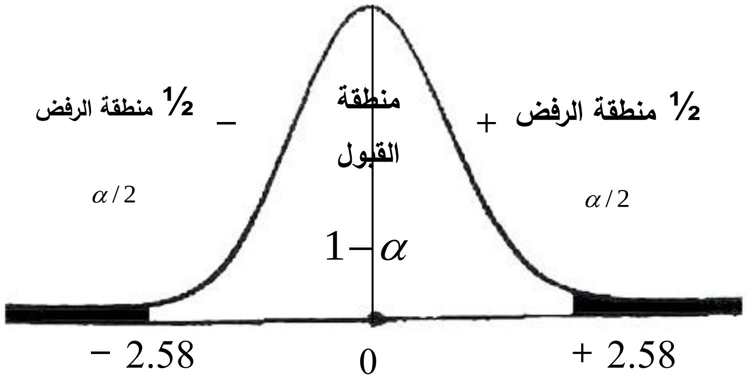
$$Z=Zcal=\frac{0.70-0.50}{\sqrt{\frac{0.60\times 0.40}{100}+\frac{0.60\times 0.40}{100}}}=\frac{0.20}{0.069}=2.899$$

<u>أي أن قيمة الإحصائية المحوسبة تساوي 2.899</u>

$$Ztab=Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{\frac{0.01}{2}}=Z_{0.005}=\pm 2.58$$

4– حدود منطقتي القبول والرفض

نحصل عليها من التوزيع الطبيعي، واختبار الطرفين بمستوى معنوية % 1 كما في الشكل التالي :



أي أن منطقة القبول تبدأ من 2.58- وحتى 2.58 +

5– المقارنة والقرار:

أن القيمة الإحصائية تساوي 2.899 فهي تقع في منطقة الرفض وبالتالي فإن القرار هو : **رفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل أي رفض الفرض القائل بأن نسبة المؤيدين للبرنامج الاقتصادي في المدينة (أ) تساوي نسبة المؤيدين له في المدينة (ب) وذلك بمستوى معنوية 1% (بمعنى أن احتمال الخطأ في هذا القرار لا تتعدى 1%). وقبول الفرض البديل بأن النسبتين غير متساويتين.**

تمارين الفصل الثاني

س(1) تدّعي شركة نفطية ان متوسط رواتب منتسبيها يساوي(4000) دولار ، فاذا اخذت عينة من (25) منتسباً فوجد ان متوسط رواتب منتسبيها هو (3950) فاذا علمت ان الانحراف المعياري للمجتمع هو (125) دولار ، اختبر صحة الادعاء القائل ان متوسط رواتب منتسبيها لا يمثل او يختلف عن (4000) دولار عند مستوى ثقة (0.95).

س(2) أدعت احدى الشركات المنتجة لأحدى المواد الكيمائية بان متوسط كثافة هذه المواد لا يزيد عن (8) علماً ان التباين هو (6.5) ولغرض اجراء الاختبار لهذا المتوسط قام احد الباحثين بسحب عينه من هذه المادة وبحجم (50) مفردة فتبين ان الوسط الحسابي لكثافة هذه المادة (8.775) ، اختبر الفرض القائل متوسط كثافة هذه المواد الكيمائية يزيد عن (8) عند مستوى معنوي (0.05).

س(3) بينت الدراسة ان المتوسط الحسابي لقوة تحمل الاسلاك المعدنية يصل الى (1800) أمبير مع انحراف معياري قدره (150) أمبير ، ويؤكد المتخصصين في المصنع ان المنتج لهذه الاسلاك بإمكانهم زيادة قوته على تحمل الاسلاك وتأكيداً على ذلك تم اختيار عينه من (36) سلكاً فتبين ان متوسط قوة تحمل الاسلاك (1840) فهل يمكن قبول الادعاء بان المتوسط الحسابي لقوة تحمل الاسلاك المعدنية يختلف عن (1800)

س(4) إذا كان من المعلوم ان جسم الانسان البالغ يحتاج يومياً في المتوسط الى (800)ميلغرام من الكالسيوم لكي يقوم بوظائفه بصورة جيدة ويرى احد علماء التغذية ان الافراد ذوي الدخل المنخفض لا يستطيعون تحقيق هذا المتوسط ولاختبار ذلك تم اختيار عينة من (50) شخصاً بالغاً من بين ذوي الدخل المنخفض فكان متوسط ما يتناوله من كالسيوم يومياً هو (755.3) ميلغرام والانحراف المعياري هو (293.3) ميلغرام .فهل تدل النتائج على ان متوسط ما يتناوله الاشخاص البالغون من ذوي الدخل المنخفض من الكالسيوم يقل عن (800)ميلغرام اختبر ذلك تحت مستوى معنوية 0.05

