الفصل الخامس

Chapter five

الحركة الدائرية المنتظمة Uniform circular motion

الحركة الدائرية المنتظمة لجسم:

هي حركة جسم على مسار دائري بنصف قطر ثابت بسرعة مقدارها ثابت، ولكن اتجاه السرعة يتغير باستمرار

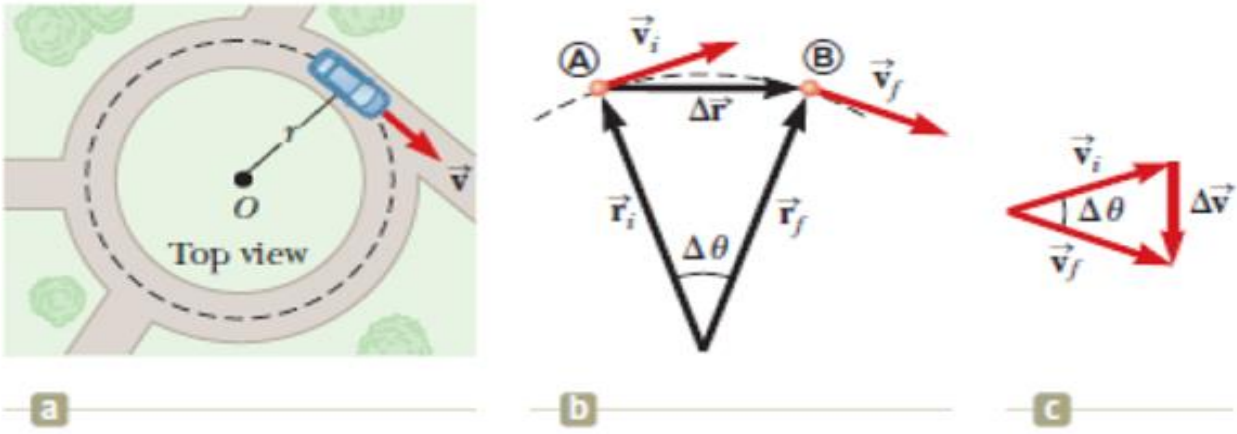
لنتصور حركة عجلة سيارة في مسار دائري **وبانطلاق v (speed) ثابت** وعليه يطلق تسمية الحركة الدائرية المنتظمة. ولابد من توضيح ان في حالة الحركة الدائرية المنتظمة لجسم ما فانه يمتلك تعجيل وكما موضح ادناه ، من معادلة التعجيل التالية

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ويتضح لنا ان التعجيل يعتمد على التغيير في السرعة . ولما كانت السرعة كمية متجهة فعليه ان التعجيل ممكن ان يحدث بالطريقتين التاليتين:

1- التغيير بمقدار السرعة 2- التغيير باتجاه السرعة

القيمة الثابتة لمتجه السرعة عادة تكون **مماسية tangent** لمسار حركة الجسم وتكون عمودية على نصف قطر دائرة المسار. **وللحركة الدائرية المنتظمة** فان متجه التعجيل يمتلك **فقط** مركبة عمودية على مسار الحركة وباتجه مركز الدائرة .



من الشكل اعلاه ، بالامكان ان نجد او نحدد قيمة او مقدار التعجيل للجسم. من الشكل (b) ، الزاوية $\Delta\theta$ مابين متجهي الموقع $(\vec{r}_i$ ، $\vec{r}_f)$ هي نفسها الزاوية $\Delta\theta$ مابين متجهي السرعة$(\vec{v}_i$ ، $\vec{v}_f)$ في الشكل (c) وذلك بسبب ان متجه السرعة عادة عمودي على متجه الموقع $\vec{r}$. وعليه فان كلا **المثلثين متشابهين** (اذا تساوت الزواية مابين ضلعي مثلثين وتساوت النسبة مابين ضلعي المثلثين فعليه ان كلا المثلثيين متشاهيين) . بامكاننا الان ان نكتب علاقة رياضية مابين اطوال كلا الضلعين في المثلثين .

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

حيث $v_i = v_f = v$ وكذلك $r_i = r_f = r$

قيمة معدل التعجيل خلال فترة الزمنية لحركة الجسم من النقطة A الى النقطة B ، تعطى بالعلاقة التالية

$$|\overrightarrow{a_{avg}}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

من المعلوم ان كلما اقتربت النقطة A من النقطة B فان عامل الزمن Δt يقترب من الصفر، والمقدار $|\Delta\vec{r}|$ يقترب من المسافة التي يقطعها الجسم على طول المسار الدائري . وعليه فان النسبة $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ تقترب من قيمة الانطلاق speed . بالاضافة الى ان معدل التعجيل يصبح بمثابة التعجيل الاني instantaneous acceleration عند النقطة A . وعليه فبحدود اقتراب $\Delta t \to 0$ ، فقيمة التعجيل تعطى بالعلاقة التالية

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad \textbf{centripetal acceleration}$$ التعجيل المركزي ..... (1)

التعجيل اعلاه يطلق عليه تسمية التعجيل المركزي وبسبب ان التعجيل موجه باتجاه مركز الدائرة وعمودي على متجه السرعة $\vec{v}$. في اغلب الحالات ، من المناسب ان نوصف حركة الجسم يتحرك بانطلاق ثابت على مسار دائرة نصف قطرها r بدلالة زمن الدورة T والذي يعرف (الفترة الزمنية اللازمة لدورة كاملة) ، حيث ان الجسم سيتحرك خلال هذه الدورة الكاملة مسافة قدرها محيط الدائرة $2\pi r$. بسبب ان انطلاق الجسم يساوي المسافة المقطوعة (محيط الدائرة) مقسومة على زمن الدورة ، اي $v = \frac{2\pi r}{T}$ ، وعليه فان زمن الدورة الكاملة يعطى بالعلاقة التالية

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \quad v = \frac{2\pi r}{T} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

مثال (1): احسب قيمة التعجيل المركزي للارض عندما تدور او تتحرك بمدارها orbit ماحول الشمس .

باستخدم المعادلتين (1)و(2) ، نحصل

$$a = \frac{\frac{(2\pi r)^2}{T^2}}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

ومن المعروف ان زمن دوران الارض حول الشمس هو سنة واحدة 1 year ونصف قطر مدار الارض حول الشمس يساوي $r = 1.496 \times 10^{11}$ m

$$a = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\, m)}{1\ yr} = 5.93 \times 10^{-3} m/s^2$$

حيث تم تحويل عاما الزمن من وحدات سنين الى وحدات ثانية وكما يلي $1yr = 3.156 \times 10^7$ s حيث

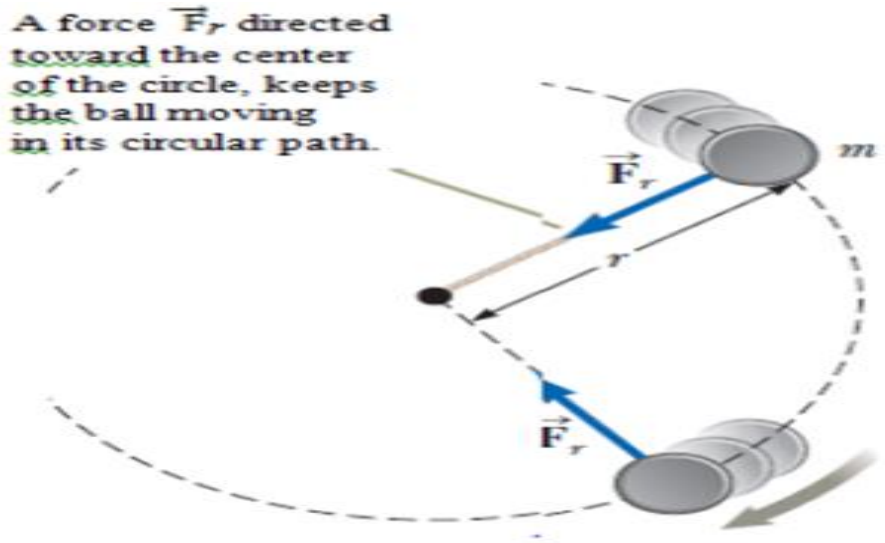
$$1yr = 365\ days \times 24\ hrs \times 60\ min \times 60\ sec = 3.156 \times 10^7 \text{ s}$$

- الان ، لنتصوران كرة كتلتها m مربوطة بخيط string طوله r وتتحرك الكرة بانطلاق ثابت constant speed في مسار دائرة افقية .

