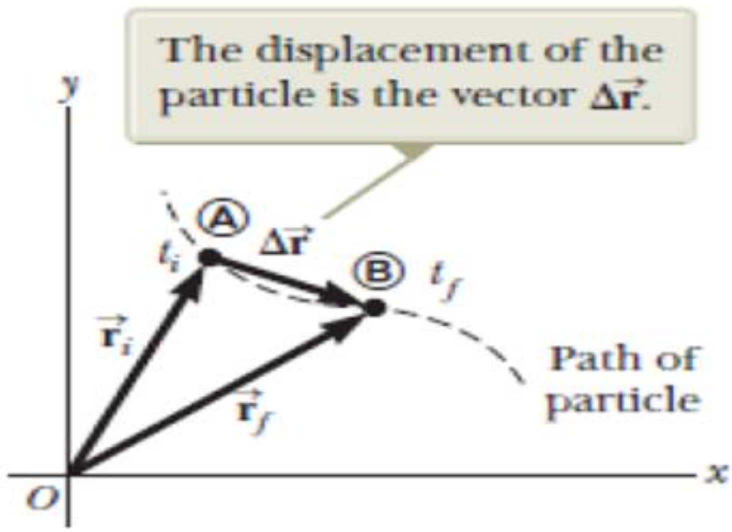
الفصل الثالث — Chapter Three

الحركة بأتجاهين — Motion in two dimension

متجهات الموقع والسرعة والتعجيل : لوصف موقع جسم ما بواسطة متجه الموقع $\vec{r}$ والمحدد كطول من نقطة الاصل O لاحداثيات النظام الى موضع النقطة في المستوي x-y وكما موضح بالشكل التالي .



في الزمن t_i الجسم يتواجد في النقطة A ويوصف بمتجه الموقع $\vec{r}_i$ وبعد مرور زمن t_f فان الجسم يتواجد في النقطة B، علما بان مسار الحركة ليس بالضرورة ان يكون خطا مستقيما . عند حركة الجسم من النقطة A الى النقطة B وخلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_f - t_i$ ، فان متجه الموقع يتغيير من $\vec{r}_i$ الى $\vec{r}_f$.

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \qquad \text{متجه الازاحة}$$

ومن الواضح بان **متجه الازاحة** $\overrightarrow{\Delta r}$ تكون قيمته اقل او اصغر من المسافة التي يقطعها الجسم خلال المسار المنحني .

- يعطى **معدل السرعة** $(\vec{v}_{av})$ للجسيم خلال الفاصلة الزمنية (Δt) من حاصل قسمة إزاحة الجسيم $\Delta\vec{r}$ على الفاصلة الزمنية

$$\vec{v}_{\text{av}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

من المفيد والضروري ان نذكر بان عملية ضرب او قسمة كمية متجهة مع كمية عددية تغير فقط قيمة مقدار المتجه ولاتغير الاتجاه . وعليه فان معدل السرعة هي كمية متجهة باتجاه متجه الازاحة $\overrightarrow{\Delta r}$.

معدل السرعة لجسم ما يتحرك مابين مواقع نقاط لاتعتمد على طبيعة المسار للحركة .

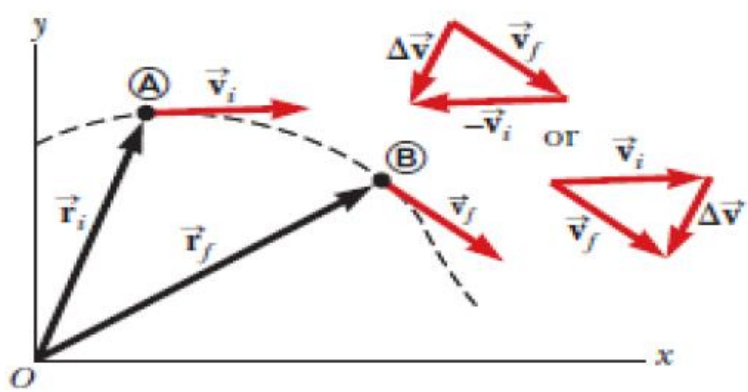
- تُعرف **السرعة الآنية** ($\vec{v}$) بأنها (غاية معدل السرعة $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ عندما تقترب Δt من الصفر):

$$\vec{v} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{السرعة الانية}$$

القيمة العددية لمتجه السرعة الانية $v = |\vec{v}|$ لجسم ما يطلق عليها بالانطلاق speed ويعتبر كمية عددية .

