الفصل الثالث

المرنان البصري Optical Resonator

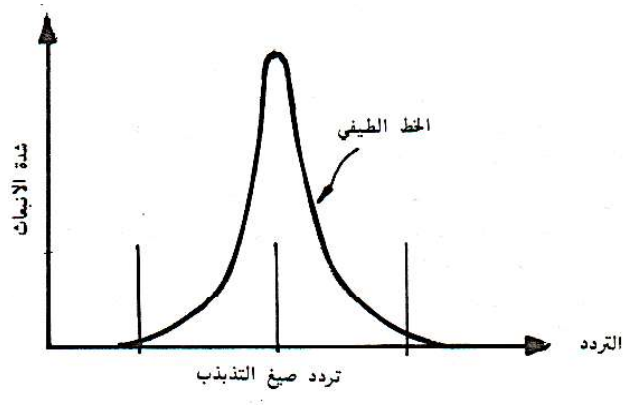
المرنان هو تجويف رنيني , يشكل مصدر التغذية الأسترجاعية في أجهزة الميزر والليزر وهو تصميم ضروري لدعم التكبير الحادث في الوسط الفعال نتيجة الأنبعاث المحفز وكذلك توجيهه والمحافظة على صيغة أحادية الموجة لأنبعاثه. ويتألف من مرآتين متقابلتين بحيث يتطابق محورهما البصري والمسافة بينهما بضع سينتمرات والقدرة الانعكاسية لهما عالية جدا احدهما شفافة جزئيا يخرج الليزر منها.

توضع المادة الفعالة في تجويف رنيني مناسب لتردد الاشعاع المنبعث بحيث يعمل هذا التجويف كمذبذب رنيني مكون ما يسمى بالموجات الو اقفة وهذا ما استخدم فعلا في حالة الميزر حيث تم تصميم تجويف معدني ذي ابعاد وشكل يناسب طول الموجة المايكروية بحيث يسمح لتذبذب صيغة واحدة تطابق تردد الأنبعاث المحفز للموجة شكل (3-1) . اما في حالة الليزر ونظرا لقصر موجته فان المسافة بين اي صيغتين للتذبذب صغيرة جدا وهذا يعني تواجد عدد كبير من صيغ التذبذب ضمن المنحني الذي يمثل غلاف الخط الطيفي للانبعاث شكل (3-2) لذلك يجب انتخاب صيغ قليلة منها عن طريق تجويف بشكل معين ولهذا السبب فان مرنان الليزر يختلف عن مرنان الميزر بنقطتين رئيسيتين هما :

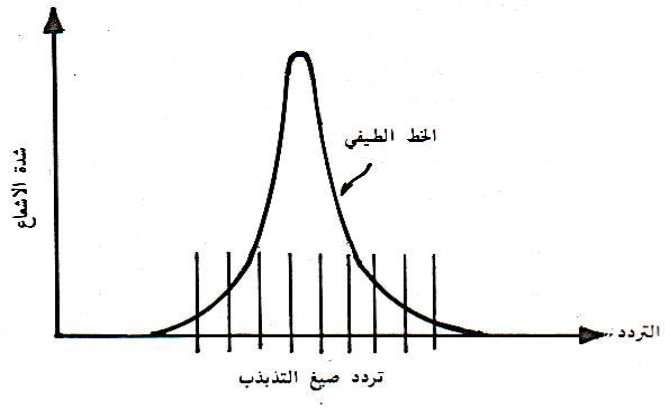
1- مرنان الليزر يكون مفتوح اي لاتوجد له جدران جانبية مسببة خسارة الحيود نتيجة فقدان جزء من الطاقة المتسربة من الجو انب.
2- ابعاد مرنان الليزر كبيرة جدا بالمقارنة بطول موجة الليزر.

س/ علل سبب استخدام مرنان مفتوح في مدى الاشعة المرئية ؟

ج/ في المرنان المفتوح تكون صيغة التذبذب القليلة والمنتخبة هي تلك المنتقلة باتجاه يوازي محور المرنان ، ورغم كونها خسارة لكن هذه الحالة تسمح باستمرار التذبذب للصيغ القليلة بينما بقية الصيغ تُفقد (تخرج من الجو انب) بعد رحلة واحدة داخل المرنان.



شكل (3-1)



شكل (3-2)

انواع المرنان

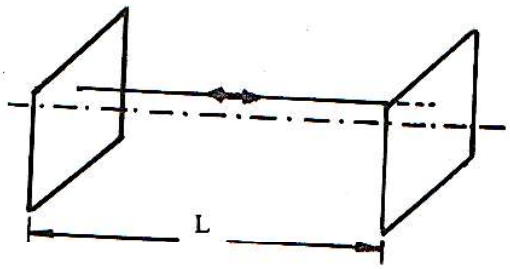
1- مرنان المرآتين المستويتين – المتوازيتين ((مرنان فابري-بيرو))

وهو يتألف من مرآتين مستويتين متقابلتين بشكل توازي أحدهما الأخرى وبالتالي يكون حساسا فأي خطأ بسيط في تطابق محوري المرآتين او المسافة بينهما يكون سببا في حيود معظم الاشعة وبالتالي زيادة الخسارة ولهذا السبب يكون التعامل مع المرايا المقعرة اسهل . ان طول المرنان يساوي عدد صحيح من أنصاف الطول الموجي :

$$L = n\lambda / 2$$

λ : طول موجة الليزر , L: طول المرنان , n: عدد صحيح . أما الترددات الرنينية فتكون :

$$\nu = n\left(\frac{c}{2L}\right)$$



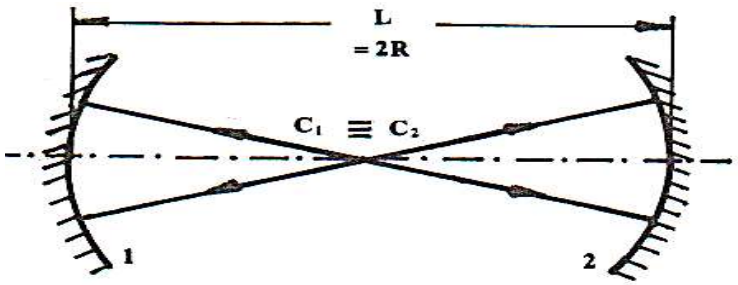
شكل (3-3)

