(4 – 1) مقدمة :

المادة العازلة المثالية : هي تلك التي لاتمتلك شحنات طليقة , وعلى الرغم من ذلك فأن كل مادة تتركب من جزيئات وهذه بدورها تتركب من جسيمات مشحونة (نوى الذرات و الالكترونات) وتتاثر جزيئات المادة العازلة بوجود المجال الكهربائي , اذ يسلط المجال قوة على كل جسم مشحون داخل الجزيئة الواحدة , فتندفع الجسيمات الموجبة بأتجاه المجال الكهربائي بينما تندفع الجسيمات السالبة بالاتجاه المعاكس مما يؤدي الى ازاحة الجزئين الموجب والسالب للجزيئة عن موضع الاتزان بأتجاهين متعاكسين , ومع هذا فأن مقدار هذه الازاحة محدد ويمكن ببساطة القول حسب وجهة النظر العينية وكأنه تم ازاحة كل الشحنة الموجبة للعازل عن شحنته السالبة , وعندئذ يقال بان العازل اصبح مستقطبا وعلى الرغم من العازل المستقطب يعد متعادلا كهربائيا بالمتوسط الا انه يولد مجالا كهربائيا عند النقاط الخارجية وفي داخل العازل على حد سواء . ان الفصل بين الشحنات الموجبة والسالبة يؤدي الى نشوء ثنائي قطب dipole ويمتلك عزم كهربائي .

(4 – 2) الاستقطاب :- *Polarization*

يعرف الاستقطاب على انه : هوغاية عزم ثنائي القطب لوحدة الحجم من العازل عندما يقترب الحجم من الصفر اي ان:-

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

حيث : P=P(x,y,z) متجه ووحداته تنتج من قسمة وحدة الشحنة على وحدة المساحة $\frac{coul}{m^2}$

ويعطى عزم ثنائي القطب الكهربائي لجزيئة واحدة بالعلاقة :

$$P_{molecule} = \int_{molecule} rdq \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(العزم = حاصل ضرب احدى الشحنتين × المسافة بينهما) باعتبار ان الجزيئة هي احدى المكونات الصغيرة المتعادلة كهربائيا للمادة العازلة . ويعطي عزم ثنائي القطب للعنصر الحجمي (ΔV) بالعلاقة الاتية :-

$$\Delta P = \sum P_m \ldots\ldots\ldots (2)$$

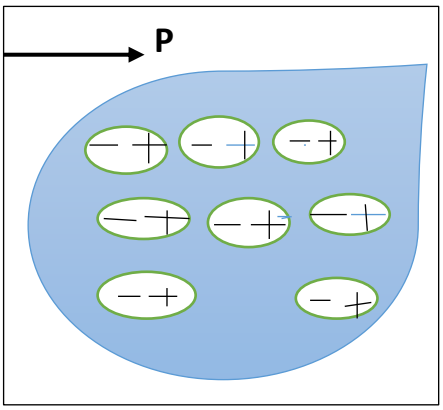
حيث يشمل الجمع جزيئات داخل العنصر (ΔV)

$$\because \vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

نعوض معادلة (2) في (3) نحصل على:

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum P_m$$

حيث يمثل كل عنصرحجمي من العازل المستقطب ثنائي قطب صغير وان كل ثنائي قطب يمثل جزيئة منفردة كما في الشكل ادناه :-

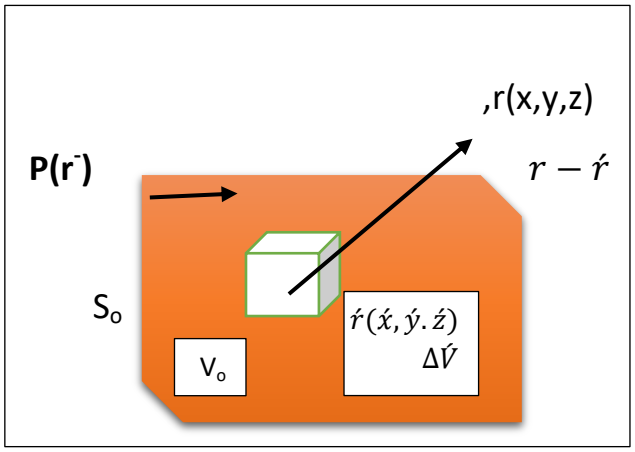


لو اخذنا عنصر حجمي صغير ΔV من وسط عازل متعادل كهربائيا فاذا كان الوسط مستقطبا لنتج عن ذلك فاصل بين الشحنات الموجبة والسالبة وعليه يوصف العنصر الحجمي بعزم ثنائي القطب الكهربائي والذي تعطى قيمته بالعلاقة :

$$\Delta P = \int_{\Delta V} r dq$$

(3 – 4) المجال الخارجي لوسط عازل :- *External Field of a Dielectric media*

لو اخذنا قطعة محدودة من مادة عازلة مستقطبة , ونفرض انها تتسم بانها تتجه بمتجه الاستقطاب ($\vec{P}(r)$) عند كل نقطة ممثلة بالمتجه $\acute{r}$ كما في الشكل ادناه :-



ان الاستقطاب $P(\acute{r})$ يؤدي الى نشوء مجال كهربائي والمطلوب حساب هذا المجال عند النقطة (r) التي تقع خارج العازل ومن الافضل ان نحسب الجهد اولا ومن ثم نجد المجال الكهربائي بأخذ انحدار الجهد باشارة سالبة. ناخذ عنصر حجمي $\Delta\acute{V}$ من الوسط العازل (داخل العازل) ويميز هذا العنصر الحجمي بقيمة عزم ثنائي القطب ΔP حيث :

$$\Delta p = P\Delta\acute{V} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

وعليه يعطى الجهد الناتج من عنصر الحجم $\Delta\acute{V}$ عند النقطة (r) بالعلاقة :

$$\Delta U(r) = \frac{\Delta p.\left(\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right)}{4\pi \in_o |r - \acute{r}|^3} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

نعوض معادلة (1) في (2) فنحصل على :

$$\Delta U(r) = \frac{P(\acute{r}).(r - \acute{r})\Delta\acute{V}}{4\pi \in_o |r - \acute{r}|^3} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

والكمية $r - \acute{r}$ تمثل متجه اتجاهه منبثق من $\Delta\acute{V}$ نحو الخارج ومقداره :

$$|r - \acute{r}| = \sqrt{(x - \acute{x})^2 + (y - \acute{y})^2 + (z - \acute{z})^2}$$

وعليه فالجهد الكلي عند النقطة r يمثل مساهمات جميع اجزاء العازل :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o} \frac{P(\acute{r}).(r - \acute{r})d\acute{V}}{|r - \acute{r}|^3} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

ومما اثبتنا سابقا (الفصل الاول) $\left[\nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right]$ وعليه نجد ان:-

$$\acute{\nabla} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} = \frac{\vec{r} - \vec{\acute{r}}}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|^3}$$

ان العامل (*operator*) $\acute{\nabla}$ يتضمن مشتقات للاحداثيات المؤشرة بعلامة الفتحة ومن الواضح انه اذا اثر العامل $\acute{\nabla}$على الدالة $\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|$ فان النتيجة ستكون مساوية لتاثير العامل $(-\nabla)$ على الدالة نفسها وعليه ستصبح معادلة (4) بالشكل التالي:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o} \vec{P}.\acute{\nabla} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} d\acute{V} \dots\dots\dots\dots (5)$$