حسب قانون نيوتن الاول ، الكرة تتحرك على طول خط مستقيم عندما لايوجد قوة مسلطة عليها ، بينما الخيط يحاول ممانعة الحركة بخط مستقيم من خلال تسليط قوة نصف قطرية radial force $\vec{F}$ على الكرة تحاول ابقاء الكرة بالحركة الدائرية، وهذه القوة موجهه على طول الخيط وباتجاه مركز الدائرة. عند تطبيق قانون نيوتن الثاني باتجاه نصف القطر، فصافي القوة المحدثة او المسببة للتعجيل المركزي ممكن ان ترتبط مع التعجيل كمايلي:

$$\sum \boldsymbol{F = ma_c = m\frac{v^2}{r}} \quad \text{القوة المركزية} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

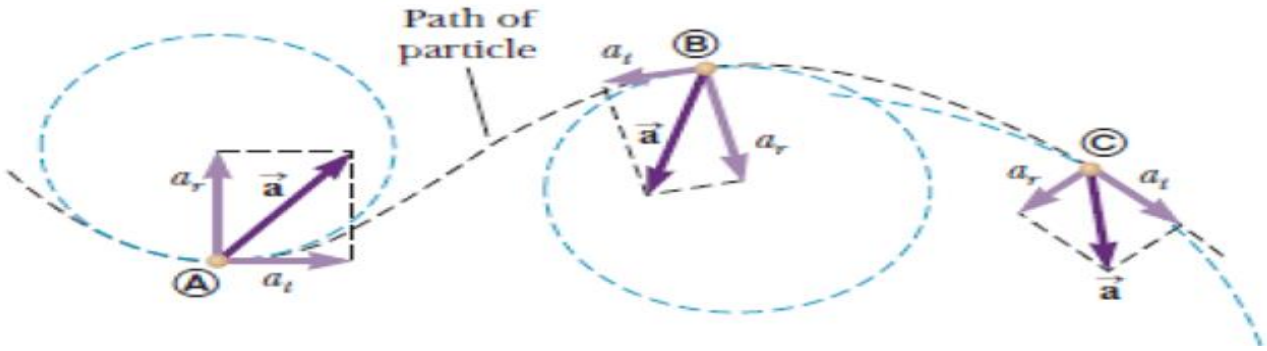
هذه القوة تحدث او تنشأ تعجيل مركزي يعمل باتجاه مركز المسار للدائرة وينتج عنه تغيير باتجاه متجه السرعة. وعندما تتلاشى هذه القوة ، فان الجسم سيستمر بالحركة في المسار الدائري ، بدلا من ذلك المسار على خط مستقيم مماسي للمسار الدائري ، وكما موضح بالشكل التالي.



قيمة او مقدار القوة المركزية اللازمة لادامة الجسم بالحركة على مسار دائري تعتمد على **كتلة الجسم** و**تعجيله**.

التعجيل المماسي والتعجيل نصف القطري Tangential and Radial acceleration

لنتصور الحركة العامة لجسم ما على طول مسار منحني والمتمثلة بحركة جسم نحو اليمين على طول مسار منحني وسرعة الجسم تتغيير **بالاتجاه وبالمقدار**. في هذه الحالة، فان متجه السرعة عادة مايكون مماسا لمسار الحركة وتعجيل الجسم $\vec{a}$. اتجاه متجه التعجيل الكلي $\vec{a}$ يتغيير من نقطة لاخرى ، حيث في اية لحظة زمنية فان متجه التعجيل الكلي يتحلل الى مركبتين وكما موضح بالشكل التالي.



بالاعتماد على نقطة اصل في مركز الدائرة المنقطة وفي لحظة زمنية معينة . تكون هناك مركبتان:
المركبة القطرية a_r على طول نصف قطر الدائرة و**المركبة المماسية** a_t العمودية على نصف القطر.
متجه التعجيل الكلي $\vec{a}$ يكتب كحاصل جمع اتجاهي لكلا المركبتين القطرية والمماسية وكمايلي:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_t} \qquad Total\ acceleration$$ التعجيل الكلي ... ... (4)

المركبة المماسية للتعجيل تسبب او تنشأ تغيير في انطلاق الجسم speed وهذه المركبة المماسية موازية للسرعة الانية وقيمتها يحدد كمايلي:

$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right| \quad \textbf{Tangential acceleration}$$ التعجيل المماسي ... ... (5)

مركبة التعجيل القطرية تتولد من التغيير في اتجاه متجه السرعة وتحدد كمايلي:

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \quad \textbf{Radial acceleration}$$ التعجيل القطري ... ... (6)

حيث r يمثل نصف قطر منحني المسار (التحدب او التقعر)
الاشارة السالبة في معادلة (6) ، تؤشر او تبين ان اتجاه التعجيل المركزي هو باتجاه مركز الدائرة والمتمثل بنصف قطر الدائرة. وهذا الاتجاه معاكس لاتجاه موضع الجسم $\vec{r}$ والذي عادة مايكون باتجاه بعيدا عن نقطة الاصل في مركز الدائرة.
بسبب ان كلا المركبتين $\overrightarrow{a_r}, \overrightarrow{a_t}$ متعامدتان ، فعليه يكون قيمة او مقدار التعجيل الكلي $\vec{a}$ ، يحسب كمايلي:

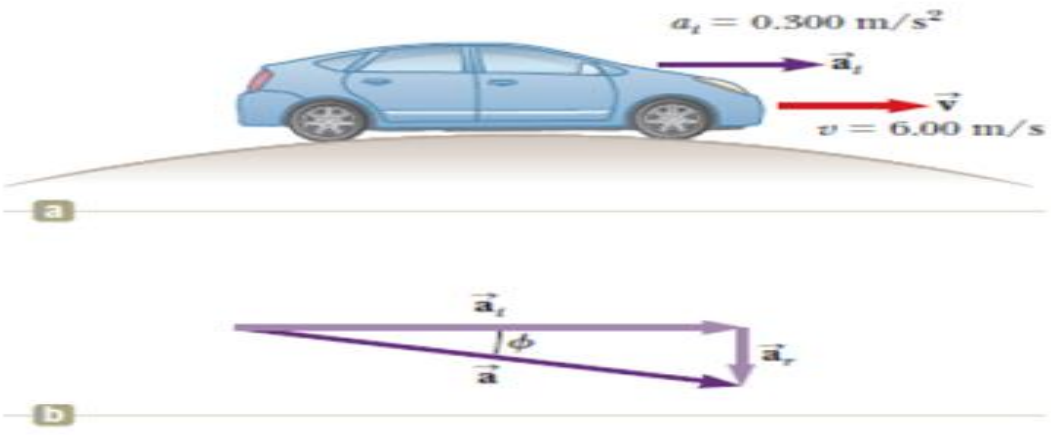
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

عند قيمة معينة لانطلاق الجسم ، وعندما يكون نصف قطر التقوس لمنحني المسار صغير، يكون التعجيل القطري a_r اكبر من التعجيل المماسي وكما موضح بالنقطة A والنقطة B في الشكل اعلاه. والعكس صحيح ، يكون قيمة التعجيل القطري a_r اقل من التعجيل المماسي عندما يكون نصف قطر التقوس لمنحني المسار واسع او كبير وكما موضح بالنقطة C .

