د. مُظفر جاسم
2018

الفصل الأول

النظرية النسبية الخاصة

Special Theory of Relativity

1-1: ما هي الفيزياء الذرية؟ What is Atomic Physics?

الفيزياء الذرية هو فرع من الفيزياء يهتم بدراسة الذرّة the atom وهيكليتها، وحالاتها للطاقة energy states وتفاعلاتها مع الجسيمات الأخرى والمجالات الكهربائية والمغناطيسية.

وفي كثير من المصادر العلمية تُدرج الفيزياء الذرية ضمن مواضيع الفيزياء الحديثة، كما ويتداخل مفهوم الفيزياء الذرية أحياناً مع مفهوم الفيزياء النووية، ولكنه يختلف عنه، إذ أن الأخير معني بالتفاعلات النووية التي تحدث في النواة فقط، في حين أن الفيزياء الذرية تُعنى بالذرة ككل. وكذلك يتداخل مع مفهوم الفيزياء الجزيئية الذي يُعنى بدراسة الخواص الفيزيائية للجزيئات والأطياف ودراسة الروابط الكيميائية التي تربط الذرات المختلفة مكونة الجزيئات.

وقد بُرهن أن الفيزياء الذرية تمثل تطبيقاً ناجحاً جداً للميكانيك الكمي quantum mechanics والذي يمثل ركيزة أساسية للفيزياء الحديثة.

2-1: مقدمة في النسبية Introduction to Relativity

تُعتبر النظرية النسبية الخاصة التي صاغها آينشتاين عام 1905 إحدى الانجازات العلمية الكبيرة في القرن العشرين، وكانت ثمرة لجهود العديد من العلماء الذين سبقوه في القرن التاسع عشر، خاصة ما طرحه ماكسويل من جمع عدة ظواهر كهرومغناطيسية في نظرية كهرومغناطيسية واحدة، وكان قد توقع وجود موجات كهرومغناطيسية تسير بسرعة الضوء بعد أن كان الاعتقاد السائد قبل ذلك الوقت أن موجات الضوء تشبه الموجات المستعرضة التي تنتشر في الأجسام الصلدة وأن الضوء وباقي الموجات الكهرومغناطيسية ينتشر خلال وسط تام المرونة يملأ الفضاء يُسمى الأثير ether. غير أن المشاهدات والقياسات التجريبية والنظرية التي أجراها الفلكيون والفيزيائيون تنفي وجود هذا الوسط وخصوصاً تجربة مايكلسون – مورلي. ويضاف لهذا فقد وُجد أن الميكانيك التقليدي قد فشل في تفسير حركة الجسيمات الذرية عالية السرعة.

وبعد أن تجمعت تناقضات عديدة عجز علماء الفيزياء عن تفسيرها جاءت النظرية النسبية الخاصة التي حلت معظم معضلات تلك الحقبة الزمنية. وقد بيّن آينشتاين أن القياسات الزمنية والمكانية تتأثر

بالحركة بين المُراقِب observer وما يُراقَب. كما إن النظرية النسبية قد ربطت بين المكان والزمان وبين المادة والطاقة وبين الكهربائية والمغناطيسية بروابط أدت إلى فهم أدق للكون.

ولفهم الفيزياء الحديثة ينبغي البدء بدراسة النظرية النسبية الخاصة لأن الفيزياء تهتم بالقياسات، والنسبية تدرس اعتماد نتائج هذه القياسات على المشاهِد وما هو تحت المشاهَدة. ومن النظرية النسبية ينتج ميكانيك جديد يعتمد علاقة وطيدة بين المكان والزمان، وبين الكتلة والطاقة. وبدون هذه العلاقات لا تُفهم الذرة التي هي مركز اهتمام الفيزياء الحديثة. ويمكن تلخيص فائدة النظرية النسبية الخاصة بأمرين:

1- ساعدت في تفسير بعض الظواهر التي لم تستطع الفيزياء التقليدية تفسيرها.

2- ربطت بين المكان والزمان، وبين الكتلة والطاقة.