ويمكن تحويل معادلة (5) بواسطة المتطابقة:

$$\acute{\nabla}.(FA) = F\acute{\nabla}.A + A.\acute{\nabla}F, \quad where: F = scalar = \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|}, \quad and \quad A = vector = \vec{P}$$

$$\acute{\nabla}.\left(\frac{P}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|}\right) = \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|}\acute{\nabla}.P + P.\acute{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|}$$

$$P.\acute{\nabla}\frac{1}{|r - \acute{r}|} = \acute{\nabla}.\frac{P}{|r - \acute{r}|} - \frac{1}{|r - \acute{r}|}\acute{\nabla}.P \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

نعوض معادلة (6) في معادلة (5) فنحصل على :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o} \acute{\nabla}.\frac{P}{|r - \acute{r}|} d\acute{V} + \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o} \frac{-\acute{\nabla}.P}{|r - \acute{r}|} d\acute{V}$$

وباستخدام نظرية التباعد $\left[\oint_S F.n\,da = \int_V \nabla.F\,dV\right]$ يتحول الحد الاول من تكامل حجمي الى تكامل سطحي :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \oint_{S_o} \frac{P.\hat{n}d\acute{a}}{|r-\acute{r}|} + \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o} \frac{-\acute{\nabla}.P d\acute{V}}{|r-\acute{r}|}$$

يرمز n الى العمود المقام على السطح da باتجاه خارج العازل .

$$\sigma_p = P.\hat{n} = P_{n,} \quad and \quad \rho_p = -\nabla.P$$

حيث σ_p تمثل كثافة شحنة الاستقطاب السطحية , بينما ρ_p تمثل كثافة شحنة الاستقطاب الحجمية .

ويطلق على شحنة الاستقطاب اسم الشحنة المقيدة للتعبير عن حقيقة كونها غير حرة الحركة ولايمكن انتزاعها عن مادة العازل. يمكننا الان كتابة الجهد الناتج عن مادة العازل بالعلاقة :-

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \left[\oint_{S_o} \frac{\sigma_p d\acute{a}}{|r-\acute{r}|} + \int_{V_o} \frac{\rho_p d\acute{V}}{|r-\acute{r}|} \right] \dots\dots\dots\dots (7)$$

$$as: \quad dq = \sigma_p d\acute{a} + \rho_p d\acute{V}$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \int \frac{dq}{|r-\acute{r}|}$$

معادلة (7) تشير الى ان مادة العازل قد استبدلت بتوزيع شحني مقيد مكافئ وشحنة الاستقطاب الكلية لجسم عازل Q_P تعطى بالعلاقة:

$$Q_P = \int_{V_o} -\acute{\nabla}.P \, d\acute{V} + \oint_{S_o} P.n \, d\acute{a}$$

ويجب ان تساوي صفر لان فرضيتنا تنص على ان العازل ككل متعادل كهربائيا .

اما المجال الكهربائي فيمكن الحصول عليه من اخذ الانحدار السالب للمعادلة (7) ($E = -\nabla u$) ولما كانت u دالة للاحداثيات (x,y,z).

فان الانحدار الملائم هو ($-\nabla$) .

$$\because \nabla \frac{1}{|r-\acute{r}|} = -\acute{\nabla} \frac{1}{|r-\acute{r}|} = -\frac{\vec{r}-\vec{\acute{r}}}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3}$$

وبالتعويض في معادلة (7)

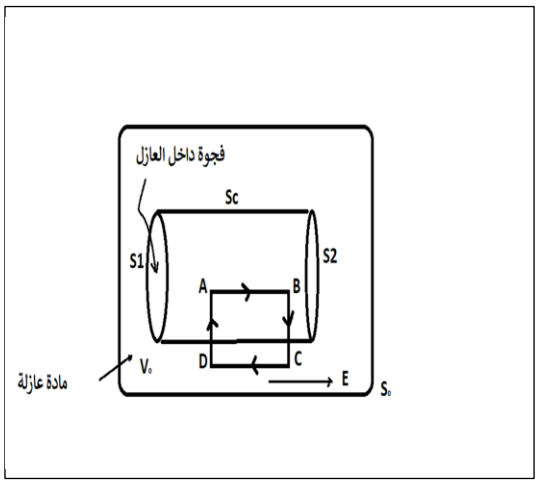
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \in_o} \left[\oint_{S_o} \frac{\sigma_p d\acute{a}\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3} + \int_{V_o} \frac{\rho_p d\acute{V}\left(\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^3} \right] \dots\dots\dots (8)$$

(4 -4) المجال الكهربائي داخل العازل : *The Electric Field inside A dielectric*

ان المجال الكهروستاتيكي في العازل يجب ان يمتلك الخواص الاساسية نفسها للمجال في حالة الفراغ وخاصة ان المجال الكهربائي E يعد مجالا محافظا (*conserved*) وهذا يعني :-

$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{E} = 0, \qquad \Longrightarrow \oint E.d\ell = 0$$

دعنا نطبق هذه المعادلة على المسار $ABCD$ الموضح بالشكل :



يقع الجزء AB داخل فجوة على شكل ابرة استقطعت من

من العازل اما الجزء CD فيقع داخل المادة العازلة .

$$E_{Vacuum}.L - E_{dielectric}.L = 0$$

اي ان:

$$E_{Vacuum}.L = E_{dielectric}.L$$

$$E_{vacuum} = E_{dielectric}$$

المعادلة اعلاه تصح لكل الاتجاهات التي يمكن ان تاخذها تلك

الفجوة وبهذا نصل الى الاستنتاج التالي :-

يكون المجال الكهربائي داخل العازل مساويا للمجال الكهربائي داخل الفجوة التي على شكل ابرة في العازل بشرط ان يكون محور الفجوة موازيا لأتجاه المجال الكهربائي.

وعلى هذا الاساس تحول حساب المجال الكهربائي داخل العازل الى حساب المجال الكهربائي داخل فجوة في العازل على شكل ابرة , بيد ان المجال الكهربائي داخل الفجوة (*cavity*) هو في واقع الحال مجال خارجي ولهذا يمكن تعيينه وفق النتائج التي حصلنا عليها سابقا.

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o - V_1} \frac{\rho_p(\acute{x},\acute{y},\acute{z})}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} d\acute{V} + \frac{1}{4\pi \in_o} \oint_{S_o + \acute{S}} \frac{\sigma_p(\acute{x},\acute{y}.\acute{z})}{\left|\vec{r} - \vec{\acute{r}}\right|} d\acute{a}$$

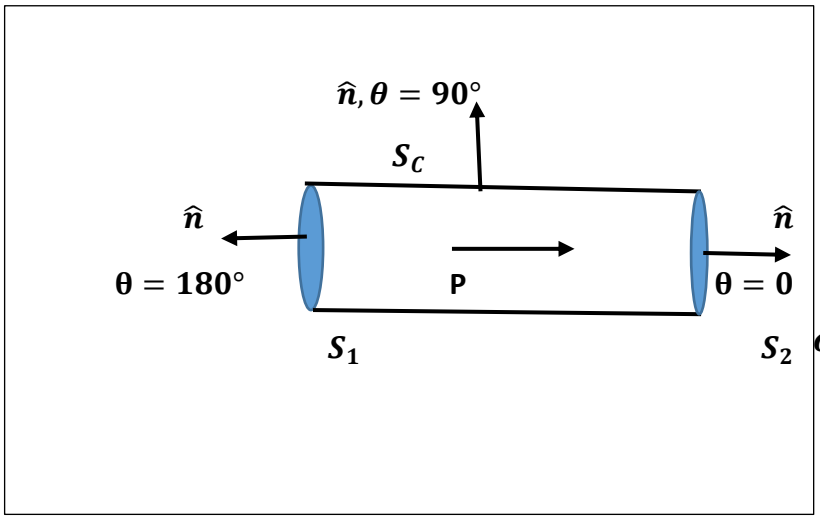
اي بنفس الطريقة نفرض ان استقطاب العازل هو دالة معطاة $\acute{P}(\acute{x},\acute{y},\acute{z})$. نحسب الجهد والمجال الناشئ عن هذا الاستقطاب بأخذ نقطة المجال (r) عند مركز الفجوة .