اتجاه التعجيل المماسي، اما ان يكون بنفس اتجاه السرعة $\vec{v}$ (في حالة السرعة المتزايدة للجسم) كما في الشكل A او ان يكون معاكس لاتجاه السرعة $\vec{v}$ (في حالة السرعة المتناقصة للجسم) وكما هو الحال عند النقطة B .

في الحركة الدائرية المنتظمة uniform circular motion، حيث تكون سرعة الجسم v ثابتة ، فعليه يكون التعجيل المماسي $a_t = 0$ وتعجيل الجسم هو فقط التعجيل القطري a_r . بمعنى اخر، الحركة الدائرية المنتظمة هي حالة خاصة من الحركة على مسار منحني .

<u>مثال (2):</u> عجلة سيارة تتحرك بتعجيل ثابت قدره $0.3\ m/s^2$ بصورة موازية للطريق . وتجتاز طريق مرتفع وتصل الى قمة الطريق وكانه مسار دائرة نصف قطرها $500\ m$. في اللحظة التي تكون العجلة في قمة الارتفاع، تكون متجه السرعة يكون افقيا وقيمتها $6\ m/s$. احسب مقدار واتجاه متحه التعجيل الكلي عند تلك اللحظة؟



بسبب ان عجلة السيارة تتسارع على مسار طريق منحني، لذا فان العجلة تمتلك كلا من التعجيل القطري والتعجيل المماسي متجه التعجيل القطري موجه باتجاه الاسفل ومتجه التعجيل المماسي موجه نحو الافق ويمتلك قيمة قدرها $0.3\ m/s^2$. التعجيل القطري يعطى بالعلاقة التالية:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6)^2}{500} = -0.072\ \frac{m}{s^2}$$

التعجيل الكلي $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072)^2 + (0.3)^2} = 0.309\ m/s^2$

اتجاه التعجيل الكلي يحدد من العلاقة التالية :

$$\emptyset = tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = tan^{-1}\frac{(-0.072)}{(0.3)} = tan^{-1}(-0.24) = -13^{\circ}.5$$

مثال (3): عجلة سيارة تتحرك بتعجيل ثابت قدره 0.5 m/s2 بصورة موازية للطريق . وتجتاز طريق مرتفع وتصل الى قمة الطريق وكانه مسار دائرة نصف قطرها 500 m . في اللحظة التي تكون العجلة في قمة الارتفاع، تكون متجه السرعة يكون افقيا وقيمتها 8 m/s . احسب مقدار واتجاه متحه التعجيل الكلي عند تلك اللحظة؟

Ans:

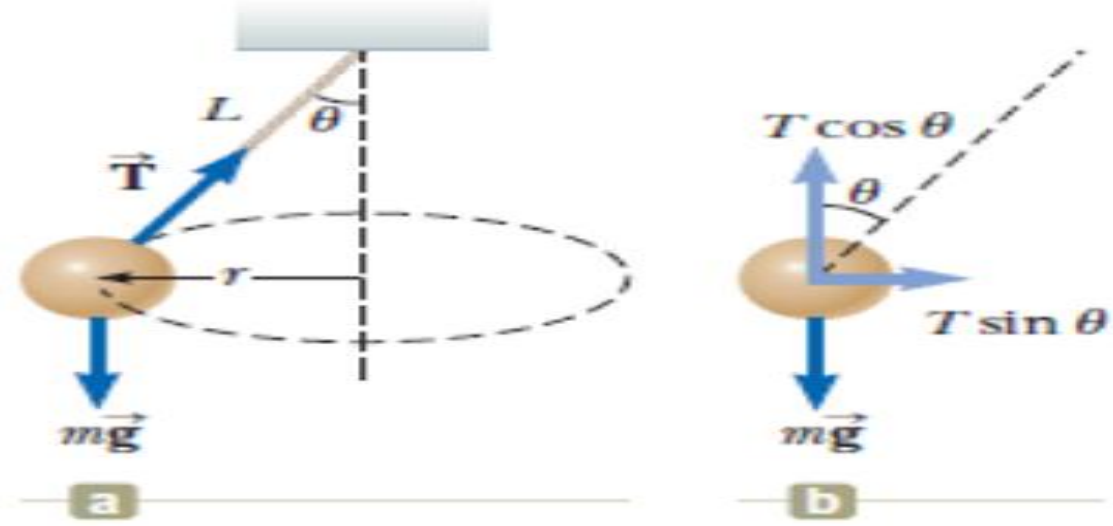
$a_r = -0.128\ \frac{m}{s^2}$

التعجيل الكلي $a = 0.516\ m/s^2$

اتجاه التعجيل الكلي

$\emptyset = -14.3$

مثال (4): كرة صغيرة كتلتها m معلقة بخيط طوله L . الكرة تدور بسرعة ثابتة v في مسار دائرة افقية نصف قطرها r وكما موضح بالشكل. جد علاقة لحساب السرعة؟



نفترض θ تمثل الزاوية مابين الخيط والعمود. قوة الشد $\vec{T}$ المسلطة بواسطة الخيط على الكرة تتحلل الى مركبتين، احدهما عمودية $(T\cos\theta)$ والاخرى افقية $(T\sin\theta)$ ، تعمل باتجاه مركز المسار الدائري.
نطبق قانون توازن او تعادل الجسم(الكرة) بالاتجاه العمودي

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow T\cos\theta = mg \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

باستخدام قانون القوى بالاتجاه الافقي

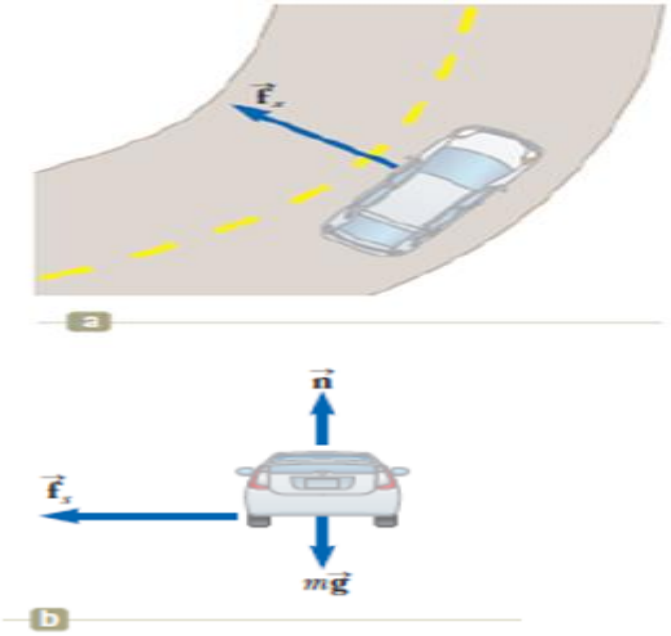
$$\sum F_x = T\sin\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) واعتبار ان $\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{rg} \rightarrow\rightarrow\rightarrow v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

بالاستفادة من العلاقة $r = L\sin\theta$ ، نحصل على $v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$
ملاحظة: من علاقة السرعة اعلاه، يتبين ان السرعة لاتعتمد على كتلة الجسم (الكرة).