3-1: المحاور القصورية The Inertial References

القصور الذاتي هو ميل الجسم لمقاومة التغير في حالته من السكون أو الحركة المنتظمة أو اتجاه الحركة. ويتناسب القصور الذاتي طردياً مع الكتلة.

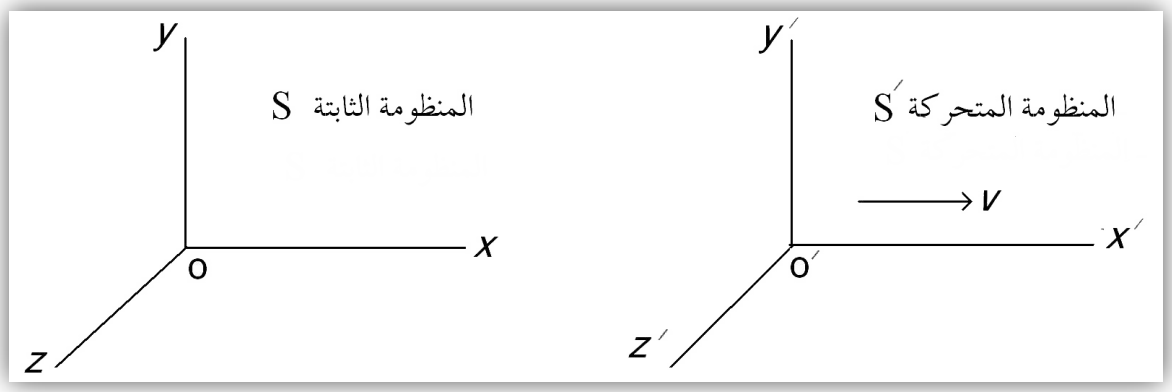
لا يمكن تحديد موضع جسم في الفضاء إلا من خلال محاور للإحداثيات تسمى "محاور الإسناد" مثل محور x ومحور y ومحور z، حيث إن حركة الجسم في بعد واحد أو خط مستقيم تتم على محور واحد فقط، وحركة الجسم في بعدين تتم في المستوى المحصور بين بعدين، وحركة الجسم في ثلاثة أبعاد تتم بين المحاور الثلاثة. والزمن يتم تحديده بمقارنة حركة الأجسام في الفضاء. ويوصف الحدث في أي موضع في الفضاء بأربعة متغيرات، الأبعاد المكانية الثلاثة x, y, z والزمن t، وبالتالي يمكن وصف الحدث من خلال الإجابة عن سؤالين يبدآن بـ أين؟ ومتى؟. والإطار الذي يصف إحداثيات المكان والزمان معاً يسمى إطار الإسناد أو محور الإسناد المرجعي frame of reference.

ويمكن تصنيف محاور الإسناد المتحركة إلى صنفين أحدهما يتحرك بسرعة ثابتة نسبة إلى محور إسناد ثابت ويسمى "المحور القصوري" والصنف الآخر يتحرك بتعجيل.

ولهذا فالمحور القصوري في الفيزياء التقليدية هو محور إسناد مرجعي تكون الأجسام الموجودة فيه – والتي تكون محصلة القوى المؤثرة عليها مساوية للصفر– إما ساكنة أو متحركة بسرعة ثابتة بخط مستقيم. وبالتالي فإن قانوني نيوتن الأول والثاني سيصح تطبيقهما عليه. كما إن أي محور إسناد يتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لمحور الإسناد القصوري يجب أن يكون أيضاً محور إسناد قصوري.

وفي هذا الفصل سنأخذ القياسات نسبة إلى منظومتين من المحاور المرجعية، إحداهما نعتبرها ساكنة وهي $oxyz$ ونسميها المنظومة S، والأخرى $o'x'y'z'$ تتحرك بسرعة منتظمة مقدارها v بالنسبة

للمحاور الساكنة ونسميها المنظومة S'. ولتيسير البحث الرياضي سنفترض أن المحورين x وx' يتجهان باتجاه الحركة وأن المحور y يوازي المحور y' وأن z يوازي z' كما في الشكل 1-1.



الشكل 1-1: محور إسناد مرجعي يتحرك بسرعة ثابتة باتجاه محور x نسبة لنظام ساكن.