2- المرنان الكروي

للتغلب على خسارة حيود الأشعة في مرنان فابري – بيرو, تحدب المرآتين قليلاً ونحو الخارج , ويكون على هيئة أشكال مختلفة منها :

أ- المرنان الكروي – المتحد في المركز:

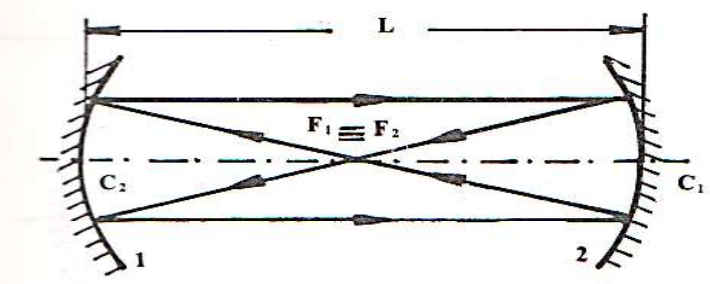
وفيه تكون المرآتان الكرويتان المقعرتان متساويتان في التكور, بحيث ينطبق مركز تكور الأولى على الثانية والمسافة بينهما تساوي قطر أحدهما $2R$. $L=2R$



شكل (3 -- 4) : المرنان الكروي ـ المتحد في المركز .

ب-المرنان الكروي – المتحد في البؤرة

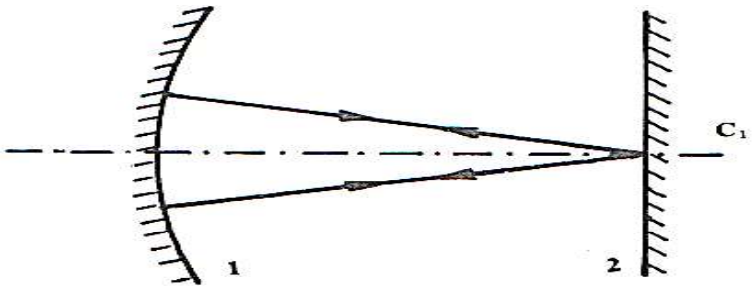
ويتألف أيضاً من مرآتين مقعرتين متساويتان في التكوروان المسافة الفاصلة بين المرآتين تساوي R اي ان بؤرة المرآة الأولى $F1$ تقع على بؤرة المرآة الثانية $F2$ وهذا يعني ان مركز تكور احدهما يقع على قطب المرآة الأخرى $L=R$



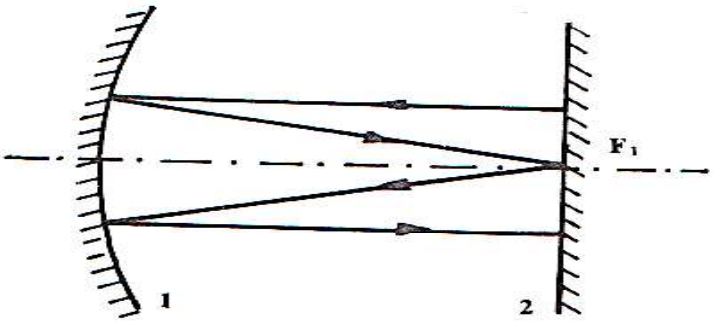
شكل (3-5)

ج- المرنان الكروي – المستوي

ويتألف هذا المرنان من مرآة كروية مقعرة واخرى مستوية كما يوضحه الشكل (3-6) لمرنان نصف كروي حيث توضع المرآة المستوية في مركز المرآة المقعرة بينما يوضح الشكل (3-7) مرنان نصف بؤري حيث توضع المرآة المستوية في بؤرة المرآة المقعرة



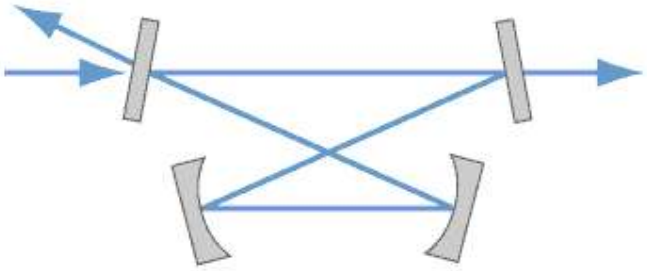
شكل (3-6) مرنان نصف كروي



شكل (3-7) مرنان نصف بؤري

3- المرنان الحلقي Ring Resonator

هو مرنان بصري يجعل الضوء يدور بشكل دائري عبر مجموعة من المرايا على شكل حلقة بحيث يمكنه "انتقاء" أو "فلترة" طول موجة محدد من الإشعاع الليزري بناءً على خواص التردد الرنيني كما موضح في الشكل ادناه



يختلف المرنان الحلقي عن المرنان الخطي (المستوي والكروي) من حيث ان الضوء المنعكس لن يعود أبدًا إلى مصدره مباشرةً لأننا لا نمتلك سقوطًا عموديا على أي مرآة وبالتالي الحصوا على صيغة تذبب نقية خالية من تأثيرات الضوء المنعكس مثل اللابؤرية والتخلص من الخسائر المترتبة على ذلك للوصول الى اعلى استقرارية للمرنان

يمكن الحصول على ترددات الرنين من خلال فرض الشرط بأن يكون التحول الطوري الكلي على طول مسار الحلقة L مساويًا لعدد صحيح n. ثم نحصل بسهولة على تعبير لترددات الرنين على النحو التالي

$$\nu = \frac{nc}{L}$$

يمكن للشعاع أن ينتشر إما في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة. وبالتالي، بشكل عام، سيتم تشكيل نمط موجة و اقفة في مرنان حلقي. أحد أهم مزايا استخدام المرنان الحلقي في الليزر هو القدرة على التحكم الدقيق في الطول الموجي لليزر. يمكن تعديل أبعاد الحلقة وخصائص المواد المستخدمة لتحديد التردد الرنيني، مما يتيح ضبط الطول الموجي بدقة فائقة.

