

الفصل الثالث

تراكم الحركات التوافقية البسيطة

Superposition of Simple Harmonic Motions

1.3 مبدأ التراكم

2.3 تراكم حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد

1.2.3 تراكم حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و لهما نفس التردد

2.2.3 تراكم حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد ومختلفتين في التردد (الضربات)

3.3 تراكم حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين

1.3.3 تراكم حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد

تناولنا في الفصل السابق الحركة التوافقية البسيطة وبعض من تطبيقاتها، ولكن في الواقع هناك أمثلة كثيرة في الفيزياء (وبخاصة في علم الصوت) تتراكب فيها حركتان توافقيتان بسيطتان أو أكثر في نفس الوقت، فغشاء طبلة الأذن غالباً ما يتأثر بأكثر من حركة توافقية بسيطة نتيجة لالتقاط الأذن أصوات متعددة بترددات مختلفة في نفس الوقت، وبصورة تتيح للإنسان ان يسمع ويميز أصوات مجموعة متكلمين في نفس الوقت، ومن الأمثلة الأخرى: اهتزاز غشاء السماع (Speaker)، و اهتزاز غشاء اللاقط الصوتي (Microphone).

1.3 مبدأ التراكب (Superposition Principle):

لهذا المبدأ أهمية كبيرة في تحليل الحركات الموجية المعقدة إلى مركبات توافقية بسيطة، و ينص هذا المبدأ على انه يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجتين أو أكثر ان تحدثا في نفس النقطة دون ان تؤثر احدهما في الأخرى، وتكون الإزاحة الآتية في تلك النقطة عبارة عن المجموع الجبري للزاحات الآتية للموجات المتراكبة. وينطبق هذا المبدأ على الحركات التوافقية البسيطة.

يمكن أثبات ان حاصل تراكب أي حركتين توافقيتين بسيطتين هو حركة توافقية بسيطة، وكما يلي:

نفرض ان لدينا حركتين توافقيتين بسيطتين، الأولى معبر عنها بالدالة (x_1) والثانية معبر عنها بالدالة (x_2) . بما ان الدالة (x_1) تمثل حركة توافقية بسيطة (بالفرض)، لذا فهي تحقق معادلة الحركة التوافقية البسيطة المعبر عنها بالصيغة $\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0 \right]$ ، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_o^2 x_1 = 0 \quad (1)$$

وبنفس الطريقة فان الدالة (x_2) تحقق معادلة الحركة التوافقية البسيطة، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_o^2 x_2 = 0 \quad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \omega_o^2(x_1 + x_2) = 0 \quad (3)$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان $(x_1 + x_2)$ تمثل حلاً لمعادلة المهتز التوافقي، وبتعبير آخر ان حاصل جمع حركتين توافقيتين هو أيضا حركة توافقية، وبشكل عام فان أي تركيب خطي يضم حركتين توافقيتين ينتج عنه حركة توافقية ثالثة.

2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد:

ان أي حركة توافقية بسيطة يتم وصفها بدلالة سعة (A) والتردد الزاوي (ω_o) والطور الابتدائي (θ_o) للاهتزاز $[x = A \sin(\omega_o t + \theta_o)]$ ، وللسهولة نبدأ أولاً بدراسة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد ولهما نفس التردد، ومن ثم ندرس تراكب حركتين توافقيتين مختلفتين في التردد والتي ترتبط بظاهرة فيزيائية مهمة تعرف بالضربات.

1.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و لهما نفس التردد:

نفرض ان لدينا حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الزاوي على امتداد المحور x معرفين

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta_1), \quad x_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta_2) \quad \text{بالعلاقين:}$$

حيث تمثل x_1 و x_2 الإزاحة الآنية للحركتين، a_1 و a_2 سعتي الحركتين، θ_1 ، θ_2 زاويتي الطور الابتدائي للحركتين، ω هو التردد الزاوي للحركتين، ان تراكب الحركتين تعطى بالصيغة:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ x &= a_1 \sin(\omega t + \theta_1) + a_2 \sin(\omega t + \theta_2) \end{aligned} \quad (1)$$

من المتطابقة المثلثية الخاصة بمفكوك جيب حاصل جمع زاويتين لدينا:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

وبالتعويض عن المفكوك في العلاقة (1) نحصل على:

$$\begin{aligned} x &= a_1 [\sin\omega t \cos\theta_1 + \cos\omega t \sin\theta_1] + a_2 [\sin\omega t \cos\theta_2 + \cos\omega t \sin\theta_2] \\ x &= a_1 \sin\omega t \cos\theta_1 + a_1 \cos\omega t \sin\theta_1 + a_2 \sin\omega t \cos\theta_2 + a_2 \cos\omega t \sin\theta_2 \\ x &= [a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_2] \sin\omega t + [a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2] \cos\omega t \end{aligned} \quad (2)$$

وحيث ان كل من a_1 ، θ_1 ، a_2 ، θ_2 هي ثوابت ، لذا يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$A \cos\theta = a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_2 \quad (3)$$

$$A \sin\theta = a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2 \quad (4)$$

حيث A ، θ هي ثوابت، وبتعويض المعادلة (3) و (4) في المعادلة (2) نحصل على:

$$\begin{aligned} x &= A \cos\theta \sin\omega t + A \sin\theta \cos\omega t \\ x &= A [\sin\omega t \cos\theta + \cos\omega t \sin\theta] \end{aligned}$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة:

$$x = A \sin(\omega t + \theta) \quad (5)$$

العلاقة الأخيرة تعبر عن الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد

في بعد واحد، ويلاحظ انها تشبه معادلة الحركتين الأصليتين حيث انها معادلة حركة توافقية لها نفس التردد

الزاوي الحركتين الأصليتين (ω)، وتختلف عنهما بالسعة (A) والطور الابتدائي (θ). واللذان يمكن حسابهما

بدلالة السعة والطور الابتدائي للحركتين الأصليتين وكما يلي:

لإيجاد السعة (A) نقوم أولاً بتربيع طرفي المعادلة (3) و (4) فنحصل على:

$$A^2 \cos^2\theta = a_1^2 \cos^2\theta_1 + 2a_1 a_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + a_2^2 \cos^2\theta_2$$

$$A^2 \sin^2\theta = a_1^2 \sin^2\theta_1 + 2a_1 a_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + a_2^2 \sin^2\theta_2$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين وترتيب الحدود نحصل على:

$$\begin{aligned} A^2 [\sin^2\theta + \cos^2\theta] &= a_1^2 [\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1] + a_2^2 [\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2] \\ &\quad + 2a_1 a_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2] \end{aligned}$$

وبالاستفادة من المتطابقتين المثلثيتين:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

بالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

حيث تمثل $(\theta_1 - \theta_2)$ زاوية الفرق بين الطورين الابتدائيين (θ_1, θ_2) وبجذر الطرفين نحصل على:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (6)$$

العلاقة الأخيرة تعبر عن سعة الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين في بعد واحد، وهي تعتمد على سعة والطور الابتدائي للحركتين المتراكبتين الأصليتين.