1-4: قوانين نيوتن للحركة Newton's Laws of Motion

هي ثلاثة قوانين فيزيائية وَضعت معاً أساس الميكانيك التقليدي classical mechanics. وهي تصف العلاقة بين الجسم والقوى المؤثرة عليه، وكذلك حركته تبعاً لتأثير هذه القوى.

القانون الأول: يُسمى هذا القانون أحياناً بمبدأ غاليلو أو قانون القصور الذاتي، وينص على أنه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على الجسم تساوي صفراً فإن سرعة الجسم تكون ثابتة (سواءً كانت صفراً أو ذات قيمة). وبناءً على هذا فإن الجسم الساكن يبقى ساكناً ما لم تؤثر عليه قوة خارجية فتحركه، والجسم المتحرك بسرعة ثابتة في خط مستقيم يبقى على هذه الحالة ما لم تؤثر عليه قوة خارجية فتغير الحالة الحركية له. ونظام الاحداثيات الذي يعمل عليه هكذا قانون يُدعى نظام إحداثيات غاليلو أو النظام المرجعي القصوري. ويمكن التعبير عن القانون رياضياً بالصيغة:

$$\sum \vec{F} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \qquad \ldots\ldots 1.1$$

القانون الثاني: يصح هذا القانون للأنظمة ثابتة الكتلة فقط. ويمكن التعبير عنه بدلالة تعجيل الجسم المتحرك فيُقال: إن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم تساوي حاصل ضرب كتلته في تعجيله:

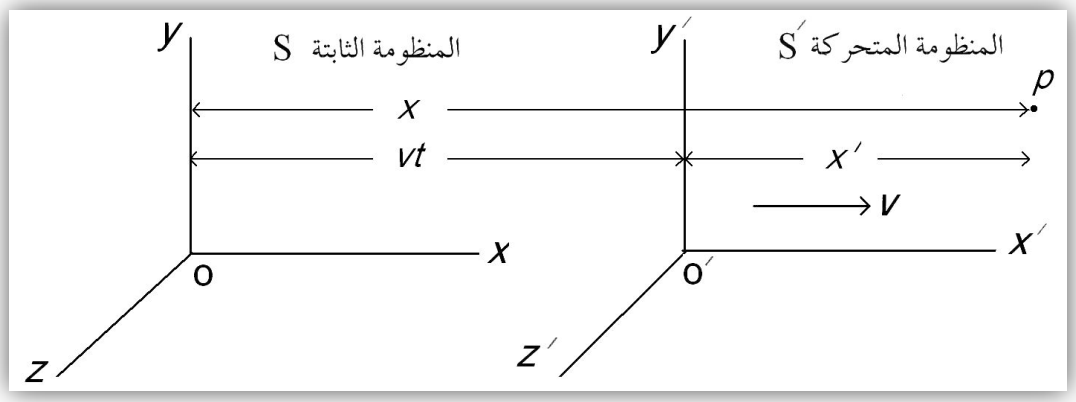
$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad \ldots\ldots 1.2$$

القانون الثالث: لكل فعل وتأثير من جسم على آخر يوجد رد للفعل من الجسم الآخر على الجسم الأول يساويه بالمقدار ويعاكسه بالاتجاه.

1-5: تحويلات غاليلو Galilean Transformation

يستخدم تحويل غاليلو في الفيزياء لتحويل إحداثيات نظام مرجعي إلى آخر يختلفان في كون أحدهما يتحرك بسرعة مستقيمة منتظمة بالنسبة للآخر الثابت. وقد قام نيوتن بتطبيقها على الميكانيك عندما قام بدراسة حركة الأجسام وحركة الكواكب.