$$\overrightarrow{a_{ave}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \qquad \text{معدل التعجيل (كمية متجهة)}$$

$$\vec{a} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{التعجيل الاني}$$



الحركة في بعدين بتعجيل ثابت Two-Dimensional Motion with Constant Acceleration:

حركة جسم ما باتجاهين (بعدين) بالامكان تمثيلها او وصفها بواسطة حركتين مستقليتين في مستوي الاحداثيات المتعامدة x-y . بعبارة اخرى ، لايوجد تأثير للحركة باتجاه المحور الصادي y على نظيرتها الحركة باتجاه المحور السيني x والعكس صحيحا . متجه الموقع لجسم يتحرك في مستوي الاحداثيات x-y يوصف كمايلي"

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

وان سرعة الجسيم تعطى بالعلاقة:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath}\frac{d\vec{x}}{dt} + \hat{\jmath}\frac{d\vec{y}}{dt} \quad or \ \ \vec{v} = \hat{\imath}\, v_x + \hat{\jmath}\, v_y$$

لتحديد السرعة النهائية عند الزمن t

$$\vec{v}_f = (v_{ix} + a_x \cdot t)\, \hat{\imath} + \left(v_{iy} + a_y \cdot t\right) \hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = \left(v_{ix}\, \hat{\imath} + v_{iy}\, \hat{\jmath}\right) + \left(a_x \hat{\imath} + a_y\, \hat{\jmath}\right) t$$

$$\vec{v}_f = v_i + \vec{a}\, t$$

لتحديد الموقع النهائي للجسم

$$x_f = x_i + v_{ix} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad and \quad y_f = y_i + v_{iy} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

بتعويض علاقتي الموقع الموضحة اعلاه في معادلة متجه الموقع $\vec{r}$ ، نحصل

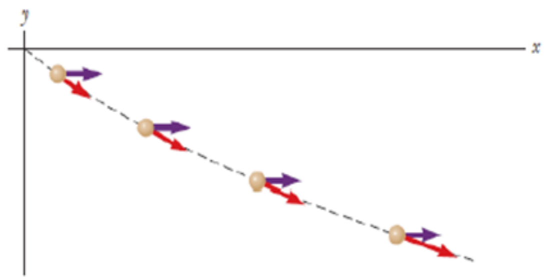
$$\vec{r}_f = \left(x_i + v_{ix} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2\right)\hat{\imath} + \left(y_i + v_{iy} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_f = (x_i\, \hat{\imath} + y_i\, \hat{\jmath}) + \left(v_{ix}\, \hat{\imath} + v_{iy}\, \hat{\jmath}\right) t + \frac{1}{2}\left(a_x\, \hat{\imath} + a_y\, \hat{\jmath}\right) t^2$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i\, t + \frac{1}{2} \vec{a}\, t^2$$

مثال (1) : جسم يتحرك من نقطة الاصل O عند الزمن $t=0$ في مستوي الاحداثيات x-y وبسرعة ابتدائية $v_{xi}=20$ m/sec و $v_{yi}=-15$ m/sec فاكتسب تعجيلا باتجاه محور السيني x-axis قدره $a_x=4$ m/sec^2 .