(V_o-V_1) : تمثل الحجم الكلي للعازل عدا حجم الابرة.

S_o: السطح الخارجي للعازل.

$\acute{S}$: يمثل سطح الابرة حيث ($\acute{S} = (S_1 + S_2 + S_C)$

ملاحظة : يلاحظ من المعادلة ان التكامل السطحي اخذ كل السطوح وذلك لأن التكامل السطحي حول سطح مغلق وعليه يشمل جميع السطوح التي يحويها السطح المغلق ، بينما التكامل التكامل الحجمي يأخذ حجم العازل ككل .



يلاحظ من الشكل ان $\sigma_p = 0$ على السطح الاسطواني S_C للابرة لأنه في المواد العازلة متساوية الاتجاه ويكون اتجاه الاستقطاب P منطبقا على E ولهذا يكون $\sigma_p = 0$

$$\sigma_p = P.\hat{n} = Pncos\theta = Pncos90 = 0$$

كما يمكن جعل الابرة رقيقة الى درجة بحيث يمكن اهمال مساحة السطحين S_2, S_1 وعلى هذا الاساس يصبح السطح الخارجي للعازل هو الوحيد الذي يسهم في تكوين الجهد و هو السطح (S_o) وعليه تصبح معادلة الجهد :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \in_o} \int_{V_o - V_1} \frac{\rho_p(\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})}{|\vec{r} - \vec{\acute{r}}|} d\acute{V} + \frac{1}{4\pi \in_o} \oint_{S_o} \frac{\sigma_p(\acute{x}, \acute{y}. \acute{z})}{|\vec{r} - \vec{\acute{r}}|} d\acute{a}$$

فأذا كانت الفجوة ضيقة جدا يمكن اهمال V_1 فتكون هذه المعادلة مشابهة لمعادلة (7) فتعطي قيمة الجهد U(r) للوسط العازل دون الاخذ بنظر الاعتبار اذا كانت r داخل العازل ام خارجه وعليه يمكن ايجاد المجال الكهربائي حيث :

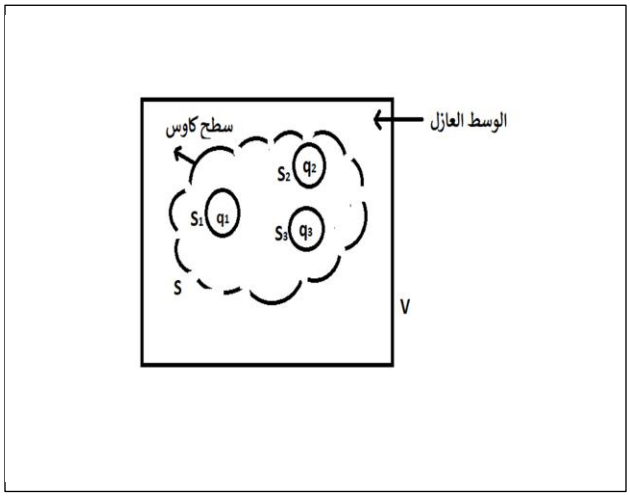
$$E = -\nabla U$$

(4 – 5) قانون كاوس في العوازل والازاحة الكهربائية:

Guess's Law in A dielectric and *the electric Displacement*

ينص قانون كاوس على ان الفيض الكهربائي خلال سطح مغلق يتناسب تناسبا طرديا مع الشحنة الكلية التي يحتضنها السطح.

وعند تطبيق قانون كاوس على منطقة تحتوي شحنات طليقة مغروسة في عازل فيجب ان تشمل جميع الشحنات داخل السطح المقيدة منها والطليقة على حد سواء.



ان الخط المتقطع S يمثل سطح كاوس في الشكل المجاور ، وهو سطح مغلق كائن داخل الوسط العازل ، وهناك كمية من الشحنة الطليقة Q داخل الحجم المحدد بالسطح S.

سنفرض ان الشحنة الطليقة موزعة على ثلاثة اجسام موصلة بكميات قدرها q_1, q_2, q_3 حيث:

$$Q_f = q_1 + q_2 + q_3$$

وبتطبيق قانون كاوس على هذه الحالة ينتج ان :

$$\oint E.n\,da = \frac{Q_f + Q_p}{\in_o} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$but: \quad Q_P = \oint_S P.n\,da + \int_V -\nabla.P\,dV \dots\dots (2)$$

يمثل V حجم العازل المحاط بالسطح S حيث :-

$$P.n = \sigma_P, \qquad -\nabla.P = \rho_P$$

$$\therefore\ Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} P.n\,da + \int_V -\nabla.P\,dV \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

سنحول التكامل الحجمي (الحد الثاني من معادلة (3)) الى تكامل سطحي بأستخدام نظرية التباعد وبأخذ جميع السطوح المحيطة بالحجم (V) , اي (S, S_1, S_2, S_3)

$$\int_V -\nabla.P\,dV = \int_{S+S_1+S_2+S_3} -P.n\,da \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

نعوض (4) في (3) فنحصل على :

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} P.n\,da + \int_{S+S_1+S_2+S_3} -P.n\,da$$

من الواضح ان المساهمات الناشئة عن السطوح الثلاثة الاخيرة ستمحو الحد الاول وعليه ستصبح المعادلة.

$$Q_P = -\oint_S P.n da \dots\dots\dots.. (5)$$

ومن معادلة (1) :-

$$\oint (\in_o E).n\,da = Q_f + Q_P$$

$$\oint (\in_o E).nda - Q_P = Q_f \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

نعوض (5) في (6) :

$$\oint(\epsilon_o\, E + P)\,.\,nda = Q_f \ldots\ldots\ldots(7)$$

تشير معادلة (7) الى ان فيض المتجه $(\epsilon_o\, E + P)$ خلال سطح مغلق يساوي الشحنة الطليقة الكلية التي يحتضنها السطح وهذا المتجه يسمى الازاحة الكهربائية ويرمز له D وهو كمية متجهة .

$$\vec{D} = \epsilon_o\, \vec{E} + \vec{P} \ldots\ldots\ldots(8)$$

ووحداتها وحدات استقطاب اي وحدة شحنة مقسومة على وحدة مساحة .

E: يمثل شدة المجال الناشئ عن الشحنات المقيدة والطليقة معا.

P: يمثل متجه الاستقطاب الناشئ عن الشحنات المقيدة المحتثة فقط .

D: تمثل الكثافة السطحية للشحنات الطليقة (الحرة) .

نعوض معادلة (8) في (7) فنحصل على :

$$\oint D.n\,da = Q_f = \int \rho dV \ldots\ldots(9)$$

وهي تمثل الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل .

وباستخدام نظرية التباعد نحول التكامل من سطحي الى حجمي :

$$\oint D.n\,da = \int \nabla.D\,dV \ldots\ldots\ldots(10)$$

نعوض (10) في (9) :

$$\int \nabla.D\,dV = \int \rho\,dV$$

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس في العوازل

$$\therefore\ \nabla.D = \rho$$

حيث ρ : تمثل كثافة الشحنة الطليقة.