مثال(5): عجلة سيارة تتحرك على طريق مستوي افقي وبمسار منحني كما موضح بالشكل التالي. اذا كان نصف قطر منحني المسار 25 m ومعامل الاحتكاك المستقر مابين اطارات العجلة والرصيف للشارع هو 0.523 . حدد اقصى سرعة ممكن ان تسير بها العجلة وتبقى محافظة على الدوران بسلامة؟



لنتصور ان المسار المنحني للطريق هو جزء من دائرة كبيرة وعليه فان العجلة تتحرك بمسار دائري.
القوة التي تمكن العجلة بالمحافظة على مسارها الدائري هي قوة الاحتكاك المستقرة السكوني وذلك لعدم حدوث انزلاق عند نقطة تماس الاطارات مع حافة الطريق. اعظم سرعة للعجلة v_{max} تدور بها ماحول المسار المنحني هي تلك السرعة عندما تكون العجلة عند حافة الطريق للانزلاق نحو الخارج. وعند هذه النقطة تكون قوة الاحتكاك تمتلك اعظم قيمة

$$f_{s,max} = \mu_s n$$

$$f_{s,max} = \mu_s n = m\frac{v^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sum F_y = n - mg = 0 \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow n = mg$$

من المعادلة (1) ، نحصل على قيمة اعظم سرعة للعجلة

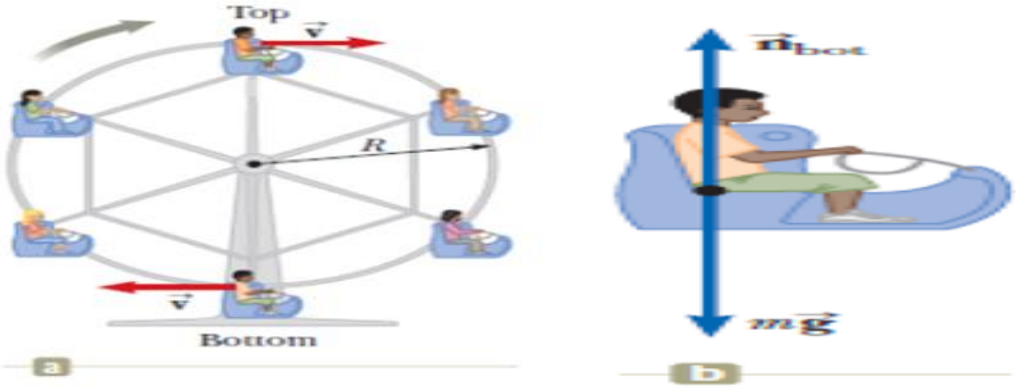
$$v_{max} = \sqrt{\frac{\mu_s n\, r}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s mg\, r}{m}} = \sqrt{\mu_s\, g\, r} = \sqrt{(0.523)\left(\frac{9.8m}{s^2}\right)(35m)} = 13.4\frac{m}{s}$$

يتضح من المعادلة اعلاه، ن اعظم سرعة للعجلة لاتعتمد على كتلة العجلة.

مثال (6): طفل كتلته m راكب عجلة دولاب هوائي وكما موضح بالشكل التالي. الطفل يتحرك ضمن دائرة عمودية نصف قطرها 10 m وبانطلاق ثابت قدره 3 m/s .

1- احسب القوة المسلطة من مقعد الجلوس على الطفل عند اسفل نقطة للجولة؟

2- احسب القوة المسلطة من مقعد الجلوس على الطفل عند اعلى نقطة للجولة؟



من الشكل (b) يتضح لنا ان القوى المؤثرة على الطفل هي قوة الجاذبية الارضية ونحو الاسفل $\overrightarrow{F} = mg$ وقوة نحو

الاعلى $\overrightarrow{n_{bot}}$ المسلطة من المقعد على الطفل. محصلة القوى العمودية هي كمايلي:

$$\sum F = n_{bot} - \mathrm{mg} = ma_c = \mathrm{m}\frac{v^2}{r}$$

$$n_{bot} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg + m\frac{gv^2}{gr} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

$$n_{bot} = mg\left[1 + \frac{\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{(10\ m)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)}\right] = 1.09\ mg$$

من النتيجة اعلاه، يتضح ان القوة المسلطة من المقعد على الطفل اكبر من قوة وزن الطفل (mg) بالعامل 1.09 .

الشكل (c) التالي يوضح القوى المؤثرة على الطفل في موضع اعلى الرحلة

محصلة القوى نحو الاسفل التي تنتج تعجلا مركزيا هي $mg - \overrightarrow{n_{top}}$

$$\sum F = mg - n_{top} = m\frac{v^2}{r}$$

$$n_{top} = mg - m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 - \frac{v^2}{rg}\right)$$

$$n_{top} = mg\left[1 - \frac{\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{(10\ m)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)}\right] = 0.908\ mg$$

في الحالة اعلاه، يتضح لنا ان مقدار القوة المسلطة من المقعد على الطفل اقل من الوزن الحقيقي للطفل mg بالعامل 0.908 . وعندها الطفل يشعر بوزن خفيف .

الجاذبية Gravitation

قانون نيوتن العام للجاذبية Newton's law of universal gravitation

كل جسم بالطبيعة يتجاذب مع الاجسام الاخرى بقوة تتناسب طرديا مع حاصل ضرب كتلتي الجسمين وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة الفاصلة مابين الجسمين.

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7) \qquad Gravitation\ force \text{ قوة الجاذبية}$$

حيث G ، ثابت يطلق عليهب ثابت الجذب العام Universal gravitational constant وقيمته تساوي

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg$$

تعجيل الاجسام السقوط الحر وقوة الجاذبية Free-Fall acceleration and gravitational force

مقدار قوة الجاذبية على جسم بالقرب من سطح الارض يطلق عليها تسمية " وزن الجسم" weight

$$mg = G\frac{M_E m}{R_E^2} \rightarrow\rightarrow\rightarrow g = G\frac{M_E}{R_E^2} \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

حيث M_E :تمثل كتلة الارض و R_E : يمثل نصف قطر الارض.

من المعادلة (8) اعلاه، نلاحظ ان تعجيل السقوط الحر g ثابت بالقرب من سطح الارض بسبب ان الكميات الاخرى بالمعادلة هي كميات ثابتة.