اما بخصوص الطور الابتدائي للحركة التوافقية الناتجة من تراكب الحركتين، فيمكن حسابه من خلال

قسمة المعادلة (4) على المعادلة (3) وكما يلي:

$$\frac{A\sin\theta}{A\cos\theta} = \frac{a_1\sin\theta_1 + a_2\sin\theta_2}{a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{a_1\sin\theta_1 + a_2\sin\theta_2}{a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2} \right] \quad (7)$$

المعادلة الأخيرة تعطي الطور الابتدائي للحركة الناتجة من تراكب الحركتين بدلالة سعتي و طوري الحركتين المتراكبتين الأصليتين.

نستنتج مما سبق ان تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد في بعد واحد، الأولى معرفة بالصيغة $x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta_1)$ والثانية معرفة بالصيغة $x_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta_2)$ هي حركة توافقية لها نفس التردد ويعبر عنها بالصيغة $x = A \sin(\omega t + \theta)$ حيث يعطى السعة والطور الابتدائي لها بدلالة سعة والطور الابتدائي للحركات التوافقية الأصلية بالصيغة:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{a_1\sin\theta_1 + a_2\sin\theta_2}{a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2} \right]$$

وبالتالي يمكننا ان نجد الحركة التوافقية الناتجة من تراكب اي حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وفي بعد واحد، ولنناقش الآن تراكب حالتين خاصتين وهي:

أولاً: تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد والطور في بعد واحد

في هذه الحالة يكون للحركتين الأصليتين نفس التردد والطور $(\theta_1 = \theta_2 = \theta)$ وعندها يمكن

التعبير عن الحركتين المتراكبتين بالصيغة: $x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta_1)$ ، $x_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta_2)$

اما الحركة الناتجة من تراكب الحركتين فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

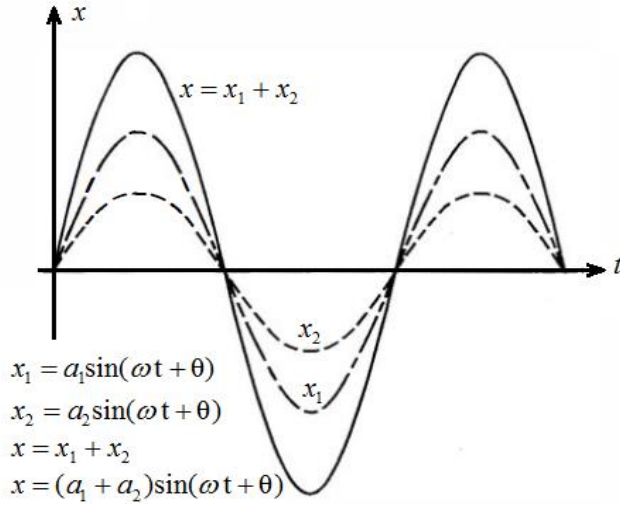
$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a_1 \sin(\omega t + \theta_1) + a_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$

$$\text{But we have; } \theta_1 = \theta_2 = \theta$$

$$x = a_1 \sin(\omega t + \theta) + a_2 \sin(\omega t + \theta)$$

$$x = (a_1 + a_2) \sin(\omega t + \theta)$$



من العلاقة الأخيرة نستنتج ان ناتج تراكب حركتين توافقيتين لها نفس التردد والطور في بعد واحد هو حركة توافقية لها نفس التردد والطور وبسعة تساوي المجموع الجبري لسعة الحركتين الأصليتين. ولهذا يسمى هذا النوع من التراكب بالتداخل البناء (constructive interference) وكما هو موضح بالشكل المجاور.

ثانياً: تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وبينهما فرق الطور (π) في بعد واحد

في هذه الحالة يكون للحركتين الأصليتين نفس التردد وبينهما فرق في الطور مقداره $(\Delta\theta = \pi)$ ويقال عندها ان الحركتين متعاكستين في الطور، فاذا فرضنا ان الحركة التوافقية الأولى معبر عنها بالصيغة:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta)$$

فان الحركة التوافقية الثانية يكون تعبيرها بالصيغة:

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta - \pi)$$

اما الحركة الناتجة من تراكب الحركتين فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega t + \theta) + a_2 \sin(\omega t + \theta - \pi)$$

من العلاقات المثلثية لدينا $\sin(\omega t + \theta - \pi) = -\sin(\omega t + \theta)$ نحصل على:

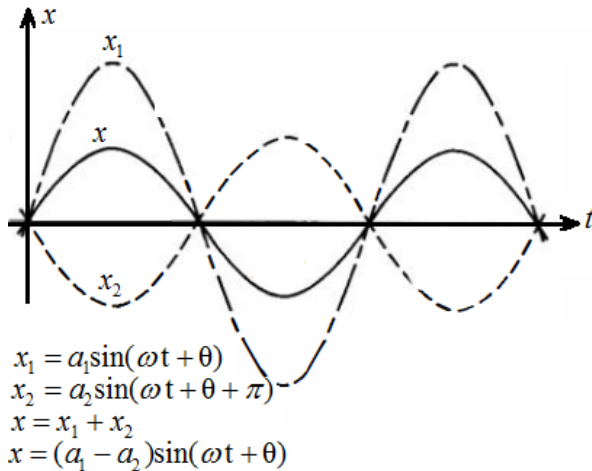
$$\sin(\omega t + \theta - \pi) = -\sin(\omega t + \theta)$$

وبالتعويض في معادلة الإزاحة الآتية نحصل على:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \theta) - a_2 \sin(\omega t + \theta)$$

ومنه نحصل على:

$$x = (a_1 - a_2) \sin(\omega t + \theta)$$



من العلاقة الأخيرة نستنتج ان ناتج تراكب حركتين توافقيتين لها نفس التردد وبينهما فرق طور (π) في بعد واحد هو حركة توافقية لها نفس التردد والطور وبسعة تساوي الفرق بين سعتي الحركتين الأصليتين. ولهذا يسمى هذا النوع من التراكب بالتداخل الاتلافي (الهدام) (destructive interference) وكما هو موضح بالشكل المجاور.