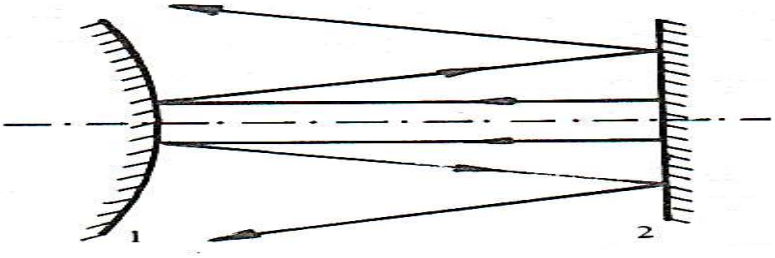
التطبيقات الرئيسية المرنان الحلقي

1. ليزر الدوائر الفوتونية المتكاملة للتحكم في الإشعاع الضوئي وتنظيم الطول الموجي لليزر.
2. فلاتر ليزر ضيقة النطاق: يساعد المرنان الحلقي في إنتاج ليزر بطول موجة دقيق جداً، وهو ما يعد مهماً في التطبيقات التي تتطلب أطوال موجية ثابتة ودقيقة، مثل الاتصالات الضوئية وأجهزة استشعار الليزر.
3. الاتصالات الليزرية: يمكن استخدامه لتصفية الطول الموجي الليزري المطلوب لضمان نقل المعلومات على قناة محددة وبدقة عالية.

في الليزر المستخدم للاتصالات، حيث تكون الأطوال الموجية المختلفة ضرورية لنقل البيانات عبر قنوات متعددة، يصبح المرنان الحلقي جزءًا أساسيًا في تصميم الليزر.

استقرارية المرنان

ان المرنان الكروي بصورة عامة يحوي مرآتين كرويتين اما ان تكون *R* نصف قطر تكور المرآة موجباً للمرآة المقعرة وسالباً للمحدبة ومالانهاية للمستوية وهذا ما يؤثر على خسارة الحيود وعدد صيغ التذبذب وترددها وسعتها وبذلك يكون المرنان أما مستقر والذي يكون فيه تقعر المرآتين بشكل يحفظ فيه الشعاع متمركزاً بالقرب من محور المرنان , أما المرنان غير المستقر ففيه تكون أشعة الضوء تواصل حركتها بعيداً عن محور المرنان فينتج عنها خسارة والشكل (3-8) لمرنان غير مستقر.



الشكل (3-8) مرنان غير مستقر

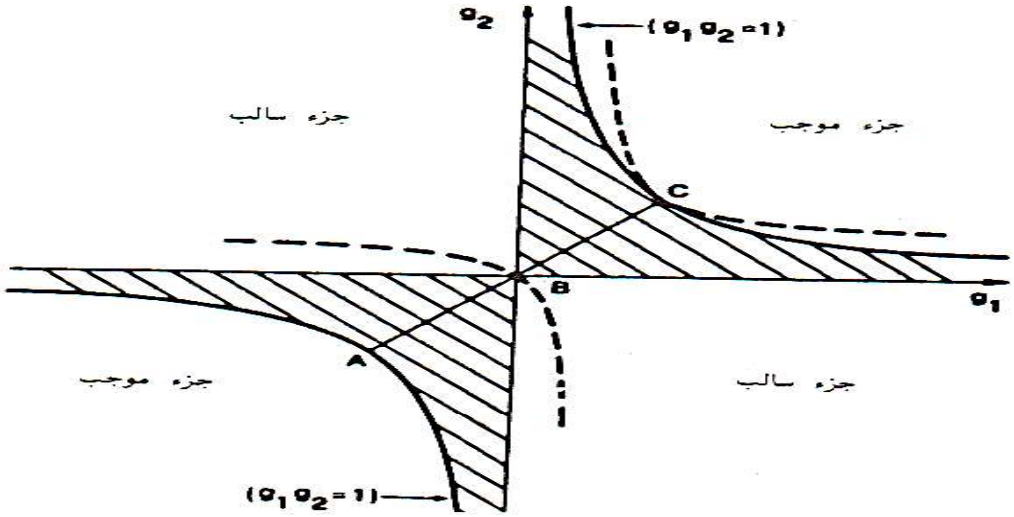
ان استقرارية المرنان تخضع للمقادير R_1,R_2,L والشرط هو : $0 \leq g_1g_2 \leq 1$

اذ ان g_1 و g_2

$$g_1 = 1- (L/ R_1)$$

$$g_2 = 1- (L/ R_2)$$

ويمكن تمثيل شرط الأستقرار بمخطط يعرف بمخطط الأستقرار كما يوضحه الشكل (3-9) , تكون فيه *g1* على محور السينات و*g2* على محور الصادات , ثم نرسم منحني الحدود $g_1g_2 = 1$ والمناطق المظللة تحقق الشرط (تخضع لمرنان مستقر) وخارج المنطقة المظللة تخضع لمرنان غير مستقر. أما الخط المستقيم والذي يصنع زاوية مقدارها (45^o) مع محوري (g_1) و (g_2) فيمثل أعداد المرنان التي تملك مرآتيهما نصف قطر تكور متساوي , اذ ان *(A)* تمثل مرنان متحد في المركز و*(B)* متحد في البؤرة و*(C)* ذو المرآتين المستويتين .



الشكل (3-9)

صيغ التذبذب للمرنان

لحساب صيغ التذبذب في المرنان يجب حساب خسارة الحيود في المرآتين وكذلك يدخل شكل المرآتين و ابعادهما بالاضافة الى المسافة بينهما في مثل هذه الحسابات .