مثال (7): اذا علمت ان سطح الارض يبتعد بمسافة قدرها تقريبا 6400 km عن مركزها. وكتلة الارض هي بحدود $6x10^{24}$ kg . مامقدار تعجيل الجاذبية g بالقرب من سطح الارض؟

$$g = G\frac{M_E}{R_E^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(6.4 \times 10^6)^2} = 9.8\ m/s^2$$

الان، لنتصور وجود جسم كتلته m على مسافة ارتفاع قدرها h فوق مستوى سطح الارض او مسافة قدرها r عن مركز الارض $r = R_E + h$. قيمة او مقدار قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_g = G\frac{M_E m}{r^2} = G\frac{M_E m}{(R_E + h)^2}$$

مقدار قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم عند هذا الموضع او الموقع هي ايضا $F_g = mg$ ، حيث g يمثل قيمة التعجيل للسقوط الحر من على ارتفاع او الاتساع h . بتعويض قيمة هذه القوة في المعادلة اعلاه ، نحصل على علاقة لحساب التعجيل للسقوط الحر.

$$g = G\frac{M_E}{r^2} = G\frac{M_E}{(R_E + h)^2} \quad variation\ og\ g\ with\ altitude$$ تغيير التعجيل مع الاتساع

الفصل السادس Chapter Six

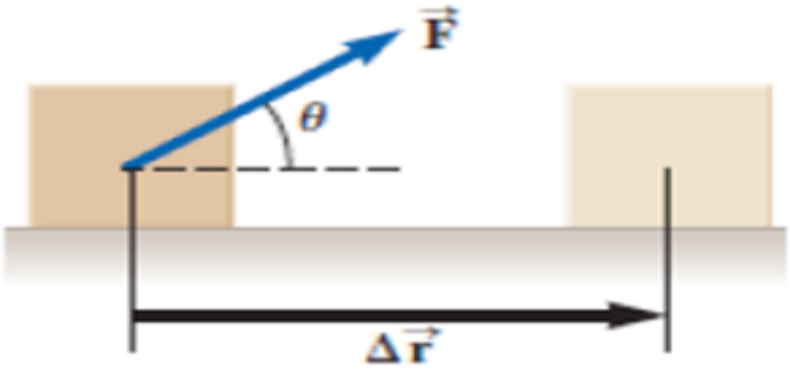
الشغل والطاقة Work and Energy

الشغل المنجز بواسطة قوة ثابتة Work done by a constant force: الشغل المنجز على نظام system بواسطة تسليط قوة عليه هو (حاصل ضرب مقدار القوة F بمقدار الازاحة عن موضعه وبالعامل $\cos\theta$) حيث θ هي الزاوية مابين متجهي القوة والازاحة .

$$W = F\,\Delta r\cos\theta \ldots\ldots\ldots (1) \quad work\ done\ by\ a\ constant\ force$$

- **W** هو الشغل (بوحدة الجول J).
- **F** هو مقدار القوة الثابتة (بوحدة النيوتن N).
- Δr هو مقدار الإزاحة (بوحدة المتر m).
- **θ** هي الزاوية بين اتجاه القوة واتجاه الإزاحة

الشغل المنجز،كمية عددية scaler بالرغم من انه حاصل ضرب كميتين متجهتين (القوة $\vec{F}$ والازاحة $\overrightarrow{\Delta r}$) . في حالة ان القوة المسلطة على النظام او الجسم لاتزيح النظام عن موضع الاستقرار($\Delta r = 0$) فعندها لاينجز شغل على النظام وتكون قيمة الشغل مساوية للصفر W=0 . وعليه من الممكن استنتاج ان في حالة الشغل المنجز على النظام مساويا للصفر،عندها تكون القوة المسلطة على النظام عمودية على الازاحة من نقطة التسليط. وهذا يعني ان الزاوية $\theta = 90^\circ$ وعليه فان الشغل W=0 لان $\cos 90 = 0$.



اشارة الشغل تعتمد على اتجاه القوة $\vec{F}$ المسلطة بالنسبة للازاحة $\overrightarrow{\Delta r}$ ، حيث يكون الشغل المنجزموجب عندما يكون مسقط متجه القوة $\vec{F}$ (projection) على متجه الازاحة في نفس اتجاه الازاحة. فمثلا عندما يرفع جسم نحو الاعلى فان الشغل المنجز يكون موجبا لان اتجاه القوة المسلطة على الجسم نحو الاعلى ،اي بنفس اتجاه الازاحة عن موضعه.

عندما يكون مسقط القوة $\vec{F}$ باتجاه معاكس للازاحة، عندها يكون الشغل سالبا ،فمثلا عندما يرفع جسم نحو الاعلى فالشغل المنجز من قوة الجاذبية الارضية على الجسم يكون سالبا لان اتجاه قوة الجاذبية للاسفل والازاحة للاعلى.

اذا كانت القوة المسلطة $\vec{F}$ بنفس اتجاه الازاحة $\overrightarrow{\Delta r}$ ،عندها تكون الزاوية $\theta = 0^\circ$ و $\cos 0 = 1$ وعليه فمعادلة (1) الشغل السابقة تصبح $W = F\,\Delta r$.

وحدة قياس الشغل ناتجة من حاصل ضرب وحدة قياس القوة في وحدة قياس الازاحة (نيوتنxمتر)(N.m) ويطلق عليها تسمية جول (Joule J). حيث $J = N.m = kg.m^2/s^2$

الشغل يعني انتقال بالطاقة energy transfer ، حيث اذا كان الشغل ينجز على النظام وقيمته موجبة فهذا يعني ان الطاقة تنتقل من المحيط الى النظام ، بينما اذا كان الشغل قيمته سالبة فيعني ان الطاقة تنتقل من النظام للمحيط.

مثال:

عندما تسحب صندوقًا على أرض أفقية بقوة ثابتة مقدارها 10 نيوتن لمسافة 5 أمتار، وفي نفس اتجاه الحركة

$(\theta=0, \cos0=1)$

فإن الشغل يكون:

$$\mathbf{W = 10\ N \times 5\ m \times 1 = 50\ J}$$

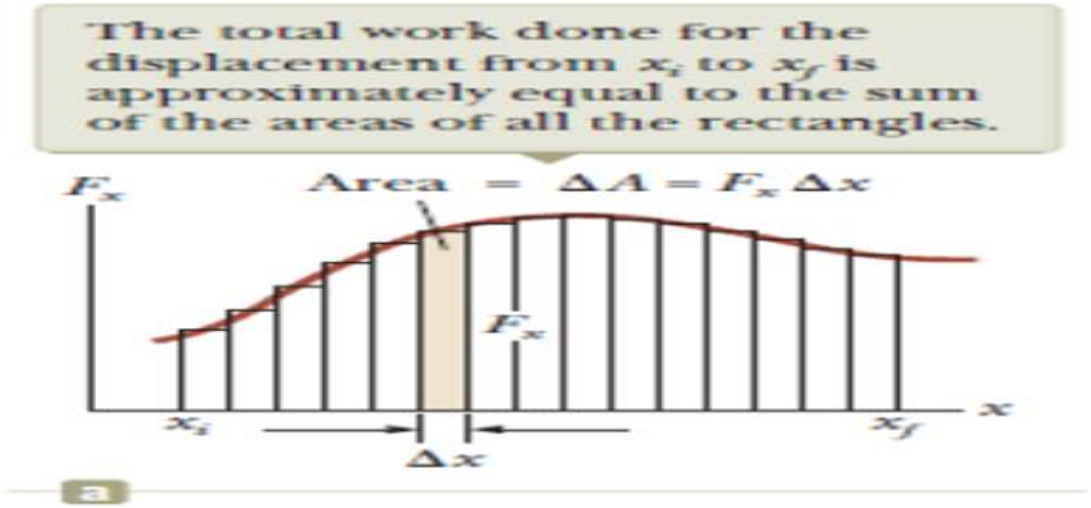
الشغل المنجز بواسطة قوة متغيرة Work done by a varying force:

في هذه الحالة، تتغير القوة المؤثرة أثناء حركة الجسم. قد يتغير **مقدارها** أو **اتجاهها** أو كليهما مع تغير موقع الجسم أو الزمن.