في حالة كون السعتين متساويتين $(a_1 = a_2)$ والتداخل اتلافي فان الحركتين تلغي احدهما الأخرى.

2.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و مختلفتين في التردد (الضربات)

يرتبط بهذا النوع من التراكب ظاهرة فيزيائية مهمة تسمى الضربات (Beats) والتي يمكن تعريفها على انها نمط خاص من الحركة الدورية تحدث عندما يتأثر جسم أنياً بحركتين توافقيتين بسيطتين الفرق بين تردديهما قليل عندها تكون سعة الحركة الاهتزازية الناتجة للجسم تتناوب بين نهايتين عظمى وصغرى مع مرور الزمن.

نفرض ان لدينا جسيم يتذبذب تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين مختلفتين قليلاً في التردد وعلى بعد واحد، نتيجة للاختلاف البسيط بين الترددين فان فرق الطور بين الحركتين يتغير باستمرار بصرف النظر عن الطور الابتدائي للحركتين، وبالتالي يمكننا تجاهل الطور الابتدائي للحركتين في هذه الحالة. ولذلك يمكننا التعبير عن الإزاحة الآنية للجسيم في اللحظة (t) بسبب تأثير الحركة التوافقية الأولى التي سعتها (A₁) وترددها الزاوي (ω₁) بالصيغة:

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$$

وبنفس الطريقة يمكننا التعبير عن الإزاحة الآنية لنفس الجسيم في نفس اللحظة الزمنية (t) نتيجة تأثير الحركة التوافقية الثانية التي سعتها (A₂) وترددها الزاوي (ω₂) بالصيغة:

$$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$$

وفقاً لمبدأ التراكب فان الإزاحة الآنية للجسيم يساوي المجموع الجبري للإزاحتين للحركتين المترابكتين، اي ان:

$$x = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$$

للسهولة نفرض ان سعتي الحركتين المترابكتين متساويتان (A₁ = A₂ = A) ومنه نحصل على:

$$x = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \quad (1)$$

من المتطابقات المثلثية لدينا:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \right)$$

بالتعويض في معادلة الإزاحة الآنية (1) نحصل على:

$$x = 2A \cos \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] \sin \left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \right]$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها كدالة جيبية بالصورة:

$$x = B \sin \left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \right]$$

حيث B سعة الاهتزاز وهي في هذه الحالة معتمدة على الزمن وتعطى بالعلاقة:

$$B = 2A \cos \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right]$$

ان العلاقة الأخيرة تمثل سعة الاهتزاز في حالة الضربات (B)، ويلاحظ ان سعة الاهتزاز متغيرة مع

الزمن، حيث تتراوح قيمتها من الصفر إلى اعظم قيمة وهي (2A).

للتوصل إلى فهم اعمق لتغير السعة في حالة الضربات ستقوم بحساب الفترة الزمنية الفاصلة بين اكبر

واصغر سعتين متتاليتين وكما يلي:

أولاً: حساب الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين في حالة الضربات

ان سعة الاهتزاز في حالة الضربات تعطى بالصيغة:

$$B = 2A \cos \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right]$$

ان اعظم قيمة للسعة هي ($B_{max} = \pm 2A$) وتحدث عندما:

$$B_{max} = \pm 2A \quad \text{when} \quad \cos \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] = \pm 1$$

من خواص دالة الجيب تمام لدينا:

$$\cos \alpha = \pm 1 \quad \text{for } \alpha = n\pi \quad \text{where } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

اي ان اعظم قيمة للسعة تحدث عندما :

$$\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

بالنعويض عن التردد الزاوي بدلالة التردد ($\omega_1 = 2\pi f_1, \omega_2 = 2\pi f_2$) نحصل على:

$$\left(\frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2} \right) t = n\pi$$

$$2\pi \left(\frac{f_2 - f_1}{2} \right) t = n\pi$$

$$(f_2 - f_1)t = n$$

$$t = \frac{n}{f_2 - f_1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$t = 0, \frac{1}{f_2 - f_1}, \frac{2}{f_2 - f_1}, \frac{3}{f_2 - f_1}, \frac{4}{f_2 - f_1}, \frac{5}{f_2 - f_1}, \dots$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_2 - f_1} - 0 = \frac{3}{f_2 - f_1} - \frac{2}{f_2 - f_1} = \frac{4}{f_2 - f_1} - \frac{3}{f_2 - f_1} = \frac{1}{f_2 - f_1}$$

$$\Delta t_{max} = \left| \frac{1}{f_2 - f_1} \right|$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين قيمة ثابتة تساوي $\left| \frac{1}{f_2 - f_1} \right|$.

ثانياً: حساب الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين في حالة الضربات

ان سعة الاهتزاز في حالة الضربات تعطى بالصيغة:

$$B = 2A \cos \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right]$$

في حالة الضربات تكون السعة في قيمتها الدنيا ($B_{min} = 0$) في الحالة المعرفة بالصيغة:

$$B_{min} = 0, \quad \text{when} \quad \cos \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] = 0$$

من خواص دالة الجيب تمام لدينا:

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{for } \alpha = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \text{where } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

في حالتنا فان السعة تكون صفراً عندما يتحقق الشرط:

$$\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{where } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

بالتعويض عن التردد الزاوي بدلالة التردد ($\omega_1 = 2\pi f_1$) و ($\omega_2 = 2\pi f_2$) نحصل على:

$$\left(\frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2}\right)t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$2\pi \left(\frac{f_2 - f_1}{2}\right)t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$t = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$t = \frac{\left(0 + \frac{1}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(2 + \frac{1}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(3 + \frac{1}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(4 + \frac{1}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \dots$$

$$t = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{5}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{7}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \dots$$

$$\Delta t_{min} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{7}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \frac{\left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)}{f_2 - f_1}, \dots$$

$$\Delta t_{min} = \left| \frac{1}{f_2 - f_1} \right|$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين قيمة ثابتة تساوي $\left| \frac{1}{f_2 - f_1} \right|$.