أ- المرنان ذو المرآتين المستويتين – المتوازيتين

نفرض ان مرآتي المرنان مربعة الشكل وطول ضلعها ($2a$) والمسافة بين المرآتين L فأن ترددات الرنين تكون

$$\nu = \frac{c}{2}\left[\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{l}{2a}\right)^2\right]^{1/2}$$

حيث ان n , m , l اعداد صحيحة

الصيغ الطولية للتذبذب

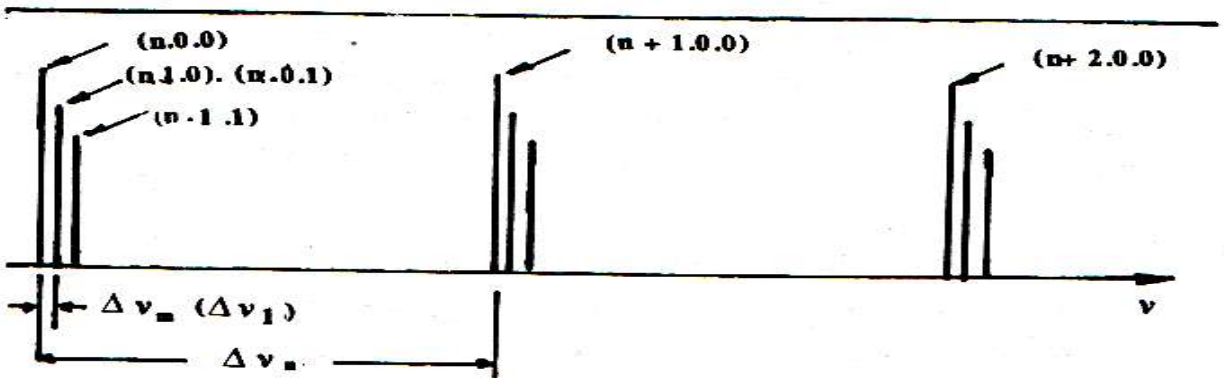
هي صيغ التذبذب التي يكون لها نفس المقادير m , l وتختلف بالمقدار n سوف تختلف فيما بينها فقط في كيفية توزيع المجالين الكهربائي والمغناطيسي على امتداد محور المرنان Z (اي طوليا) والفاصلة الترددية $\Delta\nu_n$ بين صيغتين طوليتين متعاقبتين تختلفان بالمقدار n بمقدارواحد تكون بحدود بضع مئات ميكاهيرتز تعطى بالمعادلة

$$\Delta\nu_n = \frac{c}{2L}$$

الصيغ المستعرضة للتذبذب

هي صيغ التذبذب التي يكون لها نفس المقادير n وتختلف بالمقدار m او المقدار l اوكليهما سوف تختلف فيما بينها فقط في كيفية توزيع المجالين الكهربائي والمغناطيسي بالاتجاه المستعرض والفاصلة الترددية $\Delta\nu_m$ بين صيغتين مستعرضتين متعاقبتين تختلفان بالمقدار m بمقدارواحد تكون بحدود بضع ميكاهيرتزوتعطى بالمعادلة

$$\Delta\nu_m = \frac{c\ L}{8\ n\ a^2}\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

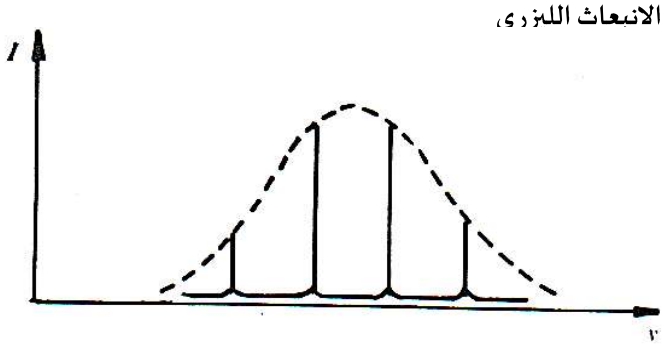


الشكل (3-10) يوضح صيغ التذبذب الرنينية لمرنان المرآتين المستويتين المتوازيتين

سؤال : كم صيغة تذبذب تقع ضمن خط الأنتقال لليزر؟

الجواب : ان عدد صيغ التذبذب الطولية تعتمد على :

1. عرض الخط الطيفي
2. طول مرنان الليزر ، فكلما زاد طول المرنان كلما قلت الفاصلة الترددية بين اي صيغتين وهذا يؤدي الى تذبذب عدد اكبر من الصيغ ضمن خط الانبعاث الليزري



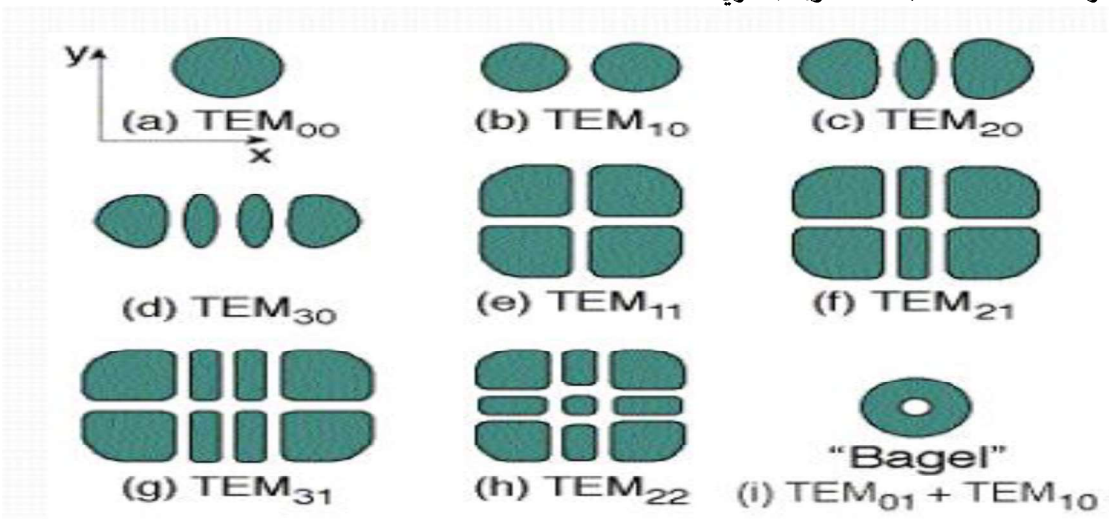
الشكل (3-11) يوضح صيغ التذبذب الطولية

اما عدد صيغ التذبذب المستعرضة TEM_{ml} فتعتمد على

-1 شكل المرآة

-2 حجم المرآة

عندما تتواجد عدد من صيغ التذبذب في نتاج الليزر يقال عنه ليزر متعدد الصيغ ويمكن عمليا الحصول على تذبذب صيغة مستعرضة واحدة بادخال عوامل خسارة تعمل على اضمحلال الصيغ المستعرضة الاخرى وذلك يتم بوضع حاجز ذو فتحة دائرية يمكن التحكم بمقدارها لتعمل على المحور البصري للمرنان والغاية منها حجب جميع صيغ التذبذب عدا الصيغة المستعرضة TEM_{00} المطابقة للمحور البصري