ولايجاد المجال E نستخدم معادلة (8) حيث:

$$E(x,y,z) = \frac{D}{\epsilon_o} - \frac{P}{\epsilon_o}$$

حيث E المجال الكهروستاتيكي الكلي عند اي نقطة في وسط عازل . حيث:

$(\frac{D}{\epsilon_o})$ يرتبط بكثافة الشحنة الطليقة من خلال تباعد الازاحة.

$(-\frac{P}{\epsilon_o})$ يتناسب طرديا مع الاستقطاب للوسط العازل .

وفي الفراغ يعطى المجال الكهربائي الكلي بالحد الاول فقط من المعادلة اعلاه.

(4 – 6) التأثرية الكهربائية وثابت العزل :- *Electric Susceptibility and Dielectric constant*

يحدث الاستقطاب للمواد العازلة استجابة للمجال الكهربائي المسلط عليها وان درجة الاستقطاب لاتعتمد فقط على المجال الكهربائي ولكن على خواص المادة العازلة ايضا, والعلاقة التي تربط الاستقطاب وشدة المجال الكهربائي (حسب وجهة النظر العينية) علاقة نقطية ، فاذا تغيرت E من نقطة الى اخرى داخل الوسط المادي لتغيرت P تبعا لذلك ولمعظم المواد تتلاشى P اذا ماتلاشت E واذا كانت المادة العازلة متساوية الاتجاه (isotropic) لوجب ان يكون الاستقطاب باتجاه المجال الكهربائي نفسه الذي تسبب في تكوين الاستقطاب ويمكن تلخيص النتائج بالمعادلة :

$$P \propto E \Longrightarrow P = \epsilon_o \chi_e E$$

حيث χ_e :- تمثل التأثرية الكهربائية.

$$as:\ D = \epsilon_o E + P = \epsilon_o E + \epsilon_o \chi_e E = \epsilon_o E(1 + \chi_e)$$

$$but:\ \chi_e = \mathrm{K} - 1, \Longrightarrow \mathrm{K} = 1 + \chi_e$$

$$\therefore\ D = \mathrm{K}\epsilon_o E, \qquad but\ \mathrm{K} = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} = \epsilon_r \Longrightarrow \mathrm{K}\epsilon_o = \epsilon$$

ويسمى K ثابت العزل او السماحية النسبية(ϵ_r) $relative\ permitivity$ وهو مجرد من الوحدات.

$$\therefore\ D = K \in_o \mathrm{E} = \in \mathrm{E}$$

$$\in = \epsilon_o + \epsilon_o \chi_e = \epsilon_o(1 + \chi_e) = \mathrm{K}\epsilon_o$$

حيث :

$\in$: سماحية المادة $permitivity\ of\ material$ ووحداتها نفس وحدات ϵ_o .

للاوساط المتساوية الاتجاه isotropic : $\boxed{\therefore\ D = \in \mathrm{E}}$

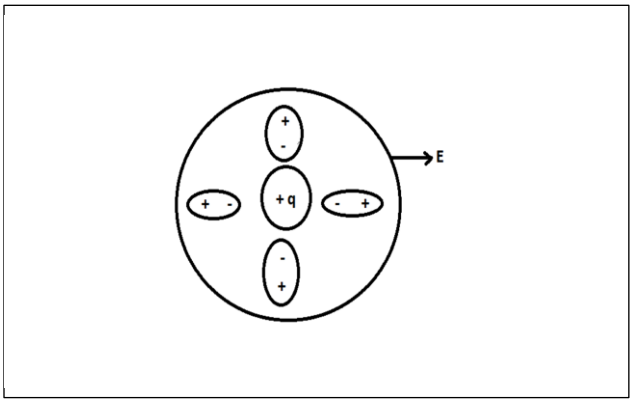
للفراغ K=1 و$\chi_e = 0$ وللغازات $1 > \chi > 0$ وللمواد الصلبة والسوائل $\chi > 1$

وتتراوح قيمة ثابت العزل بين الواحد والعشرة لمعظم المواد العازلة ويشذ الماء عن هذه القاعدة حيث ثابت العزل له يساوي (80) في درجات الحرارة الاعتيادية . ان السلوك الكهربائي للمادة يحدد كليا بالسماحية(ϵ) او بالتاثرية الكهربائية (χ_e) فاذا كان المجال الكهربائي المسلط على المادة العازلة شديد جدا فانه سيعمل على سحب الالكترونات خارج الجزيئات وبصورة تامة وبذلك تصبح المادة موصلة (انهيار العازل dielectric breakdown).

واقصى قيمة للمجال الكهربائي الذي يستطيع العازل تحمله دون ان يحدث انهيار كهربائي يدعى : شدة (قوة) العزل dielectric strength.

س/ اوجد الاستقطاب لشحنة نقطية تقع في نقطة الاصل لعازل متجانس ومتساوي الاتجاه.

الجواب/ لو كان لدينا شحنة نقطية في عازل متجانس ومتساوي الاتجاه (linear isotropic and homogenous) والوسط مميز بثابت العزل (K) وممتد الى المالانهاية , نستخدم قانون كاوس على سطح كروي نصف قطره (r) ومركزه ينطبق على الشحنة النقطية التي يفترض ان تقع في نقطة الاصل للسهولة.



الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل :

$$\oint \boldsymbol{D}.\boldsymbol{nda} = \boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{D}.4\pi\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{q} \implies \boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\boldsymbol{r}^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\boldsymbol{r}^3}\vec{\boldsymbol{r}} \ldots . (1)$$

$$\boldsymbol{D} = \in \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\in} \ldots \ldots \ldots . . (2)$$

نعوض (1) في (2) نحصل على :-

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{r}}}{4\pi \in \boldsymbol{r}^3} \ldots \ldots \ldots . (3)$$

$$\boldsymbol{but}: \in = \boldsymbol{K} \in_{\boldsymbol{o}}, \implies \quad \therefore \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\boldsymbol{K} \in_{\boldsymbol{o}}}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r}^3} \ldots \ldots . (4)$$

اي ان المجال الكهربائي يكون اصغر بمقدار K من المرات مما عليه الحال لوكان الوسط العازل غير موجود وهذا يعني ان وجود الوسط العازل يضعف المجال الكهربائي .

$$\boldsymbol{as}: \boldsymbol{P} = \epsilon_{\boldsymbol{o}}\chi_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{E} \ldots \ldots . . (5), \qquad \boldsymbol{and} \qquad \chi_{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{K} - \boldsymbol{1},$$

نعوض قيمة (E) في معادلة (4) وقيمة χ_e في معادلة (5) :-

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{K} - \boldsymbol{1})\epsilon_{\boldsymbol{o}}\frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\boldsymbol{K}\epsilon_{\boldsymbol{o}}}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r}^3} \Rightarrow \therefore \boldsymbol{P} = \frac{(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{q}}{4\pi\boldsymbol{K}}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r}^3}$$

(4 – 7) الشروط الحدودية على متجهات المجال : - *Boundary Conditions on the Field Vectors*

تطبق شروط الحدود على متجهات المجال لنتعرف على التغير الذي يطرأ على متجه المجال E ومتجه الازاحة الكهربائية D عندما يجتازان فاصلا بين وسطين وقد يكون الوسطين مادتين عازلتين مختلفتين في خواصهما او من مادة عازلة واخرى موصلة .

1) لنأخذ وسطين مختلفتين على تماس احدهما بالاخر ونفرض ان الوسط الفاصل بينهما يحمل شحنة طليقة ذات كثافة سطحية σ.