لنتصور ازاحة جسم ما على طول المحور السيني وبتأثير قوة تتغير مع الموضع. لنفترض الجسم ازيح باتجاه المحور السيني الموجب من الموضع $x = x_i \; to \; x = x_f$. على اية حال، لايمكن استخدام العلاقة $W = F\,\Delta r\cos\theta$ لحساب قيمة الشغل المنجز بواسطة القوة $\vec{F}$ وذلك بسبب ان العلاقة اعلاه تستخدم فقط في حالة القوة الثابتة بالمقدار والاتجاه. مع ماتقدم من توضيح ، واذا افترض ان الجسم ازيح ازاحة صغيرة جدا Δx ، فمركبة القوة F_x تقريبا تكون ثابتة خلال هذه الازاحة الضئيلة. وعليه يمكن تقدير الشغل المنجزمن هذه القوة على الجسم بالعلاقة التالية:

$$W \approx F_x \Delta x$$

قيمة الشغل اعلاه ، ممكن تمثيلها بمساحة المستطيل المضللة الموضح بالشكل التالي:



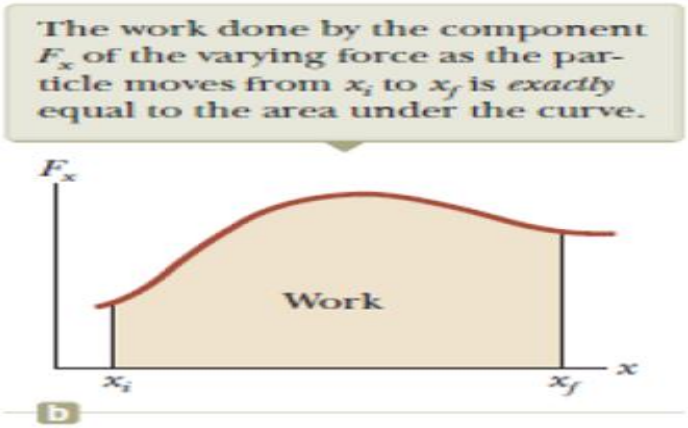
اذا تصورنا ان مستوي احداثيات القوة F_x مع البعد x مقسم الى عدد كبير من الشرائح slabs، فعليه ان قيمة الشغل الكلي المنجزلازاحة الجسم من الموضع x_i الى الموضع x_f يكون تقريبا مساويا الى حاصل جمع جميع الشرائح الصغيرة.

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_X \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_X \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_X dx$$

وعليه، بالامكان ان نشتق علاقة للشغل المنجز بواسطة القوة F_x على الجسم كلما تحرك من الموضع x_i الى الموضع x_f :

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_X dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

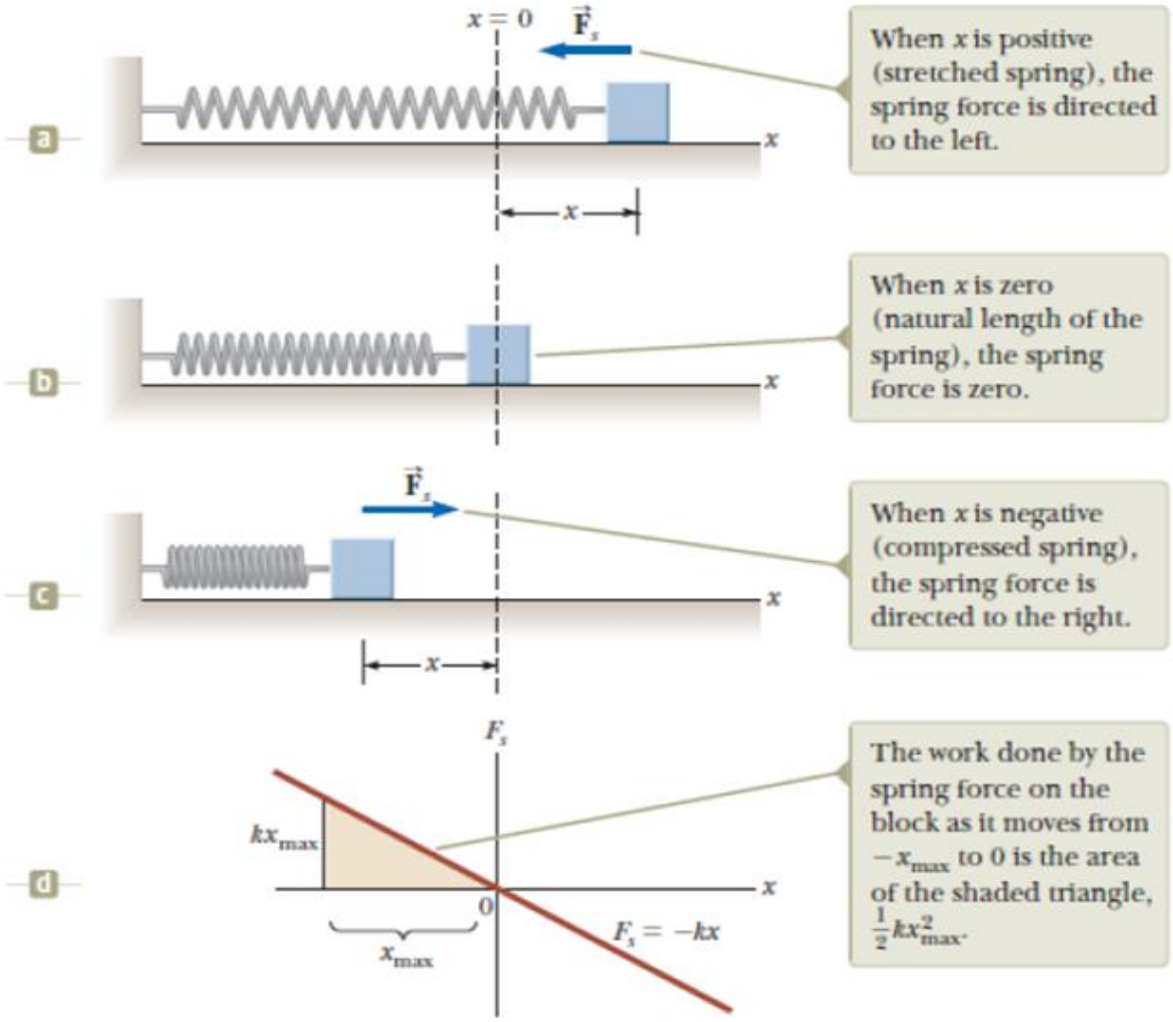
العلاقة اعلاه تختزل الى العلاقة (1) عندما المركبة $F_X = F \cos\theta$ تبقى ثابتة.



الخاصية	الشغل بقوة ثابتة	الشغل بقوة متغيرة
تعريف القوة	مقدار واتجاه ثابتين	يتغير المقدار أو الاتجاه أثناء الحركة
الصيغة الرياضية	$W=F\cdot x\cdot\cos\theta$	$W=\int \vec{F}\cdot dx$
التمثيل البياني	خط أفقي مستقيم	منحنى
حساب الشغل بيانيًا	**مساحة مستطيل** (القاعدة × الارتفاع)	**مساحة المنطقة تحت المنحنى**
الصعوبة الحسابية	بسيطة (ضرب مباشر)	معقدة (تتطلب تكامل)
أمثلة	سحب صندوق على أرضية أفقية	دفع سيارة من التوقف إلى الحركة

الشغل المنجز بواسطة نابض Work done by a spring

من النماذج التطبيقية والعملية المألوفة في الفيزياء ، حيث تتغيير القوة مع الموضع وكما موضح بالشكا التالي.