نستنتج من الاشتقاق في أولاً و ثانياً ان الفترات الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين هو نفسه الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين ويساوي مقلوب الفرق في تردد الحركتين.

$$\Delta t_{max} = \Delta t_{min} = \left| \frac{1}{f_2 - f_1} \right|$$

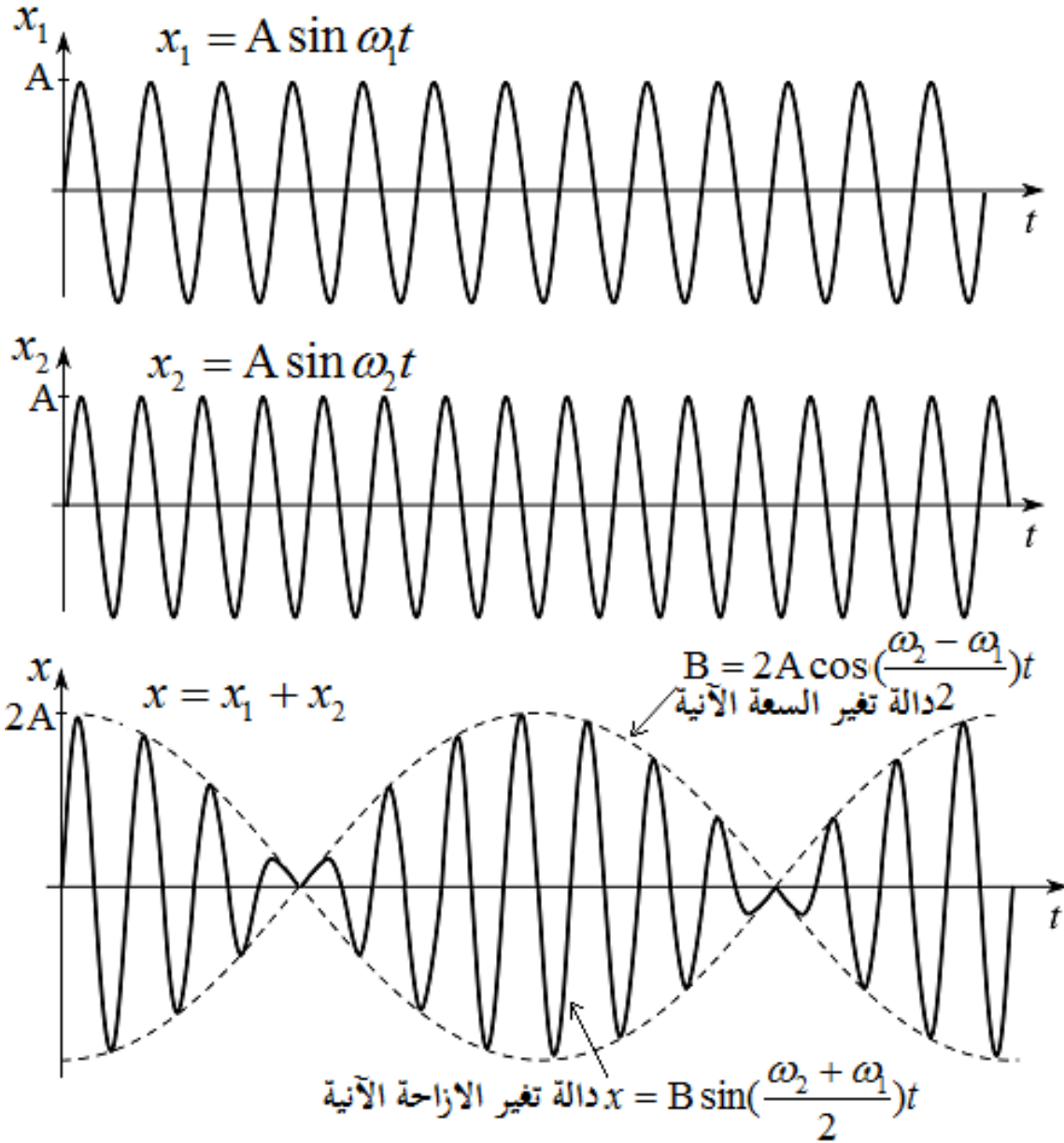
كما نستنتج ان تردد الضربات (عدد الضربات في وحدة الزمن) يساوي الفرق في التردد بين الحركتين المتراكبتين، وبالتالي يمكننا التعبير عن الزمن الدوري للضربات (T_b) والتردد للضربات (f_b) بالصيغة:

$$T_b = \left| \frac{1}{f_2 - f_1} \right|, \quad f_b = |f_2 - f_1|$$

مما سبق نستنتج ان محصلة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين بينهما فرق بسيط في التردد

تتحركان في بعد واحد تكون حركة توافقية بتردد يساوي متوسط تردد الحركتين $[f = (f_2 + f_1)/2]$ وسعتها تتغير دورياً مع الزمن بين مجموع السعتين والفرق بينهما وتتأشأ عنها ضربات بتردد يساوي الفرق بين التردد الأصليين $[f_b = |f_2 - f_1|]$.

الشكل التالي يوضح التمثيل البياني لتراكب حركتين مختلفتين قليلاً في التردد في بعد واحد:



نلاحظ من الشكل ان الإزاحة الآنية تتغير وفقاً لدالة جيبية ترددها يساوي المتوسط الحسابي لتردد الحركتين المترابنتين $[(\omega_2 + \omega_1)/2]$ غير ان سعة الاهتزاز (B) متغير مع الزمن وفقاً لدالة جيب تمام وبتردد $[(\omega_2 - \omega_1)/2]$ والتي تتمثل بالخط المنقط حيث يلاحظ ان سعة الاهتزاز تتغير بين اعظم قيمة ($2A$) إلى اقل قيمة (صفر) ضمن فترات زمنية محددة تمثل الزمن الدوري للضربات .

على سبيل المثال، اذا اهتزت شوكتان رنانتان قريبتان من بعضهما معاً وكان تردد احدهما $[f_1 = 255\text{Hz}]$ و تردد الثانية $[f_2 = 257\text{Hz}]$ فان الأذن ستمسمع صوت تردده $[f = (257 + 255)/2 = 256\text{Hz}]$ وبضربات ترددها $[f_b = |257 - 255| = 2\text{Hz}]$ وهذا يعني

ان شدة الصوت المسموع ترتفع وتنخفض مرتين في الثانية الواحدة.

مثال (1): في تجربة للحصول على أشكال ليساجو استعملت شوكتا رنين، تردد الأولى (250Hz) ووجد ان شكل ليساجو الدائري يكمل بعد مرور (5 s)، كيف يمكن إيجاد تردد الشوكة الثانية؟

الحل: لدينا من معطيات المسألة ($f_1 = 250\text{Hz}$) و ($T_b = 5\text{sec}$)

$$T_b = \left| \frac{1}{f_2 - f_1} \right| , \quad f_2 - f_1 = \pm \frac{1}{T_b}$$

$$f_2 - f_1 = \pm \frac{1}{5}$$

$$f_2 = f_1 \pm 0.2$$

$$f_2 = 250 + 0.2 \rightarrow f_2 = 250.2$$

or

$$f_2 = 250 - 0.2 \rightarrow f_2 = 249.8 \text{ Hz}$$

مثال (2): احسب سرعة الصوت في غاز تولد فيه موجتان أطولهما (100cm) و (101cm) 18 ضربة في 6 ثواني.