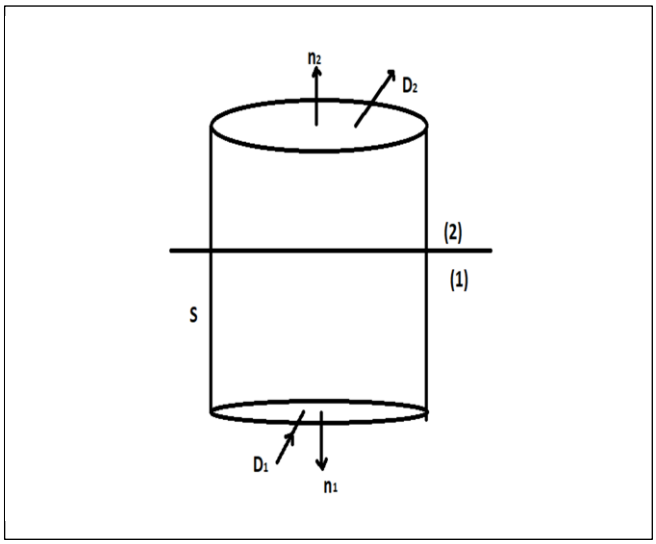
لنأخذ سطح اسطواني (S) على شكل علبة اقراص صغيرة بحيث يقطع السطح الفاصل ويحيط بمساحة منه قدرها (ΔS) كما في الشكل ادناه، فعند تطبيق قانون كاوس على السطح الفاصل (S) نحصل على :-

$$\oint \boldsymbol{D}.\boldsymbol{nda} = \boldsymbol{Q}$$

الشحنة الطليقة التي يحتضنها السطح (S) تساوي شحنة كثافة حجمية وسطحية اي :

$$\sigma\Delta\boldsymbol{S} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\rho_{\boldsymbol{1}} + \rho_{\boldsymbol{2}})\boldsymbol{V}$$

وبما ان الحجم يهمل لأن حجم السطوانة صغير جدا (ارتفاع السطح صغير بحيث يهمل اذا ماقورن مع قطر السطح الاسطواني) لذا يبقى فقط كثافة سطحية $\sigma\Delta S$ وعليه :-



$$D_2.n_2\Delta S + D_1.n_1\Delta S = \sigma\Delta S$$

$$as: n_1 = -n_2,$$

$$(D_2 - D_1).n\Delta S = \sigma\Delta S$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

حيث n_2 العمود على السطح الفاصل .

تشير معادلة (1) الى ان الانقطاع في المركبة العمودية للازاحة D يعطى بدلالة الكثافة السطحية للشحنة الطليقة على السطح الفاصل بين الوسطين. وبتعبير اخر ان المركبة للازاحة D تكون متصلة فيما لو لم تكن هناك شحنة طليقة على السطح الفاصل بين الوسطين ، اي ان :-

(الشحنات الحرة في المواد العازلة تساوي صفر) $\sigma = 0$

$$D_{2n} - D_{1n} = 0, \quad D_{2n} = D_{1n} \dots\dots\dots (2)$$

حيث D_{1n} و D_{2n} هما المركبتان العموديتان للازاحة الكهربائية في الوسطين العازلين الاول والثاني على التوالي , وهذه هي العلاقة الاولى الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين .

اما بالنسبة للمجال الكهربائي فان ($\nabla \times E = 0$) اي المجال محافظ وعليه بالامكان الحصول على المجال الكهروستاتيكي من اخذ انحدار الجهد باشارة سالبة ($-\nabla U$) وعليه سيكون :-

$$\oint E.d\ell = 0$$

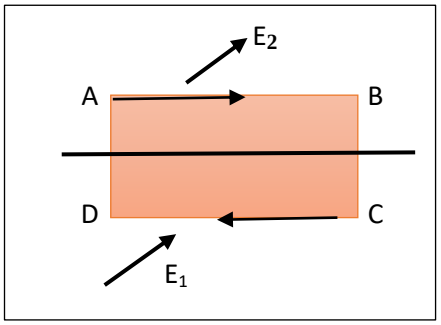
اي ان التكامل الخطي حول اي مسار مغلق يتلاشى ، دعنا نطبق هذه النتيجة على المسار المغلق $ABCD$ المبين بالشكل ادناه :-

لنفرض طول كل من جزئي المسار (AB و CD) يساوي $(\Delta\ell)$ وان طول BC و AD مهمل لذا ينتج :-

$$E_2.\Delta L + E_1.(-\Delta L) = 0 \Longrightarrow (E_2 - E_1).\Delta L = 0$$

$$\therefore\ E_{2t} = E_{1t} \dots\dots\dots (3)$$

وهما مركبتا شدة المجال الكهربائي الموازيتان للسطح الفاصل .



معادلة (3) تعني ان المركبة المماسة للمجال الكهربائي تكون متصلة عبر السطح الفاصل (مستمرة في الوسطين العازلين) وهذه هي العلاقة الثانية الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين .

ويمكن الحصول على العلاقة الثالثة والخاصة بالجهد على السطح الفاصل في كل من الوسطين وذلك بأخذ التكامل الخطي :-

$$\int E_{1t}.\Delta\ell = \int E_{2t}.\Delta\ell$$

$$\therefore\ \emptyset_1 = \emptyset_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

وهذا يعني ان الجهد لنقطة واقعة على الحدود الفاصلة له نفس القيمة في الوسط الاول والثاني وهذه هي العلاقة الثالثة الخاصة بالحدود الفاصلة بين مادتين عازلتين.

2) اذا كان الوسط رقم (1) موصل لأصبح $E_1=0$ لأن المجال صفر داخل الموصل , وهذا يعني ان الاستقطاب $P_1=0$ لأن : ($P = \epsilon_o \chi_e E$) كما ان الازاحة في هذا الوسط تتلاشى $D_1=0$ لأن :

$$D_1 = \epsilon_o E_1 + P_1 = 0$$

وبهذا تأخذ المعادلتان (1) و(3) الصيغتين الاتيتين :

$$E_{2t} = 0 \qquad D_{2n} = \sigma,$$

(4 – 8) القيم الحدودية لمسائل تحوي عوازل : -

Boundary value problems involving dielectrics

س/ اثبت ان الجهد خلال جسم عازل يحقق معادلة لابلاس .

الجواب/ من الصيغة التفاضلية لقانون كاوس في العوازل :-

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho \dots\dots\dots (1)$$

حيث ρ كثافة الشحنة الطليقة ، وبما ان العازل خطي ومتجانس وذا اتجاه متساو فان:

$$\mathbf{D} = \epsilon E \dots\dots (2)$$

وبتعويض معادلة (2) في (1) :

$$\therefore \nabla.E = \frac{\rho}{\epsilon} \dots\dots\dots\dots (3)$$

ولكن متجه المجال الكهروستاتيكي E يرتبط بالجهد اللا متجه حسب العلاقة :

$$E = -\nabla U \ldots\ldots (4)$$

بتعويض معادلة (4) في (3) :

$$\therefore \ \nabla . \nabla U = -\frac{\rho}{\in} \qquad \Longrightarrow \nabla^2 U = \frac{-\rho}{\in}$$

وبهذا نجد ان جهد العازل يحقق معادلة بويزون والفرق الوحيد بين المعادلة اعلاه والمعادلة المماثلة في حالة الفراغ هو احلال $\in$ بدلا عن $\in_o$ وفي معظم الحالات لايحتوي العازل على شحنة حرة طليقة موزعة خلال الحجم الذي تشغله اي ان

$$\rho = 0 \qquad ، \qquad \nabla^2 U = 0$$

تحت هذه الظروف يحقق الجهد معادلة لابلاس خلال جسم العازل حيث يمكن ان توجد الشحنات الطليقة على سطوح الموصلات او ان تتمركز على هيئة شحنات نقطية قد تغمس في العازل .