لنفرض وجود منظومتي محاور مرجعية يوجد في كل منهما مراقب، وتتحرك المنظومة الثانية S' بسرعة منتظمة لا تعجيل فيها مقدارها v بالاتجاه الموجب لمحور x بينما تكون المنظومة الأولى S ساكنة. ولنفترض وقوع حدث في موضع مثل P. وسوف يلاحظه المراقب المتواجد ضمن أبعاد المنظومة S ويقيس إحداثياته x, y, z في الزمن t، بينما يقيس المراقب في المنظومة S' نفس الحدث في الزمن t' بالإحداثيات x', y', z'. وفي بداية الحركة كانت المنظومتان منطبقتين على بعض أي إن نقطة الأصل o' كانت منطبقة على نقطة الأصل o في الزمن $(t = t' = 0)$. وعندما تتحرك المنظومة S' يبدأ حساب الزمن، وبعد مرور زمن t تكون المحاور $o'x'y'z'$ قد قطعت مسافة vt كما مبين في الشكل 1-2.



الشكل 1-2

وعندئذ تكون احداثيات الموضع P بالنسبة للمنظومة S' بدلالة احداثيات المنظومة الثابتة S هي:

$$x' = x - vt\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = t \quad \} \qquad \ldots\ldots 1.3$$

وتُعرف هذه المعادلات بتحويلات غاليلو للمكان والزمان. ونلاحظ فيها أن المحورين $(y$ و $z)$ لا يتأثران بالحركة لكونهما عموديين على محور x وأن العلاقة $(t' = t)$ تفترض أن الزمن كمية مطلقة، أي إن الزمن لن يتغير في كلا المنظومتين وفق الحركة النسبية. فلو افترضنا أن كل مراقب كانت معه ساعة إيقاف

وبدأ بحساب الزمن بمجرد الحركة فإنه عند وقوع حدث في إحدى المنظومتين فإن كلا المراقبين سيكون للزمن عندهما قيمة واحدة. وهذا يعني أن الزمن مطلق ولا يعتمد على حركة المراقب[1].

وفي حال كانت محاور المنظومة S' ثابتة ومحاور المنظومة S هي المتحركة بسرعة ثابتة مقدارها $(-v)$، أي كانت الحركة بالاتجاه السالب لمحور x، فيمكن كتابة المعادلات 1.3 بالشكل التالي:

$$x = x' + vt\,, \qquad y = y'\,, \qquad z = z'\,, \qquad t = t' \quad \} \qquad \ldots\ldots 1.4$$

* ولمعرفة تحويلات غاليلو للسرعة نأخذ بنظر الاعتبار أن

$$\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$$

وباشتقاق المعادلات 1.3 بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\left.\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v\,, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\,, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\right\} \qquad \ldots\ldots 1.5$$

* أما تحويلات غاليلو للتعجيل فتُعرف بأخذ المشتقة الثانية بالنسبة للزمن، وكما يلي:

$$\left.\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2}\right\} \qquad \ldots\ldots 1.6$$

سؤال: قذف لاعبٌ كرةً بسرعة $60\ km/h$ عندما كان واقفاً داخل قطار متحرك بسرعة $100\ km/h$. وكان اتجاه الكرة بنفس اتجاه حركة القطار. فإذا طبقنا معادلة تحويل غاليلو للسرعة فما هي سرعة الكرة بالنسبة للأرض؟

$(a) 60\ km/h, \quad (b) 100\ km/h, \quad (c) 40\ km/h, \quad (d) 160\ km/h, \quad (e)$ غير قابلة للتحديد

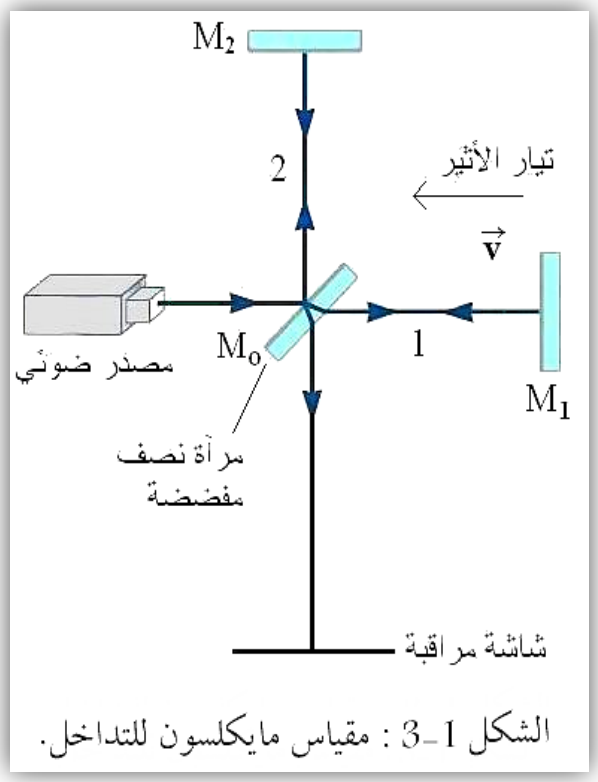
6-1: مبدأ نسبية نيوتن The Principle of Newtonian Relativity