الحل: لدينا من معطيات المسألة

$$\lambda_1 = 100\text{cm} , \lambda_2 = 101\text{cm}$$

$$f_b = \frac{18}{6} = 3 \text{ Hz}$$

$$v = \lambda f , \quad f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} , \quad \text{and} \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2}$$

$$f_1 = \frac{v}{100} , \quad \text{and} \quad f_2 = \frac{v}{101}$$

$$f_b = |f_2 - f_1|$$

$$\left| \frac{v}{101} - \frac{v}{100} \right| = 3$$

$$v \left| \left[\frac{100 - 101}{(101)(100)} \right] \right| = 3$$

$$\frac{v}{10100} = 3$$

$$v = 30300 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 303 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

3.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين:

ناقشنا في الفقرة السابقة حركة جسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعد واحد، وفي هذه الفقرة سنناقش حركة جسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعدين بينهما زاوية قائمة، فعلى سبيل المثال لو كان لدينا كرة بندول بسيط معلق من نقطة ثابتة وتتحرك بحركة توافقية بسيطة باتجاه المحور الصادي وسمح لكرة البندول ان تتذبذب بنفس الوقت بسعة صغيرة باتجاه المحور السيني فان كرة البندول ستخضع لحركتين متعامدتين في وقت واحد، ونتيجة لذلك فان كرة البندول ستتحرك في بعدين بمسار يحدده محصلة هاتين الحركتين. يعرف شكل ليساجو (Lissajous figure) بأنه المسار المنحني الذي يسلكه الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين، ويعتمد هذا الشكل على سعة وتردد كل من الحركتين وفرق الطور بينهما. وإذا كانت النسبة بين ترددي الحركتين مساوياً لعدد صحيح وفرق الطور بينهما زاوية معينة فان شكل المسار يكون مغلقاً. سنبدأ دراسة حركة الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد ومن ثم ندرس حركة الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين مختلفتين بالتردد.

1.3.3 تراكب حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد:

نفرض ان لدينا جسيماً يتحرك في مستوي (حركة في بعدين) تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين متساويتين في التردد ومختلفتين في السعة والطور الابتدائي، هناك اكثر من طريقة لدراسة شكل المسار الذي يسلكه ذلك الجسيم، ومن اهم تلك الطرق هي الطريقة التحليلية وطريقة المحور الدوار.

أولاً: الطريقة التحليلية

نفرض ان الجسيم يتحرك آنياً بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين ومتساويتين في التردد، الأولى على امتداد المحور الأفقي (المحور السيني x-axis)، والثانية على امتداد المحور العمودي (المحور الصادي y-axis) والتي يمكن تعريفهما بالصيغة:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) \quad (1)$$

$$y = b \sin \omega t \quad (2)$$

حيث تمثل a سعة الاهتزاز للحركة التوافقية الأفقية و b سعة العمودية، (θ) زاوية الطور الابتدائي للحركة الأفقية، اما زاوية الطور الابتدائي للحركة العمودية فوضعت مساوية للصفر وذلك لتسهيل التعامل الرياضي من جهة ومن جهة ثانية فالذي يهمنا هو فرق الطور الابتدائي بين الحركتين وهو مقدار ثابت (θ) . بقسمة طرفي المعادلة (1) على (a) نحصل على:

$$\frac{x}{a} = \sin(\omega t + \theta)$$

بالاستفادة من المتطابقة $[\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta]$ نحصل على:

$$\frac{x}{a} = \sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta \quad (3)$$

لإيجاد شكل المسار الذي يسلكه الجسم لابد من إيجاد معادلة المسار له، والتي يتم الحصول عليها من حذف عامل الزمن من العلاقة (3) و ذلك بالاستفادة من العلاقة (2) وكما يلي:
من المعادلة (2) لدينا:

$$\sin \omega t = \frac{y}{b} \quad (4)$$

بالاستفادة من المتطابقة المثلثية $[\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1]$ نجد:

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$$

بالتعويض عن قيمة $\sin \omega t$ من المعادلة (4) في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad (5)$$

بالتعويض عن قيمة كل من $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \cos \theta + \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sin \theta$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sin \theta$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \cos \theta\right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sin \theta\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right) \cos \theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \cos^2 \theta = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sin^2 \theta$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{2xy}{ab} \cos \theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta - \frac{y^2}{b^2} \sin^2 \theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta + \frac{y^2}{b^2} \cos^2 \theta + \frac{y^2}{b^2} \sin^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta + \frac{y^2}{b^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta \quad (6)$$

المعادلة الأخيرة تمثل معادلة المسار للجسم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد ومختلفتين بالسعة والطور، وهي المعادلة العامة للقطع الناقص (Ellipse)، ويلاحظ من المعادلة ان شكل المسار يعتمد على سعة كل من الحركتين a ، b وكذلك على فرق الطور بينهما (θ) .
فيما يلي دراسة لشكل المسار (أشكال ليساجو) لجسم واقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعد واحد ولهما نفس التردد لقيم محددة من فرق الطور:

1- مسار الجسم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد و الطور ($\theta = 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta, \quad \theta = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos 0 = \sin^2 0$$

But we have ($\sin 0 = 0$) and ($\cos 0 = 1$) then we get:

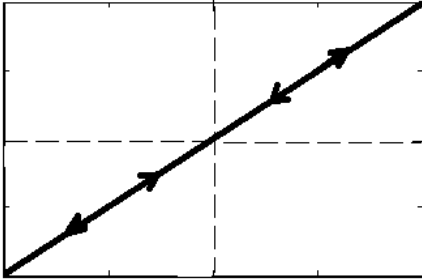
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} (1) = (0)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \xrightarrow{\text{yields}} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$$

$$y = \frac{b}{a}x$$



المعادلة الأخيرة هي معادلة خط مستقيم، أي أن شكل المسار في حالة كون فرق الطور مساوياً للصفر هو خط مستقيم يمر من نقطة الأصل وميله مقدار موجب ويساوي ($\text{slope} = b/a$) كما موضح بالشكل المجاور.