(4 – 9) كرة عازلة في مجال كهربائي : *Dielectric Sphere in a uniform electric field*

ندرس هنا التغيرات التي تطرأ على خطوط القوة عند وضع كرة عازلة نصف قطرها (a) في منطقة من الفضاء تحتوي اساساً على مجال كهربائي منتظم E_o. دعنا نفرض ان العازل خطي وذو اتجاه متساو ومتجانس ، وانه مميز بثابت عزل قدره K ، وان الكرة لاتحتوي على شحنة طليقة ، ونقطة اصل الاحداثيات واقعة في مركز الكرة تماماً وان اتجاه E_o يكون بالاتجاه Z . وعند ذلك يمكن التعبير عن الجهد بمثابة مجموعة توافقيات منطقية ويمكن تحقيق جميع شروط الحدود بواسطة اقل رتبتين من التوافقيات وعليه يكتب الجهد كالأتي لمنطقة الفراغ (1) الكائنة خارج الكرة العازلة :

$$U_1(r,\theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اما بالنسبة لمنطقة العازل (2) فنعبر عن الجهد بالمعادلة الأتية:

$$U_2(r,\theta) = A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2} \cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اذ ان C_2, C_1, A_2, A_1 هي ثوابت يتم تعيينها من الشروط الحدودية .

ان التوافقي الذي يحتوي على الحد r^{-1} غير ضروري لأنه يشير او يدل ضمناً على ان الكرة تحمل شحنة وهذا خلاف مافرضناه.

ويمكن اضافة حد ثابت الى المعادلتين (1) و (2) وتقتضي الحالة الى اضافة نفس الثابت الى كلتا المعادلتين ولهذا يمكن ان نجعله صفر دون ان يؤثر ذلك على الطبيعة العامة للمعادلتين . عند المسافات البعيدة عن الشحنة يبقى المجال الكهربائي محافظا على انتظامه وتصبح قيمة الجهد $U_1 = -E_o r \cos\theta$ وهذا يعني $A_1 = -E_o$,
اضف الى ذلك ان الجهد والمجال الكهربائي المصاحب له يصبحان مالانهاية عند مركز الكرة مالم تكن قيمة الثابت $C_2 = 0$ وهذا يدل ضمنا على وجود ثنائي قطب عيني عند المركز , اي ثنائي قطب عزمه لايتناسب مع ΔV . وبالتأكيد فان هذه الحالة هي خلاف ذلك حيث لايصبح الجهد ولا المجال الكهربائي المصاحب له لانهائيا في مركز العازل الخالي من الشحنة الطليقة وبذلك تكون قيمة الثابت C_2 صفراً ويمكن الحصول على بقية الثوابت C_1, A_2 من الشروط الحدودية (المذكورة سابقاً في بند الشروط الحدودية) . ان الاتصال في الجهد عبر السطح الفاصل بين العازل والفراغ يقتضي ان تكون :

$U_1=U_2$ عندما $r=a$ او:

$$-E_o a + C_1 a^{-2} = A_2 a \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

مادامت المركبة العمودية للازاحة D عند السطح الفاصل تساوي:

$$D_r = -\in \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

كما ان طبيعة الاتصال في D_r (لاوجود لشحنة طليقة على سطح العازل) تقتضي ان تكون $D_{1r}=D_{2r}$ عند البعد $r=a$ او

$$E_o + 2C_1 a^{-3} = -KA_2 \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

اما طبيعة الاتصال في E_t عند البعد $r=a$ فانه يكافئ المعادلة (3) , وبدمج المعادلتين (3) و (5) نحصل على :

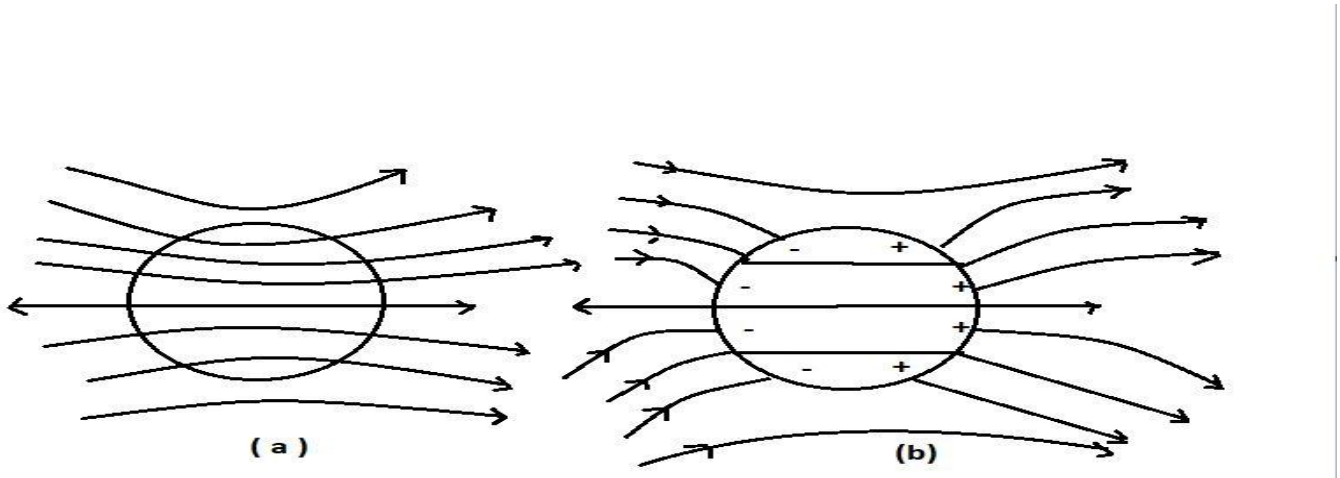
$$A_2 = -\frac{3E_o}{K+2} \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

$$and \quad C_1 = \frac{(K-1)a^3 E_o}{K+2} \dots\dots\dots\dots (7)$$

وعليه تمكنا من حل المسألة بشكل كامل فالجهد الكهربائي يعطى بالعلاقة (1) او (2) وتم ايجاد الثوابت C_2, A_2, C_1, A_1 ويمكن الحصول على مركبات D, E عند اي نقطة (r, θ, ϕ) بإجراء التفاضل . واضح من معادلة (6) ان $C_2=0$ لأن E_o ويعطى المجال الكهربائي داخل الكرة بالعلاقة الاتية :

$$E_2 = \frac{3}{K+2} E_o$$

ويبين الشكل ادناه خطوط الازاحة الكهربائية وخطوط القوة الهربائية:



التشوه الحاصل في مجال كهربائي منتظم نتيجة لوضع كرة عازلة فيه

(a) خطوط الازاحة الكهربائية (b) خطوط المجال الكهربائي

(4 – 10) القوة المؤثرة على شحنة نقطية مطمورة في عازل :

Forces on a point charge embedded in a dielectric

لغرض حساب القوة المؤثرة على شحنة نقطية يجب تعيين المجال الكهربائي وكثافة الشحنة السطحية وفقاً لأسلوب القيم الحدودية كما في البند السابق وعندها يمكن الحصول على القوة F من التكامل المنجز على السطح :

$$F = \oint_s \acute{E}\,\sigma da \ldots\ldots\ldots (1)$$

تمثل $\acute{E}$ المجال الكهربائي عند السطح da ناقصا ذلك الجزء من المجال الناشئ عن العنصر نفسه وهذا يعني ان :-

$$\acute{E} = E - E_s \ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث تمثل E_s المجال الكهربائي الناتج عن عنصر الشحنة السطحي σda .