النظام اعلاه ، عبارة عن قطعة صلبة block موضوعة على سطح افقي عديم الاحتكاك ومربوطة بنابض spring . معظم النوابض التطبيقية لها قابلية الانضغاط compressed او قابلية التمدد (الاطالة) stretched لمسافة صغيرة عن موضع الاستقرار equilibrium . في هذه الحالة ، النابض يسلط قوة على القطعة ، تعطى رياضيا بالعلاقة التالية:

$$F_s = -kx \ \ldots\ldots\ldots (3) \quad spring\ force\ (Hooke's\ law)$$ قانون هوك

حيث x تمثل موضع القطعة بالنسبة الى موضع الاستقرار(x=0)، k تمثل ثابت موجب يطلق عليه ب ثابت النابض spring constant او ثابت القوة force constant .

القوة اللازمة لاستطالة او انضغاط النابض تتناسب مع مقدار الازاحة x (استطالة او انضغاط). قانون القوة للنابض يطلق عليه تسمية قانون هوك Hooke's Law . قيمة ثابت القوة او ثابت النابض k ، هي مقياس التصلب stiffness للنابض، حيث النابض الصلب stiff spring يمتلك قيمة كبيرة لثابت النابض k والنابض المرن soft spring يمتلك قيمة قليلة لثابت النابض k، وحدة قياس ثابت النابض هي N/m .

الاشارة السالبة في قانون هوك، (المعادلة 3) تؤشران القوة المسلطة بواسطة النابض على الجسم عادة ما تكون موجهه باتجاه معاكس لاتجاه الازاحة عن موضع الاستقرار.

عندما تكون $x > 0$ ، كما في الشكل (a) ، حيث ان القطعة الصلبة تنزاح نحو اليمين عن موضع الاستقرار، وعليه فان قوة النابض توجه نحو اليسار،ا ي بالاتجاه السالب ل x .

عندما تكون $x < 0$ ، كما في الشكل (c) حيث ان القطعة الصلبة تنزاح نحو اليسارعن موضع الاستقرار، وعليه فان قوة النابض توجه نحو اليمين، اي بالاتجاه الموجب ل x .

عندما تكون $x = 0$ ، كما في الشكل (b) حيث ان النابض مستقرولاتحصل له اية تغيير، وعليه فان قوة النابض $F_x = 0$ وبسبب ان قوة النابض عادة ما تعمل باتجاه موضع الاستقرار $x = 0$ ، لذا احيانا يطلق عليها "بقوة الاعادة" restoring force.

الشغل المنجز بواسطة قوة النابض على القطعة وكلما تحركت القطعة من الموضع $x_i = -x_{max}\ to\ x_f =$ 0 :

$$W_s = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

الشغل المنجزبواسطة النابض على القطعة (الجسم) يكون موجبا بسبب ان القوة بنفس اتجاه الازاحة (كلاهما نحو اليمين). في حالة القطعة (الجسم) تعاني ازاحة من الموضع $x = x_i\ to\ x = x_f$ ، فعليه الشغل المنجز بواسطة قوة النابض على القطعة (الجسم) يعطى بالعلاقة التالية:

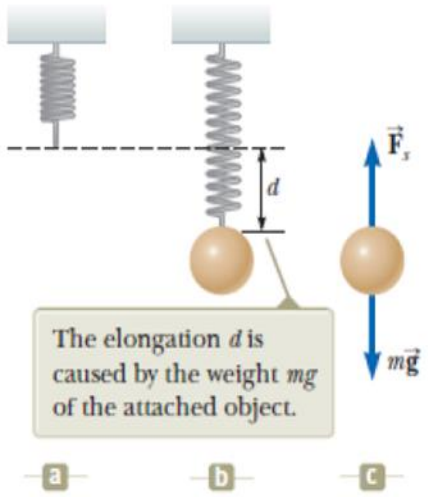
$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

من المعادلة (5) اعلاه، **يتضح ان الشغل المنجز بواسطة قوة النابض يساوي صفرلاية حركة تنتهي الى نقطة البداية $(x_i = x_f)$ ،**

مثال (1): نابض مثبت بصورة عمودية (شاقولية)، وجسم كتلته m معلق بالنهاية السفلى للنابض. تم استطالة النابض بمسافة قدرها 2 cm عن موضع الاستقرار نتيجة تعليق جسم كتلته 0.55 kg . احسب قيمة ثابت القوة للنابض؟

1- احسب مقدار الشغل المنجز بواسطة النابض على الجسم بعد الاستطالة بالمسافة المذكورة؟

الحل: (A) من الواضح لدينا، ان الجسم بعد الاستطالة يكون مستقرا equilibrium وهذا يعني ان محصلة القوة المؤثرة على الجسم تساوي صفر، بمعني اخر ان قوة النابض العلوية upward تعادل او توازن قوة الجاذبية السفلية downward .



$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \vec{F_s} + m\vec{g} = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow F_s - mg = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow F_s = mg$$

بتطبيق قانون هوك التالي $F_s = kd$ لايجاد قيمة ثابت القوة

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55\ kg)(9.8\frac{m}{s^2})}{2 \times 10^{-2} m} = 2.7 \times 10^2\ N/m$$

(B)لايجاد الشغل المنجز بواسطة النابض على الجسم

$$W_s = 0 - \frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}\left(2.7 \times 10^2 \frac{N}{m}\right)(2 \times 10^{-2} m)^2 = -5.4 \times 10^{-2}\ J$$

مثال (2): نابض مثبت بصورة عمودية (شاقولية) ، وقد علق بالنهاية السفلى للنابض جسم كتلته 0.6 Kg فإستطال النابض مسافة قدرها 4 cm عن موضع الإستقرار . إحسب قيمة كل من ثابت القوة للنابض وقوة النابض ومقدار الشغل المنجز بواسطة النابض على الجسم؟

Ans:

$\boldsymbol{k} = 147\ N/m$

$\boldsymbol{F_s} = 5.88N$

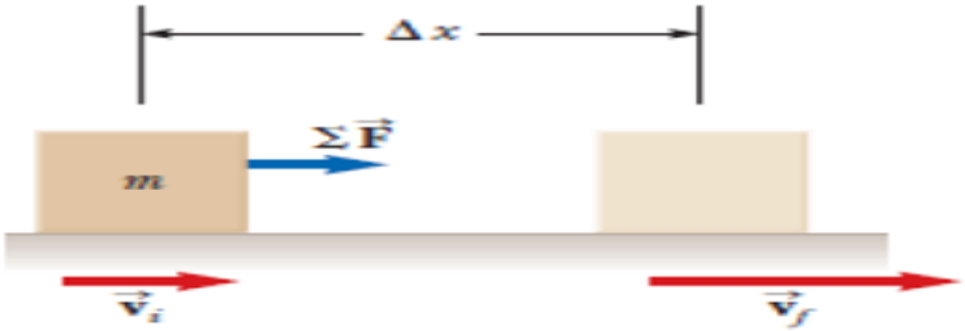
لايجاد الشغل المنجز بواسطة النابض على الجسم

$\boldsymbol{W_s} = -0.117\ J$

الطاقة الحركية ونظرية الشغل-الطاقة الحركية

Kinetic energy and the Work-Kinetic energy theorem

نتصور نظام يتكون من جسم منفرد single object. الشكل ادناه يوضح حركة قطعة كتلتها m بازاحة موجهة نحو اليمين تحت تأثير او فعل صافي قوة قدرها $\vec{F}$، وموجهة ايضا نحو اليمين. من المعروف لنا من قانون نيوتن الثاني، ان القطعة تتحرك بتعجيل قدره $\vec{a}$. اذا كانت القطعة والقوة المؤثرة تحركت ازاحة قدرها $\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} = (x_f - x_i)\hat{\imath}$.