2- مسار الجسم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور ($\theta = \pi/4$)

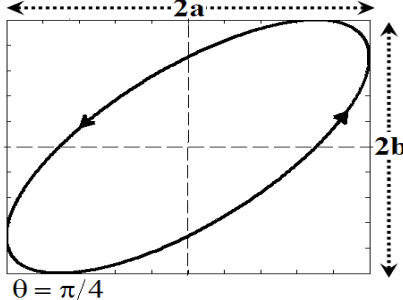
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \frac{\pi}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}xy}{ab} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\sqrt{2}xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$



يكون شكل المسار قطع ناقص مائل، ويكون اتجاه حركة الجسم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

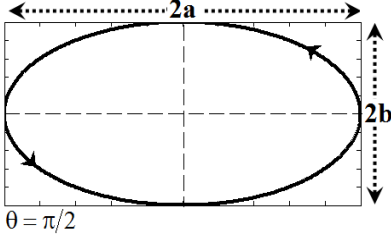
3- مسار الجسم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = \pi/2)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} (0) = (1)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



يكون شكل المسار قطع ناقص محوره الأساسيان على امتداد المحورين x و y ، ويكون اتجاه حركة الجسم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما موضح بالشكل المجاور.

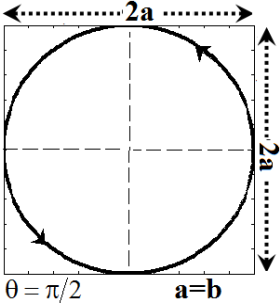
في حالة خاصة اذا كانت سعتي الحركتين متساويان $(a = b)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

فان معادلة المسار ستكون:

و يكون المسار على شكل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a . وكما هو موضح بالشكل المجاور.



4- مسار الجسم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = 3\pi/4)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

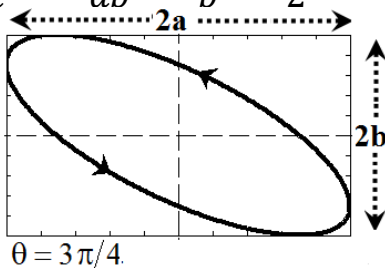
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \frac{3\pi}{4} = \sin^2 \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{But we have } \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}xy}{ab} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\sqrt{2}xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$



يكون شكل المسار قطع ناقص مائل، ويكون اتجاه حركة الجسم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

4- مسار الجسم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور ($\theta = \pi$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta, \quad \theta = \pi$$

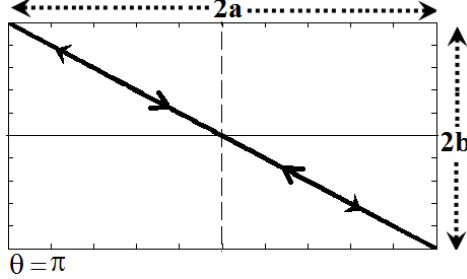
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \pi = \sin^2 \pi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} (-1) = (0)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$



من المعادلة الأخيرة نستنتج ان معادلة المسار للجسم المتحرك تحت تأثير حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وبينهما فرق في الطور ($\theta = \pi$) هي معادلة خط مستقيم ميله سالب، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

ثانياً: طريقة المتجه الدوار

في هذه الطريقة يتم تحديد المسار الذي يسلكه الجسم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين بطريقة هندسية، تقوم هذه الطريقة على الاستفادة من علاقة الحركة التوافقية البسيطة بالحركة الدائرية بسرعة منتظمة. نفرض ان الجسم يتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الأولى بالاتجاه الأفقي والثانية بالاتجاه العمودي معرفة بالصيغتين:

$$x = a \sin(\omega t + \theta)$$

$$y = b \sin \omega t$$

لرسم المسار (أشكال ليساجو) الذي يسلكه الجسم الواقع تحت تأثير الحركتين نقوم بالخطوات التالية:

1- باستعمال الفرجال نرسم دائرتين احدها تمثل الحركة التوافقية الأفقية بنصف قطر مقداره (a)، والثانية تمثل الحركة التوافقية العمودية بنصف قطر مقداره (b) وباعتماد مقياس رسم مناسب.

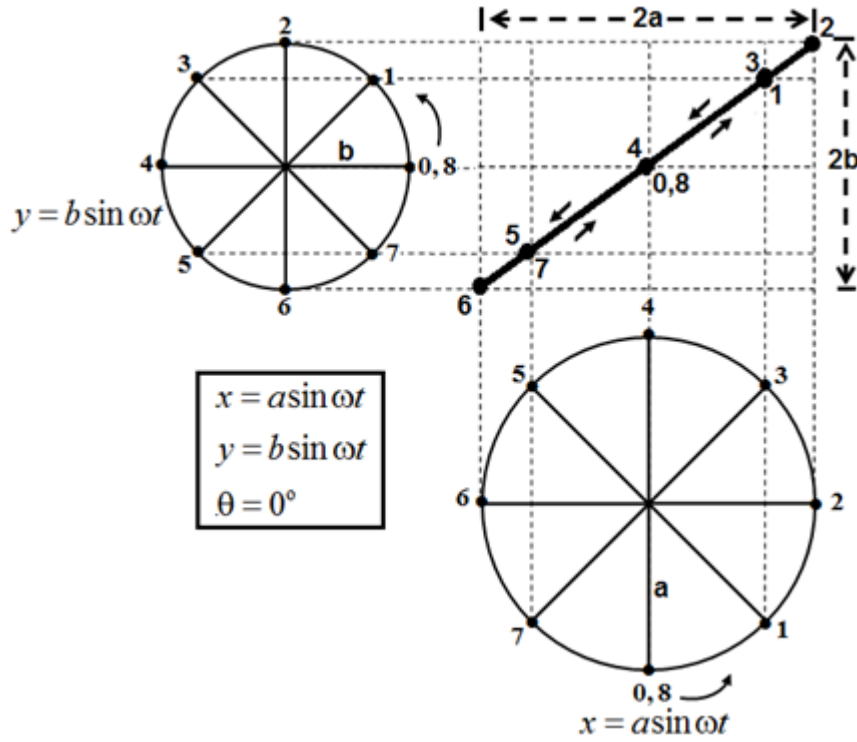
2- باستعمال المنقلة نقسم كل دائرة إلى عدد معين من الأجزاء بالاعتماد عدد نقاط الرسم المطلوبة و زاوية الطور الابتدائية. وفي حالة كون زاوية فرق الطور مضاعفات ($\pi/4$) يفضل التقسيم إلى ثمانية أجزاء.