س(5) إذا كانت اعمار بطاريات السيارات المنتجة بوساطة احد المصانع تتبع التوزيع الطبيعي ، ويدعي صاحب المصنع ان متوسط اعمار هذه البطاريات هو (36) شهراً .ولاختبار صحة هذا الادعاء اختيرت عينه عشوائية حجمها (10) بطاريات وقيست اعماها بالشهور فكان متوسط اعمارها (30.33)شهر بانحراف معياري (9) اشهر .فهل تدل البيانات على ان متوسط اعمار البطاريات اقل من (36) شهراً تحت مستوى معنوية 0.01 اختبر ذلك الادعاء

س(6) ترغب شركة ان تعرف بدرجة ثقة (0.95) فيما اذا كان ادعاها بان متوسط صناديق مسحوق الغسيل الذي تنتجه يحتوي على اكثر من(500) غرام من المسحوق ، ويعرف المختصون بالشركة ان اوزان المسحوق بالصناديق تتبع التوزيع الطبيعي. وتم سحب عينه قوامها (25) صندوق فتبين ان متوسط الوزن (520) غرام والانحراف المعياري (75) غرام فهل يتحقق صحة الادعاء ام لا

س(7) إذا كان متوسط ربح السهم لأحدى الشركات هو (15) دولار في السنة السابقة ، تم اخذ عينه من (7) مستثمرين لمعرفة توقعاتهم عن متوسط الربح للسنة الحالية فتبين انه (17) دولار وبانحراف معياري قدره (2) دولار .هل تتفق مع المستثمرين في صحة تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذه السنه تحت مستوى معنوية 0.05

س(8) تتلقى وكالة حكومية شكاوى كثيرة من المستهلكين فحواها أن متوسط صناديق مسحوق الصابون التي تبيعها إحدى الشركات تحتوي على كمية أقل من (20) أونصة سائلة من المسحوق المعلن عنه. للتحقق من شكاوى المستهلكين، اشترت الوكالة (9) صناديق من المسحوق ووجدت أن الوسط الحسابي هو (18) اونصة سائلة وبانحراف معياري قدره(3) اونصة سائلة. كيف يمكن للوكالة إجراء الاختبار عند مستوى معنوية 5% إذا علمت أن كمية المسحوق في الصناديق موزعة توزيعاً طبيعياً؟

س(9) يرغب تاجر للمصابيح الكهربائية أن يقرر عند مستوى معنوية 5%، أي صنف يشترى من بين صنفين لهما نفس السعر من المصابيح الكهربائية. لإتمام العمل هذا،

فأنه يأخذ عينة عشوائية من 100 مصباح من كل صنف فوجد أن الصنف الأول ساعات عمر كل مصباح في المتوسط 980 ساعة، مع انحراف معياري قدره 80ساعة وفيما يخص للصنف الثاني ساعات عمر كل مصباح في المتوسط 1010 ساعة، مع انحراف معياري قدره 120ساعة. أي الصنفين يجب شراءه إذا كان التاجر يرغب في أن يصل إلى قرار عند مستوى معنوية

(أ) 5%؟
(ب) 1%؟

س(10) ان متوسط الدرجات في امتحان القبول للدراسات العليا GRE لعام 2015 لعينة من الطلاب قوامها 64 طالباً متقدمين للماجستير هو 640 درجة بانحراف معياري قدره 20 درجة. وفي عام 2017 تقدم 81 طالباً للالتحاق بالماجستير فكان متوسط درجاتهم في امتحان القبول 650 درجة بانحراف معياري 40.

(أ) هل مستوى المتقدمين عام 2015 أقل من مستوى المتقدمين عام 2016 عند مستوى معنوية 1%؟
(ب) ما هي منطقة القبول بدلالة درجات امتحان GRE؟

س(11) يرغب الاتحاد الأمريكي لطب الأسنان في اختبار أي معجون من بين أفضل معجني أسنان في محاربة التسوس. أخذت عينة عشوائية من 21 شخصاً من مستعمل كل من المعجونين موضع الاختبار. ووجد أن متوسط عدد الفجوات للمجموعة الأولى على مدى 10 سنوات هو (25) بانحراف معياري (5) وبالنسبة للمجموعة الثانية، متوسط الفجوات (23) بانحراف معياري (4) بافتراض أن توزيع الفجوات طبيعي لمستعمل المعجون الأول والمعجون الثاني، اختبر فيما إذا كانت $\mu1 = \mu2$ عند مستوى معنوية 5%

س(12) اجريت تجربة لمقارنة طريقتين استخدمتا في تسويق مادة الأرز في احدى المركز التجارية ، المجموعة الاولى استخدمت معها طريقة الترويج الإلكتروني عن طريق