1- احسب متجه السرعة الكلية عند اية زمن ؟
2- احسب السرعة والانطلاق للجسم عندما t=5 sec والزاوية التي يصنعها متجه السرعة مع المحور x.-
3- احسب موقع الاحداثي x وموقع الاحداثي y للجسم عند اي زمن وحدد متجه الموقع ؟



يتضح من صيغة مركبات السرعة الابتدائية بان الجسم يبدأ بحركته باتجاه اليمين ونحو الاسفل ، مركبة السرعة باتجاه محور السيني x-axis تبدا بمقدار 20 m/s وتزداد بمقدار 4 m/s لكل ثانية . مركبة السرعة باتجاه المحور الصادي y-axis لاتتغيير قيمتها عن القيمة -15 m/s

$$\vec{v}_f = v_i + \vec{a}\, t$$

$$\vec{v}_f = (v_{ix} + a_x \cdot t)\, \hat{\imath} + \left(v_{iy} + a_y \cdot t\right) \hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (20 + 4 \cdot t)\, \hat{\imath} + (-15 + 0 \cdot t)\, \hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (20 + 4 \cdot t)\, \hat{\imath} - 15\, \hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (20 + 4 \cdot 5)\, \hat{\imath} - 15\, \hat{\jmath} = (40\, \hat{\imath} - 15\, \hat{\jmath}) \frac{m}{s}$$

$$\theta = tan^{-1} \frac{v_{yf}}{v_{xf}} = tan^{-1} \frac{-15}{40} = -21^{\circ}$$

$$v_f = \left|\overrightarrow{v_f}\right| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{40^2 + (-15)^2} = 43\ \frac{m}{s}$$

$$x_f = v_{ix} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 = (20\,t + 2\,t^2)\,m$$

$$y_f = v_{iy} \cdot t = (-15\,t)\,m$$

$$\vec{r}_f = \left(x_f\,\hat{\imath} + y_f\,\hat{\jmath}\right) = (20\,t + 2\,t^2)\,\hat{\imath} - 15\,t\,\hat{\jmath}$$

حركة القذائف Projectiles motion :

هي حركة جسم يُقذف في الهواء ويخضع لتأثير قوة الجاذبية الأرضية فقط، مع إهمال مقاومة الهواء

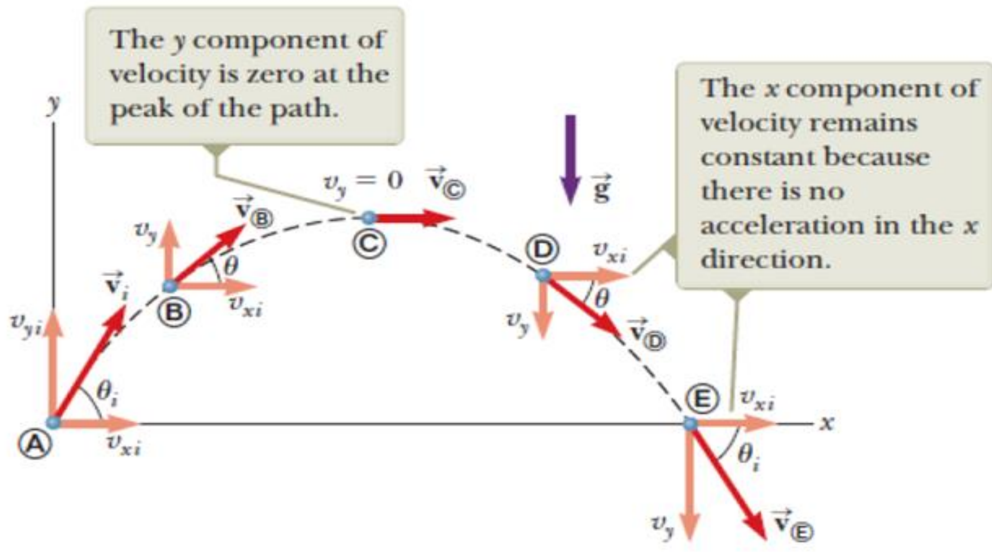
من متابعة مسار حركة كرة البيسبول baseball ، يلاحظ ان مسار الحركة مشابه لمسار حركة القذائف حيث تسلك كرة البيسبول مسارا منحني وبالنهاية ترتطم بالارض . مثل هكذا مسار للكرة او القذيفة عادة مايكون على شكل **قطع مكافيء parabola .**