3- نرقم كل جزء تصاعدياً (0,1,2,...) وباتجاه معاكس اتجاه حركة عقارب الساعة بداية من موضع الاتزان في حركة كون زاوية فرق الطور الابتدائي مساوية للصفر، وفي حالة كون هناك طور ابتدائي يتم تحديد الإزاحة الزاوية قياساً من موضع الاتزان ويبدأ الترقيم (0,1,2,3,...) من الموضع الجديد.

4- نحدد نقاط تقاطع كل جزئيين متقابلين في الدائرتين ونحصل على المسار بالتوصيل بين تلك النقاط.

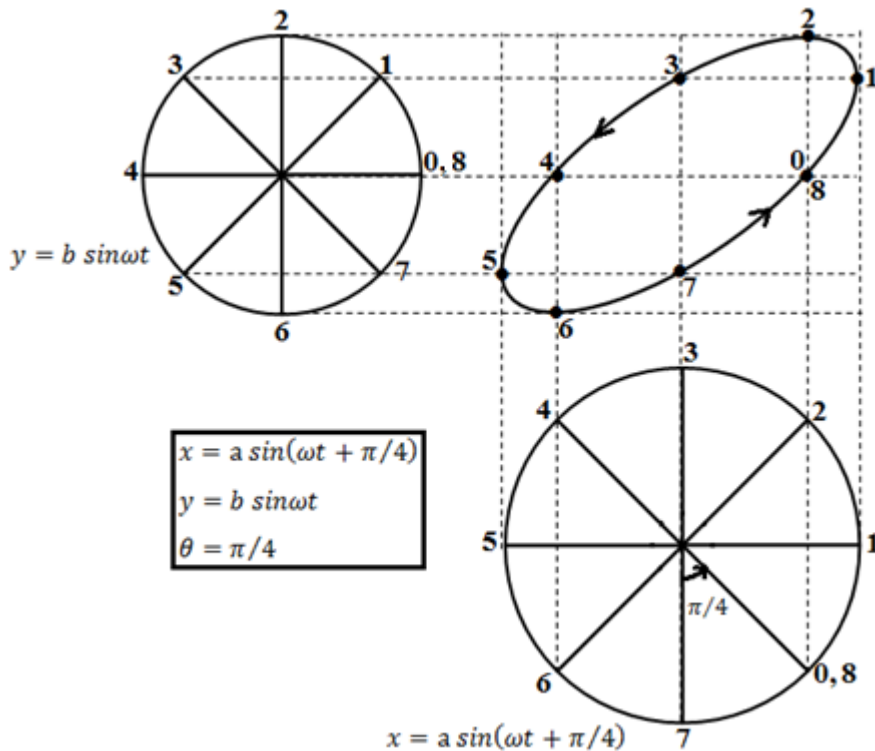
فيما يلي بعض الأمثلة لرسم مسار الجسم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد بطريقة المتجه الدوار:

1- مسار الجسم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد والطور ($\theta = 0$) بطريقة المتجه الدوار

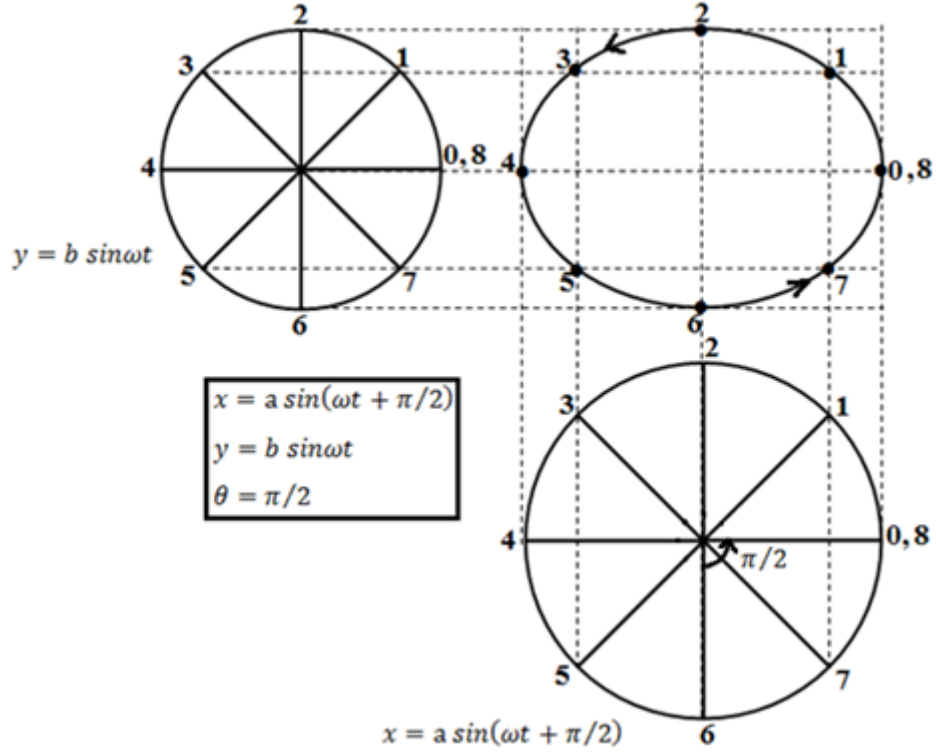


نلاحظ من الشكل مسار الجسم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس الطور بطريقة المتجه الدوار هو خط مستقيم ميله موجب، وهو نفس المسار الذي حصلنا عليه بالطريقة التحليلية.