الشكل (3-12) يوضح صيغ التذبذب المستعرضة

الشكل (3-12) يوضح صيغ التذبذب المستعرضة ، حيث تمثل المناطق المظلمة الأماكن التي يضرب فيها إشعاع الليزر. و يسمى النمط TEM_{00} بالنمط الأساس الكاوسي ويحتوي على 85% من طاقة حزمة الليزر الناتجة وذات شكل دائري منتظم ، ويمثل النمط الأكثر تفضيلا في تشغيل منظومات الليزر. بينما يحدث النمط الأعلى رتبة مثل TEM_{10} بسبب وجود الشوائب في الوسط الفعال والمرايا ويكون شعاع الليزر الناتج اكثر انفراجا.

عموما ، يتم تمييز كل نمط مستعرض (TEM) بمعاملين: TEM_{ml}

ml هي أعداد صحيحة. بافتراض انتشار الحزمة في اتجاه z:

m = عدد المناطق المظلمة على طول المحور x عدا النمط الاساس.

l = عدد المناطق المظلمة على طول المحور y عدا النمط الاساس.

هناك نمط عرضي واحد لا يتناسب مع هذا التصنيف وله اسم خاص (حسب شكله) لأهميته: "باجل Bagel". وهي تتألف من TEM_{01} و TEM_{10} تتأرجح معًا.

ب – المرنان المتحد البؤرة

نفرض ان مرآتي المرنان مربعة الشكل وطول ضلعها $(2a)$ والمسافة بين المرآتين L اكبر بكثير من a ولحساب قدر البقعة $\omega(z)$ في الموضع Z بحيث ان مركز المرنان ليمثل نقطة الاصل $(Z=0)$ ستكون المعادلة : *spot size*

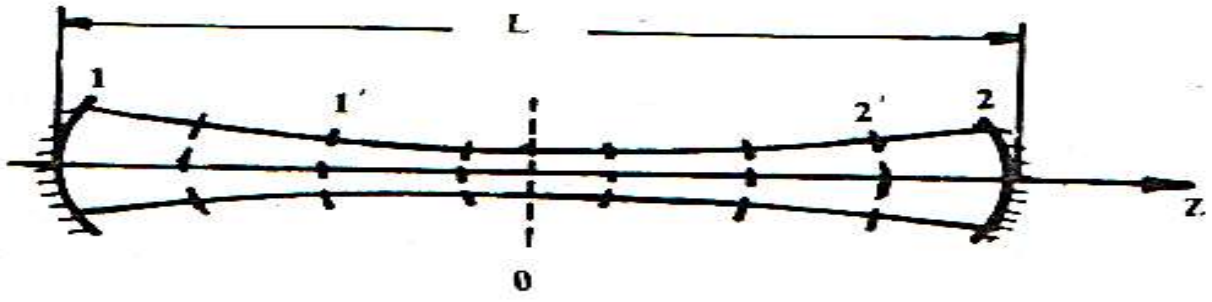
$$\omega(z) = \omega_0 \left[1 + \left(\frac{2Z}{L}\right)^2\right]^{1/2}$$

حيث ω_0 تمثل قدر البقعة عند مركز المرنان $Z=0$ وتعطى بالمعادلة

$$\omega_0 = \left[\frac{L\lambda}{2\pi}\right]^{1/2}$$

في الشكل(3 -13) يلاحظ ان للحزمة خصر يكون في الموضع $Z=0$ في هذه الحالة يكون ω_0 يمثل قدر البقعة عند الخصر كذلك يمكن ملاحظة ان قدر البقعة عند المرآتين اي عند $z = \mp\frac{L}{2}$ يكون :

$$\omega = \left[\frac{L\lambda}{\pi}\right]^{1/2}$$



الشكل(3 -13)

كذلك توصف حزمة الليزر بدلالة تكور جبهة الموجة ويعبر عن نصف قطر تكور جبهة الموجة عند موضع ما داخل المرنان على امتداد محوره Z بالمقدار $R(z)$ ويعطى بالمعادلة :

$$R(z) = Z\left[1 + \left(\frac{L}{2Z}\right)^2\right]$$

- عند الموضع $Z=0$ فان $R(z) = \infty$ اي ان شكل جبهة الموجة مستوي
- عند الموضع $z = \mp\frac{L}{2}$ (اي عند المرآتين)فان $R(z) = L$ اي ان شكل جبهة الموجة كروي

عامل النوعية للمرنان Q *quality factor*

من اساسيات مناقشة عمل اي مرنان حساب عامل النوعية Q يعرف بأنه نسبة الطاقة المختزنة في الوسط الفعال E_s إلى الطاقة المفقودة في كل دورة للشعاع الليزري ضمن المرنان E_l ويعطى بالمعادلة الاتية :

$$Q = \frac{2\pi\ E_s}{E_l}$$

حيث E_s تمثل الطاقة المخزونة بينما E_l تمثل الطاقة المتبددة خلال دورة واحدة

ان التجويف الرنيني ذو عامل النوعية العالي يخزن الطاقة بصورة جيدة والعكس صحيح ويتراوح عامل النوعية لمرنان الليزر بين $10^5 - 10^8$.