العلاقة التي تحدد موقع القذيفة كدالة للزمن ممكن استنتاجها من العلاقات السابقة وبدلالة التعجيل الارضي g بدلا من $\vec{a}$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i\,t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

مركبتي سرعة القذيفة باتجاه كلا المحورين هي

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \quad , \quad v_{yi} = v_i \sin\theta_i$$



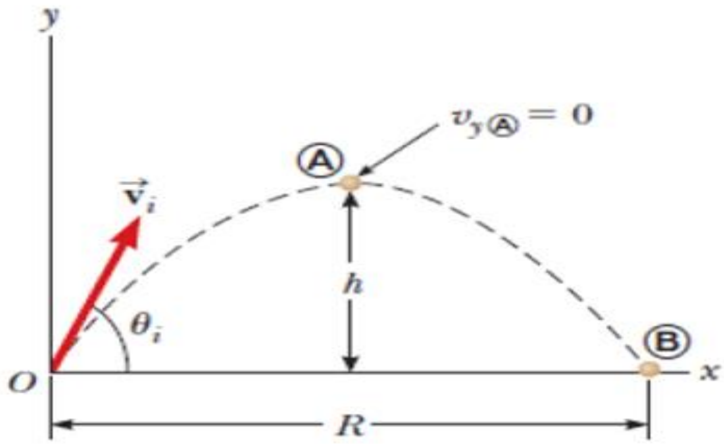
لتحليل حركة القذائف ، من الضروري مراعاة ما يلي:

1- حركة الجسم تحت تأثير سرعة ثابتة باتجاه الافق (المحور السيني x-axis)
2- حركة الجسم تحت تأثير التعجيل الارضي (الجاذبية) الثابت باتجاه العمودي للسقوط الحر
3- مقاومة الهواء مهملة
4- سطح الأرض مستوٍ

المدى الأفقي R وأقصى ارتفاع يصل اليه المقذوف h Horizontal Range and Maximum Height of a Projectile

لنتصور انطلاق قذيفة من وضع السكون او مايسمى نقطة الاصل عند الزمن $t_i=0$ وبسرعة ابتدائية عمودية v_{yi} لتتحرك بمسار منحني ثم تستقر الى مستواها الافقي عند ارتطامها بالارض وهذه الخاصية مشابهة لحركة كرة البيسبول وكرة القدم وكرة الكولف حيث تعود الكرة لمستوي الانطلاق .

لتحديد مقدار قيمة كلا من المدى Range (R) واقصى ارتفاع تصله القذيفة Maximum height (h) بدلالة السرعة الابتدائية والتعجيل وزاوية الانطلاق ، نتبع التحليل الاتي للحركة . عند وصول القذيفة الى اعلى نقطة فان سرعتها العمودية $v_{ya}=0$ لوصولها الى حالة السكون . وعليه تستخدم السرعة العمودية فقط عند حساب الزمن اللازم لوصول القذيفة اعلى نقطة او ماتسمى بالقمة peak .



- نقطة القمة A التي إحداثياتها الكارتيزية $(R/2\,, h)$، هي اعلى ارتفاع يصل له المقذوف.
- النقطة B التي لها إحداثيات $(R, 0)$، هي نقطة هبوط المقذوف.
- تسمى المسافة (R) **المدى الأفقي** للمقذوف، والمسافة (h) هي **أقصى ارتفاع** يصل اليه.

$$\vec{v}_{yf} = v_{yi} + \overrightarrow{a_y}\, t$$

$$0 = v_i \sin\theta_i - \vec{g}\, t_A$$

$$\therefore\ \boldsymbol{t_A = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}}$$