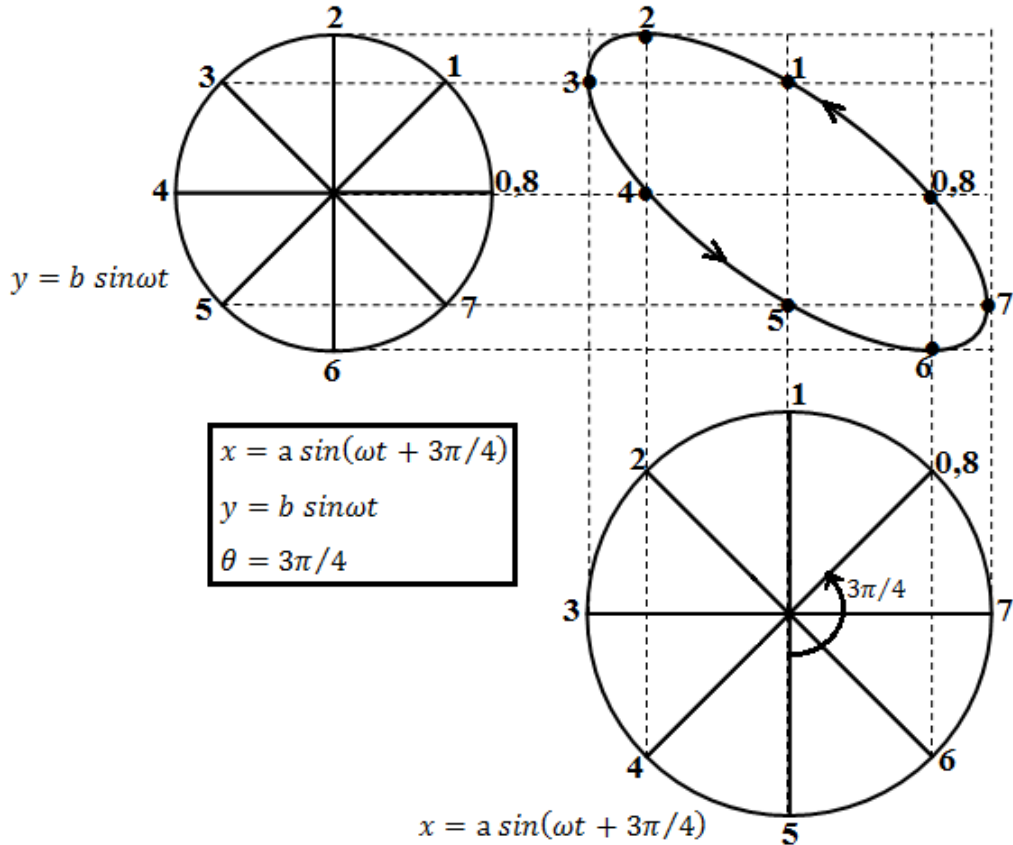
2- مسار الجسم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور ($\theta = \pi/4$)



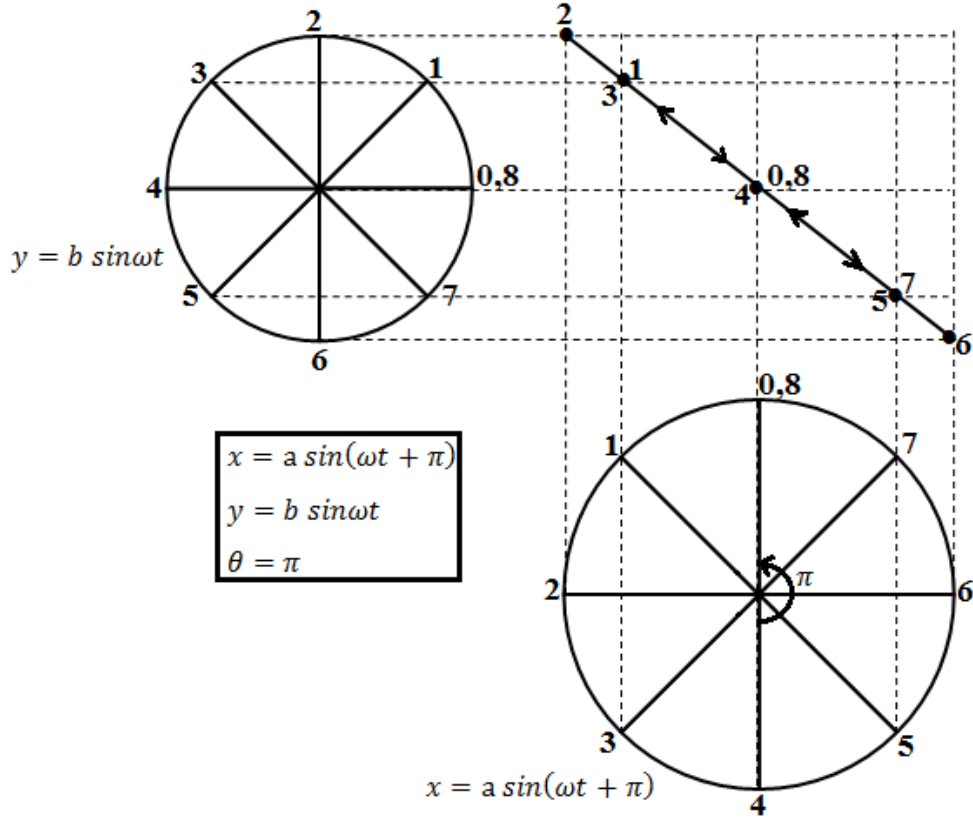
3- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور ($\theta = \pi/2$) بطريقة المتجه الدوار:



4- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور ($\theta = 3\pi/4$) بطريقة المتجه الدوار



5- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور ($\theta = \pi$) بطريقة المتجه الدوار



أسئلة الفصل الثالث

- س1: عرف كل من / مبدأ التراكب، الضربات، أشكال ليساجو.
- س2: اثبت ان محصلة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين هي حركة توافقية بسيطة.
- س3: اشتق الصيغة العامة لسعة وطور الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد في بعد واحد، ثم ناقش كون الحركتين المترابيتين: 1- بنفس الطور. 2- متعاكسة بالطور.
- س4: اشتق الصيغة الرياضية الخاصة بدالة الإزاحة الآنية في حالة الضربات.
- س5: في حالة الضربات اثبت ان الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين تساوي الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين.
- س6: اشتق الصيغة العامة لمعادلة المسار لجسيم متحرك بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد.
- س7: التردد الأقل لشوكتين رنانتين هو (840Hz)، وان دورة كاملة من التغيرات في أشكال ليساجو تحدث خلال (6s) احسب تردد الشوكة الرنانة الأخرى.
- س8: اكتب معادلة المسار لجسيم يتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد، ثم استنتج شكل المسار (مع الرسم) لكل حالة من حالات فرق الطور:
- ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, \pi/3$)
- س9: باعتماد طريقة المتجه الدوار وباستعمال المنقلة و الفرجال ارسم شكل المسار الذي يسلكه جسيم واقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد في كل حالة من حالات فرق الطور:
- ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, \pi/6$)
- س10: باستعمال طريقة المتجه الدوار ارسم أشكال ليساجو لتراكب كل زوج من الحركات التوافقية التالية:
- a) $\begin{cases} x = 3 \sin(45\pi t + \pi) \\ y = 3 \sin 45\pi t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \sin(12\pi t + \pi/4) \\ y = 4 \sin 12\pi t \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x = 3 \sin(42\pi t + 3\pi/4) \\ y = 4 \sin 42\pi t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 4 \sin(32\pi t + \pi/2) \\ y = 3 \sin(32\pi t + \pi/4) \end{cases}$