ينص هذا المبدأ على إن قوانين نيوتن في الحركة لا تتغير في المحاور القصورية المتحركة بسرعة منتظمة بالنسبة لبعضها البعض. وفي الواقع فإن جميع قوانين الميكانيك التقليدي لا تتغير باستخدام تحويلات غاليلو، فيمكن مثلاً برهنة أن قانوني حفظ الزخم الخطي والطاقة الحركية لا تتغيران في المنظومتين S و S'. أما قوانين الكهرومغناطيسية فإنها تتغير عند استخدام تحويلات غاليلو، ولهذا لا يصح تطبيق هذه التحويلات عليها.

[1] بما أن الموجات الكهرومغناطيسية والضوء هو الذي ينقل نتيجة الحدث إلى المراقبَين في النقطتين المتباعدتين بمسافتين مختلفتين عن موضع الحدث فإن وصول الإشارة لكل منهما في نفس الوقت يعني أن سرعة الضوء لا نهائية، وحيث أن سرعة الضوء محددة وثابتة فلا بد أن يصل الخبر في زمنين مختلفين.

7-1: تجربة مايكلسون– مورلي The Michelson-Morley Experiment

إن اكتشاف ماكسويل للنظرية الكهرومغناطيسية للضوء سنة 1864 واثباتها العملي من قبل هيرتز سنة 1887 قد جرّد الأثير من معظم صفاته. ومع هذا لم يكن علماء ذلك الوقت مستعدين للتخلي عن فكرة الأثير باعتباره وسطاً وإطاراً مرجعياً كونياً لانتشار الضوء. ولدراسة حركة الأرض خلال الأثير المفترض استخدم مايكلسون ومورلي سنة 1887 جهاز مقياس تداخل مايكلسون بعد أن افترضا أن الأثير ساكن وأن الاشارات الضوئية تنتقل بسرعة الضوء c بالنسبة للأثير، وأن السرعة النسبية للضوء تختلف عن c وتعتمد على حركة الأرض. وهكذا اعتقدا أنه يمكن قياس السرعة المطلقة للأرض بالنسبة للأثير باستعمال الاشارات الضوئية وجهاز حساس. وهنا نعرض ملخصاً للتجربة حيث أسقطا حزمة ضوء على صفيحة نصف مفضضة M_0 كما في الشكل 1-3 بحيث تَقسِم هذه الصفيحةُ الحزمةَ الساقطة إلى جزئين أحدهما ينفذ من الصفيحة (نرمز له بالشعاع 1 في الشكل) ويتجه إلى المرآة M_1 بحيث يكون مساره موازياً لتيار الأثير، والجزء الثاني (نرمز له بالشعاع 2) ينعكس عن الصفيحة متجهاً إلى المرآة M_2 ويكون مساره عمودياً على تيار الأثير.



الشكل 1-3 : مقياس مايكلسون للتداخل.

وبعد انعكاس هاتين الحزمتين عن المرآتين M_1 و M_2 تعودان مرة أخرى الى الصفيحة M_0 ومنها إلى شاشة المراقبة. ونُظمت التجربة بحيث يكون الإشعاعان الواصلان إلى المراقب قد قطعا نفس المسافة عبر الهواء ونفس السُمك عبر الصفيحة. وبافتراض وجود تيار الأثير فإن سرعة الضوء على امتداد الشعاع 1 يجب أن يكون $(c-v)$ عندما يتجه الضوء نحو المرآة M_1، ويكون $(c+v)$ بعد أن ينعكس عنها.