ومن المهم ان لاتكون E_s مشمولة في المجال $\acute{E}$ وذلك لان الكمية $(E_s \sigma da)$ تمثل التأثير المتبادل بين عنصر الشحنة σda والمجال الخاص به وواضح ان هذا التاثير المتبادل الذاتي لاينتج قوة على العنصر , لكنه يسبب اجهادا سطحيا قدره :

$$f_s = \sigma E_s \ldots\ldots (3)$$

ناشئاً عن التنافر المتبادل بين الالكترونات (او الايونات الموجبة الفائضة) في الطبقة السطحية من الموصل. وهذا الاجهاد يتوازن مع قوى التماسك القوية في المادة التي يتكون منها العنصر .

لايمكن اهمال المجال الذاتي للعنصر السطحي المشحون σda حتى وان كانت مساحة العنصر متناهية في الصغر حسب المفهوم العيني (*Macroscopic view*) وذلك لأنه عند اي نقطة واقعة على سطح العنصر يبدو العنصر وكأنه مستو لانهائي وهذا يعني ان العنصر يحدث زاوية قدرها 2π لذا :-

$$\vec{E}_s = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\hat{n} \ldots\ldots\ldots (4)$$

حيث تمثل n العمود المقام على العنصر , ε السماحية الكهربائية للعازل الذي يكون على تماس معه وبهذا نجد ان الاجهاد f_s يتناسب طردياً مع σ^2 ويكون دائماً بهيئة شد مهما كانت علاقة الكثافة السطحيه. هدفنا في هذا البند هو حساب القوة المؤثرة على جسم موصل وبإستعمال شروط الحدود نجد ان المجال الكهربائي الكلي عند سطح الموصل يعطى بالعلاقة :-

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} n \ldots\ldots\ldots (5)$$

وبدمج المعادلات (2) و (4) و (5) نحصل على :-

$$\acute{E} = \frac{1}{2} E \ldots\ldots\ldots (6)$$

وبهذا تصبح القوة المؤثرة على الموصل :

$$F = \frac{1}{2}\oint E\,\sigma da \ldots\ldots\ldots (7)$$

لو ركزنا اهتمامنا على جسم موصل كروي وصغير مطمور في عازل سماحيته ε ممتد الى مالانهاية ونفرض ان الشحنة الكلية التي يحملها الجسم Q نصف قطره a ، ونفرض ان المجال الكهربائي في البداية منتظم في المنطقة المجاورة للموصل ونرمز له E_o وبتعيين الشروط الحدودية نجد ان الجهد يعطى بالعلاقة :

$$U(r,\theta) = U_o - E_o r\cos\theta + \frac{E_o a^3}{r^2}\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

والمجال الكهربائي بالمعادلة :

$$\left.\begin{aligned} E_r &= E_o\left(1+\frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \\ E_\theta &= -E_o\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

وكثافة الشحنة السطحية على سطح الكرة بالعلاقة :

$$\sigma(\theta) = \varepsilon E_r|_{r=a} = 3\varepsilon E_o\cos\theta + \frac{Q}{4\pi a^2} \ldots\ldots\ldots (10)$$

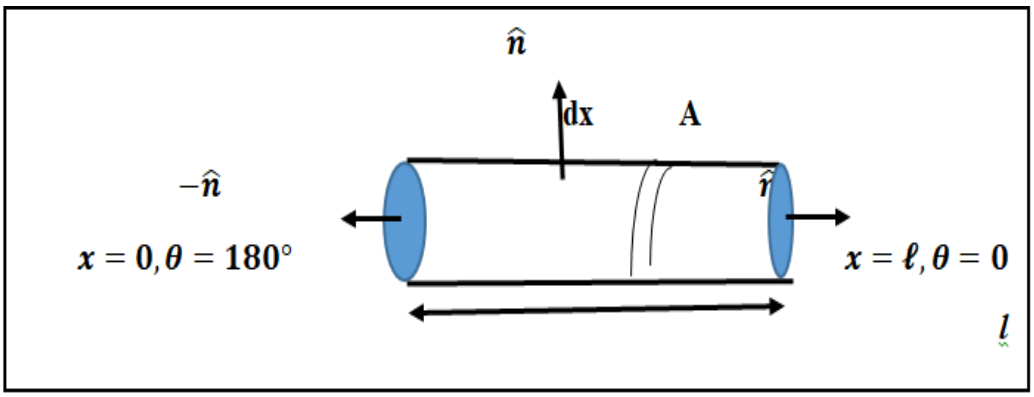
وبالتعويض في معادلة (7) يمكننا ايجاد القوة ,ومن التماثل نجد ان المركبة الوحيدة للقوة التي لاتساوي صفر هي تلك المركبة التي تكون بالاتجاه $\theta = 0$ اي بإتجاه z :

$$F_z = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (E_r)_{r=a}\cos\theta\,\sigma(\theta)2\pi a^2\sin\theta\,d\vartheta = E_o Q \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$F = QE_o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

اسئلة الفصل الرابع

س1/ ساق رقيق عازل مساحة مقطعه A يمتد على الاحداثي x بين النقطتين $x=0$, $x=\ell$ واتجاه الاستقطاب في الساق مع محور x معطاة بالمعادلة $P_x=ax^2+b$, جد الكثافة الحجمية لشحنة الاستقطاب والشحنة السطحية للاستقطاب على نهايتي الساق (اي كثافتي الشحنة المقيدة) وبين ان شحنة الاستقطاب الكلية المقيدة تتلاشى في هذه الحالة .



الجواب/ لايجاد كثافة الشحنة الحجمية المستقطبة او المقيدة نستخدم العلاقة:

$$\rho_P=-\nabla.P=-\frac{dP_x}{dx}=-\frac{d}{dx}(ax^2+b)=-2ax$$

ولايجاد كثافة الشحنة السطحية المقيدة نستخدم العلاقة :

$$\sigma_P=\mathrm{P.n}=P_x.\mathrm{n}=\mp P_x$$

لان من الرسم ناخذ اتجاه العمود n فقط باتجاه x عندما $cos180=-1,\ cos0=1$

$$when\ x=0,\ \ \sigma_P=-P_x]_{x=0}=-ax^2-b]_{x=0}=-b$$

$$when\ \ x=\ell\ ,\sigma_P=P_x]_{x=\ell}=ax^2+b]_{x=\ell}=a\ell^2+b$$

والشحنة السطحية للاستقطاب :

$$Q_{ts}=\int_A \sigma_b\,\mathrm{dS}$$

والشحنة الكلية للاستقطاب = الشحنة السطحية + الشحنة الحجمية : $Q_{tot}=Q_{ts}+Q_{tV}$

$$Q_{tot}=\int_V \rho_b\,\mathrm{dV}+\int_A \sigma_b\,dS=\int_0^{\ell}-2ax\,A dx+\int_A(-b+a\ell^2+b)\,dS=-aAx^2]_o^{\ell}+a\ell^2A$$
$$=-a\ell^2A+a\ell^2A=0$$

س2/ اثبت ان :- $\rho_b = \frac{-(K-1)}{K}\rho_f$ حيث K هو ثابت العزل .