المعادلة اعلاه تحدد الزمن اللازم لوصول القذيفة اعلى ارتفاع . بتعويض معادلة الزمن في معادلة الموقع النهائي والاخذ بنظر الاعتبار ان $y=y_A=h$ ، اخذ بنظر الاعتبار ان المقذوف اطلق من نقطة الأصل (0,0) أي ان $y_i = 0$ وان

$v_{iy} = v_i \sin\theta_i$ ، واستبدال a_y بـ g نحصل على معادلة لـلارتفاع h بحدود مقدار واتجاه متجه السرعة الأولي كما يلي:

$$\vec{y}_f = y_i + \vec{v}_{iy}\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$$

$$h = 0 + v_i \sin\theta_i \cdot \left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \left(\frac{{v_i}^2 \sin^2\theta_i}{g}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{{v_i}^2 \sin^2\theta_i}{g}\right)$$

$$\boldsymbol{h = \left(\frac{{v_i}^2 \sin^2\theta_i}{2g}\right)}$$ اقصى ارتفاع للقذيفة

لتحديد المدى R الذي يمثل المسافة الافقية التي تقطعها القذيفة بزمن يعادل ضعف (مرتين) لزمن وصول القذيفة لاعلى نقطة (القمة) . **$t_B = 2\ t_A$**. (الزمن الكلي يساوي زمن الصعود و زمن النزول) بتعويض معادلة $t_B = 2t_A$ بدل t في المركبة x من المعادلة $(x = x_{ix} + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2)$ واستبدال x التي تساوي R المدى يصل له المقذوف ، واخذ بنظر الاعتبار ان المقذوف اطلق من نقطة الأصل (0,0) أي ان $x_{ix} = 0$ وان $v_{ix} = v_i \cos\theta_i$ ، واستبدال $a_x = 0$ نحصل على معادلة R كما يلي:

باستخدام معادلة البعد او الموقع النهائي الافقي واعتبار

$$v_{xi} = v_{xB} = v_i \cos\theta_i\ ,\quad x_B = R \quad at \quad t = 2t_A$$

$$x_f = x_i + v_{ix}\cdot t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$R = 0 + v_{ix}\cdot t_B + 0 = v_{ix}\cdot t_B = (v_i \cos\theta_i)(2t_A)$$

$$R = (v_i \cos\theta_i)\cdot\left(\frac{2v_i \sin\theta_i}{g}\right) = \frac{2{v_i}^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{R = \frac{2{v_i}^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}}$$

باستخدام المتطابقة الهندسية الرياضية $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ ، تصبح معادلة حساب **المدى الافقي للمقذوف**

$$\boldsymbol{R = \frac{{v_i}^2 \sin 2\theta_i}{g}}$$

اعظم قيمة للمدى ، نحصل عليها عندما تكون الزاوية او $\sin 2\theta_i = 1 \rightarrow\rightarrow 2\theta = 90$ ، $\theta = 45^\circ$

$$\boldsymbol{R_{max} = \frac{{v_i}^2}{g}}$$

<u>مثال (2)</u> : رياضي القفز الطويل ، يقفز بزاوية قدرها 20 درجة فوق مستوى سطح الارض وبانطلاق قدره 11 m/s . احسب البعد او المسافة التي قطعها الرياضي (المدى) . ماقصى ارتفاع يصله الرياضي ؟

$$R = \frac{{v_i}^2 \, sin\, 2\theta_i}{g} = \frac{11^2 \sin{(2*20)}}{9.8} = 7.94\, m$$

$$h = \left(\frac{{v_i}^2 \, sin^2\, \theta_i}{2g}\right) = \frac{11^2 \, sin^2\,(20)}{2\cdot(9.8)} = 0.722\, m$$