وكتحليل للنتائج المحتملة نقول إنْ كان الزمنان اللازمان لانتقال حزمتي الضوء الواصلتين إلى المراقب متساويين فإن الحزمتين ستصلان للشاشة بنفس الطور وتتداخلان تداخلاً بناءً مما يؤدي إلى إضاءة الشاشة. وبما أن تيار الأثير سيكون بموجب حركة الأرض موازياً لإحدى الحزمتين كما ذكرنا فإنه سيُسبب فرقاً في زمن وصول هذه الحزمة الأفقية عن الحزمة الأخرى العمودية وسيكون التداخل هداماً بين الموجتين الواصلتين إلى الشاشة. وهذه الفكرة تمثل جوهر التجربة. وكان الجهاز حساساً بما فيه الكفاية لتحسس الفروقات في الإزاحة التي يمكن أن تحدث في أهداب التداخل. لكنه لم يكشف عن أية إزاحة

بالرغم من تكرار التجربة في مناطق مختلفة وفي فصول مختلفة من السنة وفي أوقات مختلفة من اليوم. لهذا استُنتج أن حركة الأرض بالنسبة للأثير لا يمكن رصدها. وبعد هذا أمكن استنتاج ما يلي من تجربة مايكلسون- مورلي:

1- إن الأثير ليس موجوداً، وكل حركة ستكون نسبة لإطار إسناد محدد وليست لإطار مطلق كوني كالأثير المزعوم.

2- إن سرعة الضوء هي نفسها لكل المراقبين وفي كل مكان بغض النظر عن حركة المصدر أو المراقب، وأن الموجات الكهرومغناطيسية لا تحتاج لوسط مادي كي تنتقل. وبالتالي فإن قوانين الكهرومغناطيسية صحيحة ولا تحتاج لإدخال تعديل عليها.

3- إن تحويلات غاليلو صحيحة بالنسبة للميكانيك التقليدي، ولكنها ليست كذلك بالنسبة للنظرية الكهرومغناطيسية. وهذا يعني أن هذه التحويلات وميكانيك نيوتن بحاجة لإدخال تغييرات عليها كي يمكن استخدامها للسرع العالية.

1-8: فرضيات النظرية النسبية الخاصة Postulates of Special Theory of Relativity

إثر فشل معادلة غاليلو لتحويل السرعة في حالة الضوء وعدم اثبات وجود الأثير قدَّم آينشتاين نظريته كحل جريء أزال هذه الصعوبات وغيَّر المفاهيم السائدة عن المكان والزمان. وقد أُسست النظرية النسبية الخاصة على فرضيتين هما:

1- **مبدأ النسبية**: إن قوانين الفيزياء تأخذ نفس الصيغ بالنسبة لجميع المحاور التي تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لبعضها الآخر (أي محاور الإسناد المرجعية القصورية).

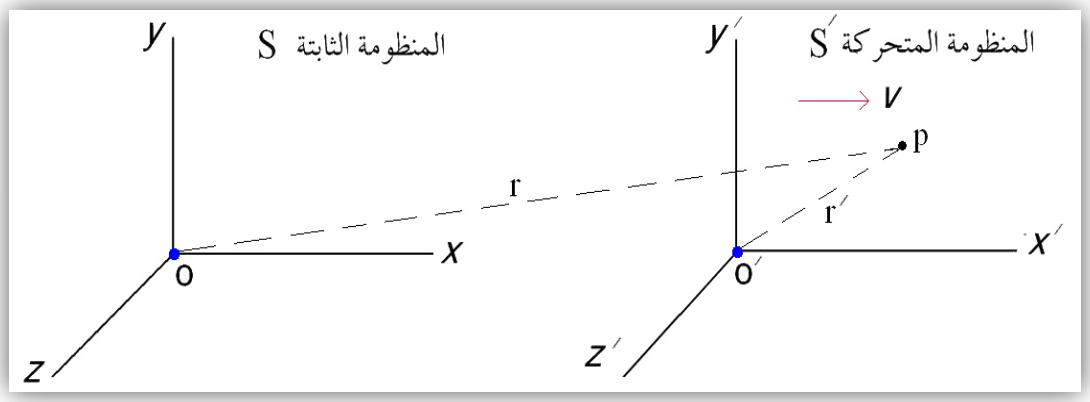
وهذه الفرضية تعبِّر عن عدم وجود محور مرجعي كوني متميز كالأثير. إذ لو أخَذت قوانين الفيزياء أشكالاً مختلفة بالنسبة لمحاور في حركات نسبية فيما بينها لتمكّنا - بسبب اختلاف هذه الصيغ- أن نحدد أي محور إسناد هو الثابت في الفضاء وأياً منها هو المتحرك. وإن عدم وجود محور مرجعي كوني متميز يعني أنه لا يمكن أن يكون هناك أي تباين واختلاف ما بين المحاور المختلفة.