اضافة لذلك يرافق عامل النوعية العالي الخط الطيفي الضيق نسبيا في حين يرافق عامل النوعية الواطيء الخط الطيفي العريض نسبيا وهذه العلاقة بين Q وعرض الخط الطيفي يمكن التعبير عنها بالمعادلة

$$Q = \frac{v}{\Delta v} = \frac{4\pi vL}{c(1-R_1\ R_2)}$$

حيث $R_1\ R_2$ انعكاسية المرآتين لمرنان الليزر

نظريا لو افترضنا ان الطاقة المتبددة تساوي صفر يكون لعامل النوعية قيمة لا نهائية ولكن عمليا لابد من وجود خسارة وهذا يعني ان الخط الطيفي له تعريض بسيط وحاليا يمكن تقليص عرض الخط الطيفي لقيمة تقارب 1 هرتز.

مثال: احسب التردد وعامل النوعية و عرض خط الانبعاث $(\Delta\nu)$ لمنظومة ليزر البنفسجي علما ان مرآتيه ذات انعكاسية (95%، 100%) وطول المرنان $(1m)$؟

الحل/

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^{8}}{400\times10^{-9}} = 750 \times 10^{12}\ Hz$$

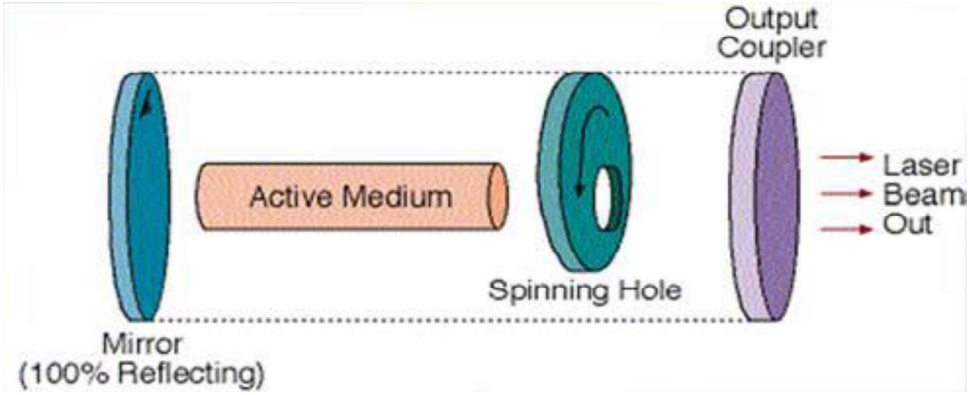
$$Q = \frac{4\pi\nu L}{c(1 - R_1\ R_2)} = \frac{4 \times 3.14 \times 750 \times 10^{12} \times 1}{3 \times 10^{8}(1 - (1\ \times 0.95))} = 6.28 \times 10^{8}$$

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} \quad \therefore \quad \Delta\nu = \frac{\nu}{Q} = \frac{750\times10^{12}}{6.28\times10^{8}} = 1194267.5\ Hz$$

مفتاح عامل النوعية $Q - switching$

وهو تقنية للحصول على نبضات قصيرة نانوثانية ذات طاقة عالية (ولكن ليست فائقة القصر) من الليزر، وتسمح هذه التقنية بإنتاج نبضات ضوئية ذات طاقة أعلى بكثير مما يمكن أن ينتجه نفس الليزر إذا كان يعمل في وضع الموجة المستمرة عن طريق التحكم في مستوى الخسارة خلال عملية الضخ ، يتم زيادة التأهيل العكسي إلى أقصى قيمة ممكنة أكبر بكثير من قيمة كسب العتبة و ثم تقليل مستوى الخسارة إلى القيمة الأساسية. تحدث عملية الانبعاث المُحفَّز في فترة زمنية قصيرة.

يوضح الشكل (3-14) فكرة التحكم في الخسارة حيث يتم وضع قرص دائري بفتحة حوله المحور البصري لليزر. عندما يتم منع الأشعة من الوصول الى المرآة الموجودة خلف القرص ، يتم زيادة التأهيل وتضخيمه ، وعندما يصل الثقب الموجود في القرص إلى المستوى الذي يسمح بمرور الاشعة يصبح المحور البصري أقل خسارة بينما يكون التأهيل هو الأعلى ، سيؤدي ذلك إلى انبعاث نبضة ليزر في فترة زمنية قصيرة مما يعني طاقة عالية.



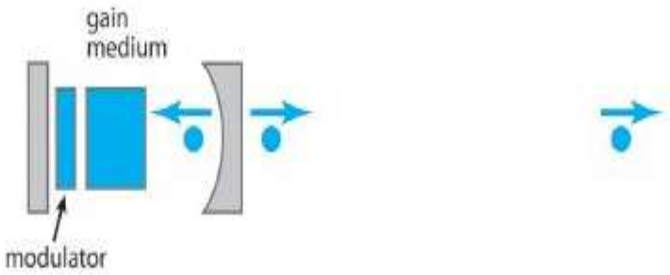
الشكل (3-14)

أنواع مفتاح عامل النوعية $Q-switching$

تستخدم عملياً العديد من الطرق للتأثيرعلى قيمة مفتاح عامل النوعية الليزري وتصنف إلى نوعين:

1- مفتاح عامل النوعية الإيجابي $Active\ Q-switching$

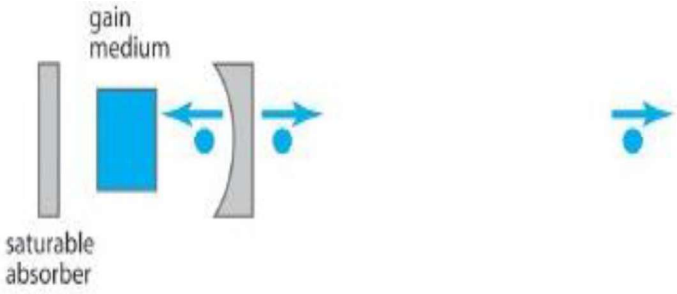
يتم من خلال استخدام التقنيات الكهرضوئية، الصوتية–الضوئية، والميكانيكية حيث تعتمد هذه الطرق استخدام تحكم خارجي كما موضح في الشكل(3-15)، حيث يتم التحكم في الخسائرباستخدام عنصرتحكم نشط (قرص كما الشكل (3-14)، تعتمد طاقة النبضة الناتجة ومدة النبضة على الطاقة المخزنة في الوسط الفعال .