الشغل المنجز على القطعة بواسطة صافي القوة الخارجية $\sum \vec{F}$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F \; dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

وباستخدام قانون نيوتن الثاني، بتعويض قيمة صافي القو $\sum \vec{F}$ =ma ، نحصل على العلاقة التالية للشغل:

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} ma \; dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\, dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\, dx = \int_{v_i}^{v_f} mv \; dv$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad \ldots\ldots (7)$$

حيث ان v_i تمثل الانطلاق للقطعة عندما تكون في الموقع $x = x_i$ و v_f تمثل انطلاق القطعة عندما تكون $x = x_f$. الكمية $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ تمثل الطاقة المرافقة لحركة الجسم (القطعة) ويطلق عليها تسمية "الطاقة الحركية kinetic energy".

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \ldots\ldots\ldots (8) \qquad \textbf{\textit{Kinetic energy}}$$ الطاقة الحركية

الطاقة الحركية من الكميات العددية scalar quantity ولها نفس وحدات قياس الشغل (الجول Joule) .

المعادلة (7) اعلاه، تنص على " الشغل المنجز على جسم بواسطة قوة $\vec{F}$ يساوي التغيير بالطاقة الحركية للجسم " ومن المناسب كتابة المعادلة (7) اعلاه بالشكل التالي:

$$W_{ext} = K_f - K_i \qquad \ldots\ldots (9)$$

وبترتيب المعادلة (9) اعلاه $K_f = K_i + W_{ext}$ ، والتي تعطي المعنى التالي " الطاقة الحركية النهائية لجسم ما تساوي حاصل جمع الطاقة الابتدائية للجسم والتغيير بالطاقة الناتجة من صافي الشغل المنجزعلى الجسم ".

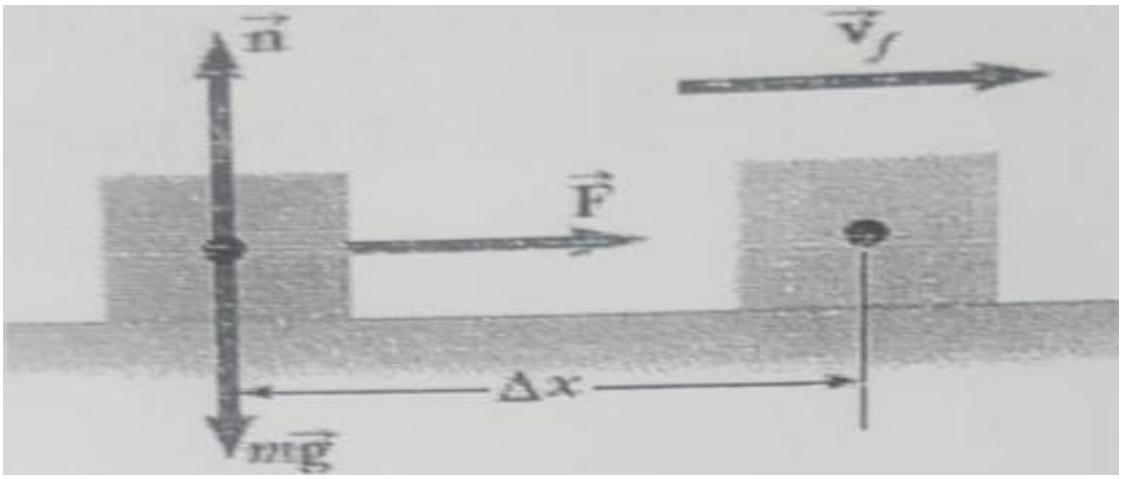
المعادلة (9) اعلاه تعتبر نتيجة مهمة ومفيدة ويطلق عليها تسمية "نظرية الشغل-الطاقة الحركية" Work-Kinetic energy theorem. بمعنى اخر، عندما ينجز شغل على نظام ويحصل تغيير فقط بالسرعة (الانطلاق) للنظام، فصافي الشغل المنجزعلى النظام يساوي التغيير بالطاقة الحركية للنظام.

نظرية الشغل-الطاقة الحركية، تؤشر او توضح ان الانطلاق لنظام ما يزداد اذا كان صافي الشغل المنجز على النظام موجب positive بسبب ان الطاقة الحركية النهائية تكون اكبر من الطاقة الحركية الابتدائية . وانطلاق النظام يتناقص اذا كان صافي الشغل المنجز على النظام سالب negative بسبب ان الطاقة الحركية النهائية للنظام تكون اقل من الطاقة الحركية الابتدائية للنظام .

<u>مثال (3):</u> قطعة صلبة كتلتها 6 kg في موضع الاستقرار، سحبت نحو اليمين على طول سطح افقي عديم الاحتكاك بتأثير قوة قدرها 12 N . احسب الانطلاق للقطعة بعد حركتها (ازاحتها) بمقدار 3 m ؟

من الشكل الموضح ادناه، القوة العمودية تعادل او توازن قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم ولا توجد قوى افقية تؤثرعلى توازن الجسم بالاتجاه الافقي بسبب ان نقاط الازاحة للجسم بالاتجاه الافقي. وعليه فصافي القوة الخارجية المؤثرة على الجسم هي القوة الافقية 12 N .

باستخدام نظرية الشغل-الطاقة الحركية للجسم(القطعة)، مع الاخذ بنظر الاعتبار ان الطاقة الحركية الابتدائية تساوي صفر:



$$W_{ext} = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f{}^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_f{}^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W_{ext}}{m}} = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}} = \sqrt{\frac{2(12N)(3\ m)}{6\ kg}} = 3.5\ m/s$$

القدرة Power : "المعدل الزمني لانجاز شغل بواسطة قوة". يطلق عليه بالقدرة بسبب قوة، فاذا قوة ما انجزت كمية من الشغل W خلال فترة زمنية Δt ، **فمعدل القدرة** بسبب القوة خلال الفترة الزمنية يعطى بالعلاقة التالية:

$$P_{ave} = \frac{W}{\Delta t} \quad average\ power$$ معدل القدرة

الوحدات القياسية الاساسية للقدرة هي جول/ثانية (J/s) ، ويطلق عليها تسمية الواط Watt (W)

$$1\ W = 1\ J/s = 1\ kg.m^2/s^2$$

توجد وحدة قياس اخرى للقدرة هي القدرة الحصانية horse power (hp) ، حيث

$$1\ hp = 746\ W$$

القدرة الانية Instantaneous power

$$\frac{dW}{dt} = \frac{F\,dx}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad N\cdot\frac{m}{s} = \frac{J}{s} = watt$$

القدرة من الكميات العددية scaler وليس من الكميات المتجهة .

مثال (4): جسم كتلته 5 kg يتحرك على سطح أفقي خشن معامل احتكاك 0.3 إذا كانت سرعة الجسم 4 m/s ، احسب القدرة الانية المبذولة للحفاظ على هذه السرعة؟

قوة الاحتكاك $F = \mu mg = 0.3 \times 5 \times 9.8 = 14.7\ N$

القدرة اللحظية $P = F \cdot v = 14.7 \times 4 = 58.8\ W$

مثال(5):مصعد كتلته 800 kg يصعد بسرعة ثابتة 3 m/s احسب القدرة الانية للمحرك .

قوة المحرك $F = mg = 800 \times 9.8 = 7840\ N$

القدرة اللحظية $P = F \cdot v = 7840 \times 3 = 23520\ W = 23.52\ kW$

مصطلحات مفيدة

Power قدرة ، work شغل ، kinetic energy طاقة حركية ، ramp تعلية ، claim ادعاء ، theoremنظرية