2- **ثبات سرعة الضوء**: إن سرعة الضوء في الفراغ لها نفس القيمة في كل محاور الإسناد القصورية بغض النظر عن سرعة المراقب الذي يقيسها أو سرعة المصدر الباعث للضوء. ولا يمكن لأي جسيم أن ينتقل بسرعة أكبر أو مساوية لسرعة الضوء.

وهذا يعني أن الضوء يمكن أن ينتشر في الفراغ بدون الحاجة لوسط ناقل، وبالتالي ليس هناك ضرورة لافتراض وسط مثل الأثير تتحرك فيه الموجات الكهرومغناطيسية.

1-9: تحويلات لورنتز Lorentz Transformation

تبيّن سابقاً أن تحويلات غاليلو ليست صحيحة عندما تقترب السرعة v من سرعة الضوء. ولهذا سوف نقوم هنا باشتقاق معادلات تحويل السرعة والإحداثيات التي تنطبق على جميع السرع ضمن المدى $(0 \le v < c)$. وهذه التحويلات اشتُقت بصعوبة من قبل لورنتز عام 1890 وجعلت معادلات ماكسويل ذات معنى آخر. وقد تعرف آينشتاين على الأهمية الفيزيائية لهذه التحويلات واستفاد منها في نظريته النسبية الخاصة، ولهذا يُطلق البعض عليها اسم تحويلات آينشتاين – لورنتز.



الشكل 1-4: وقوع حدث عند النقطة P.

فلنفرض وقوع حدث عند النقطة P وقد تم رصده من قبل مراقبَين اثنين أحدهما كان في حالة سكون في محور الإسناد S وسيشاهد الحدث وفق الاحداثيات x, y, z في الزمن t، والأخر كان في محور الإسناد S' وسيشاهد الحدث وفق الاحداثيات x', y', z' في الزمن t'، وكانت المنظومة S' تتحرك إلى اليمين باتجاه $(+x)$ بسرعة مقدارها v بالنسبة إلى المنظومة S (لاحظ الشكل 1-4). كما تتطابق نقطتا الأصل للمنظومتين عند الزمن $(t = t' = 0)$. وبملاحظة أن تخميناً معقولاً (على أساس حدس فيزيائي) حول شكل معادلات الإحداثيات يمكن أن يقلل إلى حد كبير من التعقيد الجبري للاشتقاق فإنه يمكن صياغة معادلة اعتماد x' على x و t بالشكل:

$$x' = B(x - vt) \qquad \ldots\ldots 1.7$$

حيث أن B عامل لا أبعاد له ولا يعتمد على x أو t، ولكنه يمثل دالة ما لـ $\left(\frac{v}{c}\right)$ بحيث أن $(B = 1)$ عندما يقترب المقدار $\left(\frac{v}{c}\right)$ من الصفر. كما إن شكل المعادلة 1.7 قد اقتُرح تبعاً لشكل معادلة تحويل غاليلو (المعادلة 1.3 : $x' = x - vt$) والتي تكون صحيحة عندما يقترب المقدار v/c من الصفر.