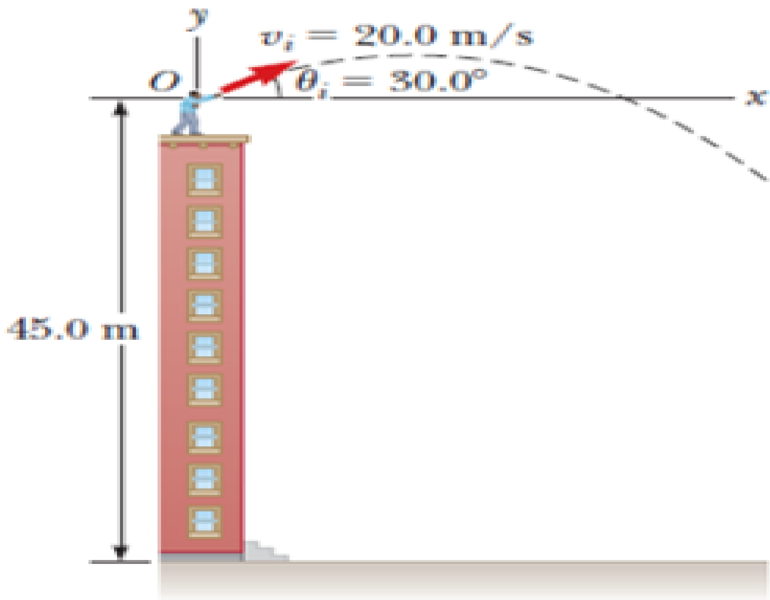
<u>مثال (3)</u> : قُذف جسم بسرعة 20 *m/s* بزاوية 30° مع الأفق. أوجد:

1. **أقصى ارتفاع** ***Ans: 5.1 m***
2. **الزمن الكلي** ***Ans: 2.04 sec***
3. **المدى الأفقي** ***Ans: 35.35 m***

<u>مثال (4)</u> : قذف حجر من اعلى بناية نحو الاعلى وبزاوية قدرها 30 درجة مع الافق وبسرعة ابتدائية 20 m/s . علما ان ارتفاع البناية عن سطح الارض 45 m . احسب

1- الفترة الزمنية التي يستغرقها الحجر لوصوله سطح الارض ؟

2- سرعة او انطلاق الحجر قبل بلوغه سطح الارض ؟



من المعطيات في المسالة $y_f=-45$ m , $x_i=y_i=0$ وايضا $v_i=20$ m/s , $a_y=-g$

- مركبتي السرعة الابتدائية للحجر

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = 20\cos 30 = 17.3\, m/s \quad , \quad v_{yi} = v_i \sin\theta_i = 20 \sin 30 = 10\, m/s$$

- من معادلة الموقع العمودي

$$\vec{y}_f = y_i + \vec{v}_{iy}\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2 = 0 + 10\, t + \frac{1}{2}(-9.8)\, t^2$$

$$-45 = 10\, t + \frac{1}{2}(-9.80)t^2$$

$$\therefore t = 4.22\, sec$$

$$\vec{v}_{yf} = v_{yi} + \vec{a_y}\, t = 10 + (-9.8)(4.22) = -31.3\frac{m}{s}$$

لاستخراج الزمن نستخدم طريقة التجربة

$-4.9t^2+10t+45=0$

Multiply by (-1) $\quad 4.9t^2-10t-45=0$

Factor the equation: $(t-4.22)(4.9t+10.66)=0$

Solve for $t-4.22=0 \Rightarrow t=4.22$

$4.9t+10.66=0 \Rightarrow \quad t=-2.176$ (it is neglected), so the solution is: $t=4.22$

او بطريقة الدستور:

-4.9*t^2 + 10*t + 45 = 0

where a = -4.9, b = 10, and c = 45

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-4.9)(45)}}{2(-4.9)}$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{982}}{-9.8} \qquad either \quad t = \frac{-10 + \sqrt{982}}{-9.8} \qquad or \quad t = \frac{-10 - \sqrt{982}}{-9.8}$$

$$either \quad t = \frac{-10 + 31.336}{-9.8} \qquad or \quad t = \frac{-10 - 31.336}{-9.8}$$

either t =-2.177 or t=4.218 sec

t=−2.176 (it is neglected), so the solution is: t=4.22 sec