الشكل(3-15)

2- مفتاح عامل النوعية السلبي $Passive\ Q-switching$

يتم من خلال استخدام مادة ماصة قابلة للإشباع صبغية أو بلورية حيث يتم إحداث التغيير في معامل الجودة من داخل المرنان الليزرية كما موضح في الشكل(3-16). عند وضع هذه المادة ذات الامتصاص العالي لطول موجة الليزرداخل مرآة المرنان فإنها ستمنع الانعكاس، وسيبدأ تخزين الطاقة ضمن الوسط الفعال ونظراً لزيادة الربح أثناء عملية الضخ وتجاوز الخسارة ذهاباً و إياباً تزداد كثافة الإشعاع داخل المجاوب مما يؤدي إلى إشباع المادة الماصة القابل للإشباع وتصبح شفافة لطول موجة الليزرمما يؤدي إلى تحرير الطاقة المختزنة على شكل نبضة قصيرة زمنياً بطاقة عالية.



الشكل(3-16)

مميزات عامل النوعية السلبي مقارنة بعامل النوعية الإيجابي

نظراً لأن معامل الجودة السلبي يتم التحكم به بواسطة أشعة الليزر نفسها فإنه لا يحتاج إلى تحكم خارجي كتطبيق جهد ليبدأ عملهكما في الإيجابي وبالتالي يوفر تصميم بسيط مما يؤدي إلى أنظمة صغيرة ومنخفضة التكلفة.

عيوب عامل النوعية السلبي مقارنة بعامل النوعية الإيجابي

تتمثل العيوب الرئيسية لمفتاح الجودة السلبي في عدم القدرة على التحكم بطاقة النبضة عند تثبيت التصميم إضافة إلى عدم التحكم بلحظة خروج النبضة بدقة.

استخدام معامل الجودة السلبي يضيف خسائر على الوسط نتيجة امتصاصه للإشعاع مما يجعل مردود الليزر في حال استخدام معامل جودة سلبي أقل منه في حالة معامل الجودة الصوتي أو البصري.

عامل الجودة لحزمة الليزر M^2

طبقا لنظرية الحيود للموجات الضوئية، فأنه من المستحيل ان تنتشر موجة ضوئية في الوسط المادي بشكل موازي من دون حدوث انحراف معين يؤدي الى توسعها. وعليه فان انفراجا بقدر معين سيحصل لموجة الليزر عند انتشارها في الغلاف الجوي

فيزداد نصف القطر الأساسي r_0 لحزمة الليزر ليصل الى نصف قطر نهائي r تدريجيا وبتناسب طردي مع كل من الارتفاع H والطول الموجي لحزمة الليزر (λ) بوحدة المتر طبقا للمعادلة الأتية:

$$r = r_0 \sqrt{[1 + \left(\frac{\lambda \, \mathbf{H}}{\pi \, r_o^2}\right)^2]}$$

من أجل تحديد دقة وجودة حزمة الليزر بشكل عملي، من الضروري حساب عامل الجودة لحزمة الليزر M^2 او ما يسمى ***beam propagation factor*** الذي يسمح بتحديد الأداء الحقيقي لأي نظام بصري بحيث تتم مقارنة الأداء العملي للنظام البصري بأدائه النظري.

ويتم حساب عامل الجودة M^2 من خلال مقارنة نصف قطر البقعة للمجال القريب والبعيد وطبقا للمعادلة ادناه:

$$M^2 = \frac{r}{r_o}$$

في الحالة النظرية المثالية، تكون قيمة M^2 مساوية للواحد بينما تزداد قيمة M^2 عن الواحد في الحالة العملية عند انتشارها في الغلاف الجوي

اسئلة الفصل الثالث

س1/ حدد الاستقرارية للمرنان عندما يكون :

1- مرنان ذات مرآتين مستويتين متوازيتين (فابري –بيرو)

2- مرنان كروي فيه ($L= 10\ cm$) ($r_1= 5\ cm$) ($r_2= 20\ cm$)

3- مرنان كروي متحد البؤرة

الجواب : ان استقراريه المرنان تخضع للمقادير R_1,R_2,L والشرط هو : $0 < g_1g_2 < 1$

1- مرنان ذات مرآتين مستويتين متوازيتين (فابري –بيرو)

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} = 1 - \frac{L}{\infty} = 1$$

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} = 1 - \frac{L}{\infty} = 1$$

$g_1g_2 = 1$ المرنان شبه مستقر (على حدود منطقة الأستقرار)

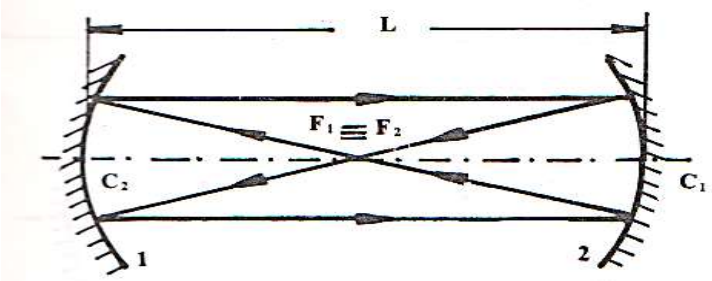
2- مرنان كروي فيه ($L= 10\ cm$) ($r_1= 5\ cm$) ($r_2= 20\ cm$)

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} = 1 - \frac{10}{5} = -1$$

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} = 1 - \frac{10}{20} = 0.5$$

$g_1g_2 = -0.5$ المرنان غير مستقر

3- مرنان كروي متحد البؤرة



$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} = 1 - \frac{L}{L} = o$$

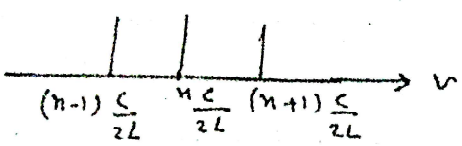
$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} = 1 - \frac{L}{L} = o$$