الجواب / $as: \quad D = \in E \quad and \quad \in = K \in_o \qquad \therefore D = K \in_o E \Rightarrow \in_o E = \frac{D}{K}$

$$but: \quad P = \in_o \chi_e E$$

$$\therefore P = \chi_e \frac{D}{K} \qquad as: \ \chi_e = K - 1, \quad \therefore P = \frac{K-1}{K} D$$

بأخذ تباعد الطرفين :

$$\nabla . P = \frac{K-1}{K} \nabla . D, \qquad but \ \nabla . P = -\rho_P, \quad and \ \nabla . D = \rho_f \ ,$$

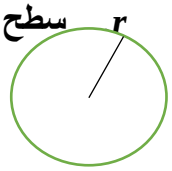
$then:$

$$\rho_P \ or \ \ \rho_b = -\frac{(K-1)}{K}\rho_f$$

<u>ويمكن حل السؤال بطريقة اخرى :-</u>

نأخذ شحنة نقطية q مغمورة في وسط عازل ثابت عزله K ونرسم سطح كاوس افتراضي نصف قطره r والشحنة q تكون بضمنه. ومن الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل:-

$$\oint_S D.n\,da = q$$



$$D.S = q, \ then \ \ D.4\pi r^2 = q, \quad \therefore D = \frac{q}{4\pi r^2} \ldots\ldots (1)$$

$$but \ D = \in E = K \in_o E \qquad \Rightarrow \mathrm{E} = \frac{D}{K \in_o} \ldots\ldots (2)$$

نعوض (1) في (2) :

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi \in_o r^2 K} \ \ldots\ldots (3)$$

$$but : D = \in_o E + P, \qquad then \ \ P = D - \in_o E \ldots\ldots (4)$$

نعوض (1) و(3) في (4) :

$$\therefore \mathrm{P} = \frac{q}{4\pi r^2} - \in_o \frac{q}{4\pi \in_o Kr^2} = \frac{q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{q}{4\pi r^2}\left(\frac{K-1}{K}\right)$$

$$\therefore P = D\left(\frac{K-1}{K}\right)$$

بأخذ تباعد الطرفين نحصل على:-

$$\nabla.\mathrm{P} = \nabla.\mathrm{D}\left(\frac{K-1}{K}\right) \qquad but \quad \nabla.P = -\rho_P, \quad and \quad \nabla.D = \rho_f$$

$$\Longrightarrow \rho_b = -\frac{K-1}{K}\rho_f$$

س3/ برهن العلاقة :- $\int_V PdV = \int_V \rho_P r dV + \int_S \sigma_P r\, dS$ التي تربط بين الاستقطاب وكثافات الشحنة المقيدة ρ_P, σ_P لوسط عازل حجمه V وسطحه S حيث r متجه موقعي .

الجواب / من المتطابقة التالية:

$$\nabla.\mathrm{XP} = \mathrm{X}\nabla.\mathrm{P} + \mathrm{P}.\nabla\mathrm{X} \qquad \text{but}: \quad -\nabla.\mathrm{P} = \rho_P$$

$$\therefore \ \nabla.\mathrm{XP} = -\mathrm{X}\rho_P + P.\hat{\imath}\frac{dx}{dx} = -\rho_P X + P_x \ldots\ldots(1)$$

وبنفس الطريقة:-

$$\nabla.\mathrm{yP} = -\rho_P y + P_y \ldots\ldots\ldots(2), \qquad \nabla.zP = -\rho_P z + P_z \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$as: \quad \vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$$

$$\therefore \ \nabla.\left(\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z\right)P = \nabla.\vec{r}P = -\rho_P\vec{r} + P$$

وبأخذ التكامل الحجمي للطرفين :

$$\int_V \nabla.(\vec{r}\vec{P})\, dV = \int_V -\rho_P\vec{r}dV + \int_V P\, dV$$

وباستخدام نظرية التباعد :-

$$\oint_S (rP).n da + \int_V \rho_P r\, dV = \int_V P\, dV$$

$$\oint rP.n\, dS + \int_V \rho_P r\, dV = \int_V P\, \mathrm{dV}$$

$$as: \ P.n = \sigma_P, \qquad \therefore \oint_S \sigma_P r\, dS + \int_V \rho_P r\, dV = \int_V P\, dV$$

س4/ مكعب من مادة عازلة طول ضلعه (L) ، فاذا كان الاستقطاب يعطى بالعلاقة : $\vec{P} = A\vec{r}$ حيث A كمية ثابتة وان $\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$: ونقطة الاصل للاحداثيات تقع في مركز المكعب . اوجد كثافات الشحنة المقيدة الحجمية والسطحية وبين ان الشحنة الكلية تساوي صفر.

الجواب /

$$\rho_P = -\nabla.P = -\nabla.(A\vec{r}) = -[A\nabla.\vec{r} + \vec{r}.\nabla A],$$

$$as\ \nabla.\vec{r} = 3\ and\ \nabla A = 0 \quad (constant)$$

$$\therefore\ \rho_P = -3A$$

$$\sigma_P = P.n = A\vec{r}.\vec{n} = Ar = A\frac{L}{2}$$

$$Q_{tot} = Q_{ts} + Q_{tv}$$

$$Q_{tot} = \int_V \rho_p\, dV + \int_A \sigma_P\, dS = -3AV + A\frac{L}{2}S$$

$$= -3AL^3 + A\frac{L}{2}(6L^2)$$

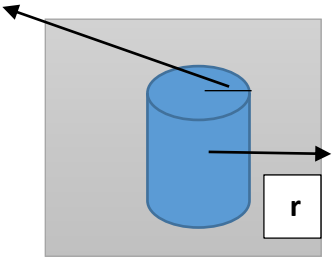
$$= -3AL^3 + 3AL^3 = 0$$

س5/ موصل اسطواني طويل جدا(طوله (L) نصف قطره a يحمل شحنة قدرها λ لوحدة الطول في وسط عازل له سماحية ثابتة ϵ ، جد المجال الكهربائي في نقطة $r > a$ عن الاسطوانة .

الجواب / من الصيغة التكاملية لقانون كاوس في العوازل :

(a)

وسط عازل



$$\oint D.n\, da = Q$$

$$Q = \int \lambda d\ell = \lambda \int d\ell = \lambda L$$

$$S = \int dS = \int n.da = 2\pi rL$$

$$D.2\pi rL = \lambda L \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$but\ D = \epsilon E \Longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

س6/ مكعب عازل ضلعه ($2cm$) احدى زواياه في نقطة الاصل ، اوجد الشحنة الكلية للمكعب علما بأن المجال الكهربائي معطى بالعلاقة: $\vec{E} = 6\hat{\imath}a^3E^4$.

الجواب/

$$Q = \oint_S D.n\,da = \oint_S \epsilon E.n\,da = \epsilon \oint_S E.n\,da$$

حسب نظرية التباعد : $\epsilon \oint E.nda = \epsilon \int \nabla.E\,dV = Q$

$$as:\ \nabla.E = \frac{dE_x}{dx} = \frac{d}{dx}(6\hat{\imath}a^3E^4) = 24\hat{\imath}a^3E^3$$

$$\therefore\ \epsilon \int 24\hat{\imath}a^3E^3\,dV = 24\hat{\imath}a^3E^3\epsilon \int dV = 24\hat{\imath}a^3E^3\epsilon \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 dz = Q$$

$$\therefore\ Q = 24 * 8\hat{\imath}a^3E^3\epsilon = 192\hat{\imath}a^3E^3\epsilon$$