وسائل الاعلام كالفيس بوك ...الخ ، بينما استخدمت الطريقة التقليدية عن طريق الاعلان في شبكة التلفاز مع المجموعة الثانية. الافراد الذين كونوا المجموعتين وضعوا على شكل ازواج متعادلة على اساس الدرجات التي حصلوا عليها ادناه في اختبار للذكاء لمعرفة جودة المنتج .اختبر الفرق بين متوسطي المجموعتين عند مستوى 0.05

X_1	X_2
65	59
84	86
52	47
32	35
41	34
68	63
55	49
67	71

س(13) اجريت دراسة عن ظاهرة الاجور بين عمال القطاع العام والخاص وذلك عن طريق سحب عينة عشوائية قوامها (18) من العمال للقطاعين فتبين ان متوسط الاجر الاسبوعي للعمال باستثناء يوم الجمعة (80) دولار وبانحراف معياري قدره (20) دولار ، وتم سحب عينة اخرى قوامها (19) من نفس العمال للقطاعين فتبين ان متوسط الاجر الاسبوعي للعمال باستثناء يوم الجمعة (60) دولار وبانحراف معياري قدره (30) دولار. أختبر عند مستوى معنوية (0.01) فيما اذا كان هناك فروق معنوية او جوهرية بين اجور العمال للقطاعين.

س(14) بهدف المقارنة بين جودة نوعين من اطارات السيارات المنتجة في مصنعين مستقلين كمعيار لجودة الانتاج لغرض المقارنة وهو متوسط عدد الكيلومترات المقطوعة لحين استبدال الاطار باطار جديد ،اجريت تجربة عشوائية تمثلت بحساب عدد الكيلومترات المقطوعة لحين انتهاء عمر الاطار في كلا النوعين وفقاً للنتائج الاتية

متوسط المسافة / نوع الاطار	حجم العينة	متوسط المسافة المقطوعة (كم)	الانحراف المعياري(كم)
الاول	28	45600	450
الثاني	27	49850	650

هل هناك ما يشير الى ان الاطار من النوع الثاني اكثر جودة من النوع الاول عند مستوى معنوية (0.05)

س[15] ابتكرت طريقة حديثة لتدريس مادة مدخل في بحوث العمليات. هذه الطريقة تتضمن استخدام وسائل تكنلوجية وبرمجية متطورة لشرح المفاهيم المستخدمة في مدخل علم بحوث العمليات. تم اختيار 6 طلاب لهذه التجربة و أجري اختبار قبل إجراء التجربة و رصدت الدرجات ثم أجري اختبار لهم بعد إجراء التجربة ورصدت درجاتها فكانت كالآتي:

الدرجة بعد التجربة (X_2)	الدرجة قبل التجربة (X_1)
71	69
74	73
79	76
63	60
86	84
64	63

س[16] أجريت دراسة لمعرفة رواتب العمال الفنيين في المصانع الاهلية والمصانع الحكومية ،تم اخذ عينة عشوائية مؤلفة من (100) عامل فني في المصانع الاهلية فوجد ان متوسط رواتبهم الشهرية($1300) وبانحراف معياري قدره($120) وكما اخذت عينة عشوائية مؤلفة من (120) عامل فني في المصانع الحكومية فوجد ان متوسط رواتبهم الشهرية($900) وبانحراف معياري قدره($50).أختبر الفرضية القائلة بان متوسط العمال الفنيين في المصانع الاهلية في الشهر يتجاوز عن($200) من متوسط رواتب العمال الفنيين في المصانع الحكومية عند مستوى معنوية (0.01)

س[17] في دراسة على نسبة غياب العاملين في قطاعين من قطاعات دولة ما وجد ان نسبة الغياب في القطاع (أ) هي 30% في حين ان نسبة الغياب في القطاع (ب) هي 35% .اخذت عينتان من نفس الحجم من القطاعين قوامها (1000) عامل فوجد ان عدد الغائبين في القطاع (أ) هي 350 عامل بينما فوجد ان عدد الغائبين في القطاع (ب) هي 450 عامل. هل يمكن القول بأن نسبة الغياب الحقيقية في القطاعين مختلفة وذلك عند مستوى معنوية (1%)

س[18] في دراسة على خط انتاج ينتج نوعين من الملابس احدهما للأطفال والأخر للشباب ، اخذت عينة عشوائية قوامها (50) من كل خط فكانت نسبة المعيب في خط الاطفال (1%) في حين كانت نسبة المعيب في خط الشباب (1.5%). هل يكمن القول ان نسبة المعيب في خط الاطفال تساوي نسبة المعيب في خط الشباب؟