$g_1g_2 = 0$ المرنان شبه مستقر (على حدود منطقة الأستقرار)

س2/ برهن ان الفاصلة الترددية بين اي صيغتين طولية تكون مساوية لمرنان فابري بيرو يدعم صيغة التذبذب المستعرضة TEM_{00}

$$v = \frac{c}{2}\left[\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{l}{2a}\right)^2\right]^{1/2}$$

بمقارنة TEM_{ml} مع TEM_{00} نجد $m=0$ ، $l=0$



$$v_n = \frac{c}{2}\left[\left(\frac{n}{L}\right)^2\right]^{1/2} = n\,\frac{c}{2L}$$

$$v_{n+1} = (n+1)\,\frac{c}{2L}$$

$$v_{n-1} = (n-1)\,\frac{c}{2L}$$

$$\Delta v_n = v_n - v_{n-1} = n\,\frac{c}{2L} - (n-1)\frac{c}{2L} = \frac{c}{2L}(n-n+1) = \frac{c}{2L}$$

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = (n+1)\frac{c}{2L} - n\frac{c}{2L} = \frac{c}{2L}((n+1-n) = \frac{c}{2L}$$

وهذا يعني ان الفاصلة الترددية بين اي صيغتين طولية متتاليتين هو مقار ثابت $\frac{c}{2L}$

س3/ احسب عدد الصيغ الطولية ضمن خط الانبعاث الليزري لمرنان فابري –بيرو طوله $1m$ ومعامل النوعية هو 1×10^6 يدعم صيغة التذبذب المستعرضة TEM_{00} علما ان طول موجة الليزر $1.06\ \mu m$ ومعامل انكسار الوسط الفعال 1.5 .

$$Q = \frac{v}{\Delta v}$$

$$\Delta v = \frac{c}{Q\ \lambda} = \frac{3\times10^8}{1\times10^6\times1.06\times10^{-6}} = 2.8\times10^8\ Hz$$

$$\Delta v_n = \frac{c}{2L\,n} = \frac{3\times10^8}{2\times1\times1.5} = 10^8\ Hz$$

$$N = \frac{\Delta v}{\Delta v_n} = \frac{2.8\times10^8}{10^8} \approx 3\ mode$$

س4/ ليزر CO_2 طول موجته $10.6\ \mu m$ و انبعاثه يكون بحزمة كاوسية قطرها $2mm$ عند مرآة الخروج الليزري علما ان طول المرنان الكروي $10\ cm$ احسب زاوية الانفراج وقدر حزمته عند مركز المرنان وعند المرآتين ؟

$$\emptyset = k\frac{\lambda}{D} = 0.64\ \frac{10.6\times10^{-6}}{2\ \times10^{-3}} = 3\times10^{-3}\ radian$$

$$\omega_0 = \left[\frac{L\lambda}{2\pi}\right]^{1/2} = \left[\frac{10\times10^{-2}\times10.6\times10^{-6}}{2\ \times3.14}\right]^{1/2} = 4.11\ \times10^{-4}\ m$$

$$\omega = \left[\frac{L\lambda}{\pi}\right]^{1/2} = \left[\frac{10\times10^{-2}\times10.6\times10^{-6}}{3.14}\right]^{1/2} = 5.81\times10^{-4}\ m$$

س5/ برهن ان مسافة التشاكه لأنبعاث الليزر هي $d = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ وجد قيمتها اذا كان تعريض خط الانبعاث هو *450 MHz* ؟

$$v = \frac{c}{\lambda} = c\lambda^{-1}$$

الاشارة السالبة تدل ع التناسب العكسي $dv = -c\lambda^{-2}\, d\lambda$

$$\Delta v = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

$$c = \frac{d}{t} \qquad d = ct = c/\Delta v$$

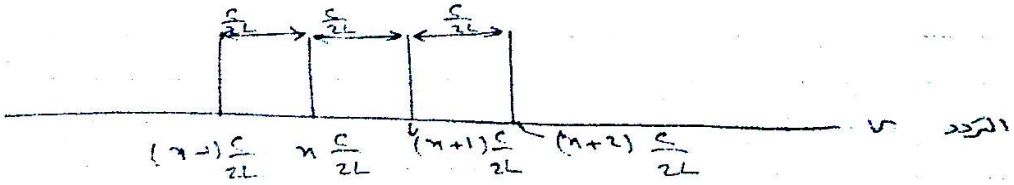
$$d = \frac{c}{\Delta v} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

$$d = \frac{c}{\Delta v} = \frac{3 \times 10^8}{450 \times 10^6} = 0.6\ m$$

س6/ مرنان بصري طوله *0.1 m* ، احسب الفاصلة الترددية واحسب عدد الصيغ المحورية في المرنان اذا كان اتساع الخط الطيفي *3 GHz* (ارسم شكلا توضيحيا).

$$\Delta\nu_n = \frac{c}{2L} = \frac{3\times10^8}{2(0.1)} = 1.5 \times 10^9\ \text{Hz}$$

$$N = \frac{\Delta v}{\Delta v_n} = \frac{3 \times 10^9}{1.5 \times 10^9} = 2\ mode$$



س7/ مرنان متحد البؤرة طوله *1 m* استخدم في ليزر هيليوم – نيون . احسب حجم البقعة في مركز المرنان وعند مرآتيه علما ان طول موجة الليزر تساوي *632.8 nm* ؟

$$\omega_0 = \left[\frac{L\lambda}{2\pi}\right]^{1/2} = \left[\frac{1 \times 632.8 \times 10^{-9}}{2 \times 3.14}\right]^{1/2} = 3.17 \times 10^{-4}\ m$$

$$\omega = \left[\frac{L\lambda}{\pi}\right]^{1/2} = \left[\frac{1 \times 632.8 \times 10^{-9}}{3.14}\right]^{1/2} = 4.4 \times 10^{-4}\ m$$