إن واقع كون المعادلة 1.7 معادلة خطية في x و t (أي معادلة من الدرجة الأولى) هي حقيقة مهمة لكي تفسر كل حدث في إحدى المنظومتين كحدث واحد في المنظومة الأخرى، بينما المعادلات من

الدرجة الثانية تتطلب أكثر من حدث واحد في المنظومة الثانية لكل حدث يقع في المنظومة الأولى. وبعد فرض صحة المعادلة 1.7 نستطيع كتابة تحويلات احداثيات لورنتز العكسية لـ x بدلالة x' و t' بالصيغة:

$$x = B(x' + vt') \qquad \dots\dots 1.8$$

وهذه المعادلة تنشأ من فرضية آينشتاين الأولى للنسبية (مبدأ النسبية)، والتي تتطلب أن تكون قوانين الفيزياء هي نفسها في كلا المنظومتين S و S'. وقد غُيرت إشارة السرعة v لمراعاة الفرق في اتجاه حركة المنظومتين، حيث اعتُبرت المنظومة S هي التي تتحرك بسرعة منتظمة ($-v$) بالنسبة للمنظومة S'. وفي الواقع فإن هذه التقنية للحصول على تحويلات لورنتز العكسية يمكن اتباعها كقاعدة عامة، وللحصول على تحويل لورنتز عكسي من أي كمية نبادل بين المتغيرات المعلَّمة بالرمز ($'$) وغير المعلَّمة ونعكس إشارة سرعة المنظومة.

وبالعودة لاشتقاقنا لتحويلات لورنتز سنأخذ مشتقة x' و t' ونكتب تعبيراً يربط بين السرعة المقاسة لجسم في المنظومة S'، $(u'_x = dx'/dt')$، وبين السرعة المقاسة في المنظومة S، $(u_x = dx/dt)$. وعندها سيمكن تحديد قيمة B باشتراط أن السرعة u'_x في المنظومة S' يجب أن تساوي سرعة الضوء c في حالة أن السرعة u_x في المنظومة S كانت مساوي لـ c وفقاً لفرضية آينشتاين الثانية للنسبية (ثبات سرعة الضوء). وبعد تحديد B يمكن بهذا الترتيب الجبري البسيط أن نجد تحويلات لورنتز للسرعة وللإحداثيات. وبتعويض المعادلة 1.7 في المعادلة 1.8 واستخراج الحل لـ t' نجد:

$$t' = B\left[t + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{x}{v}\right] \qquad \dots\dots 1.9 \qquad how?..(H.W.)$$

وبأخذ تفاضل المعادلتين 1.7 و 1.9 ينتج:

$$dx' = B(dx - vdt) \qquad \dots\dots 1.10$$

$$dt' = B\left[dt + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{dx}{v}\right] \qquad \dots\dots 1.11$$

وتؤدي الصيغة $(u'_x = dx'/dt')$ إلى:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{B(dx - vdt)}{B\left[dt + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{dx}{v}\right]} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \div dt \\ \div dt \end{matrix} \rightarrow u'_x = \frac{\frac{dx}{dt} - \frac{vdt}{dt}}{\left[\frac{dt}{dt} + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{dx}{vdt}\right]}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{u_x}{v}} \qquad \dots\dots 1.12\,, \qquad where\ u_x = dx/dt$$

وبما أن الفرضية الثانية تتطلب أن تكون سرعة الضوء مساوية لـ c لأي مراقب، أي عند الحالة $(u_x = c)$ يجب أن يكون لدينا أيضاً $(u'_x = c)$، فإنه بتطبيق هذا في المعادلة 1.12 ينتج:

$$c = \frac{c - v}{1 + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{c}{v}} \qquad \ldots\ldots 1.13$$

ولاستخراج قيمة B نعيد ترتيب المعادلة 1.13 :

$$c + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{c^2}{v} = c - v\,, \qquad \Rightarrow \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{c^2}{v} = -v, \qquad \Rightarrow$$

$$\left.\frac{c^2}{B^2} - c^2 = -v^2\right\} \div c^2, \qquad \Rightarrow \frac{1}{B^2} - 1 = -\frac{v^2}{c^2}\,, \qquad \Rightarrow \frac{1}{B^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}\,, \qquad \Rightarrow$$

$$B^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)}\,, \qquad \Rightarrow B \equiv K = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad \ldots\ldots 1.14$$

ولذلك سيكون التحويل المباشر للإحداثيات (معادلة 1.7) بالصيغة التالية: $x' = K(x - vt)$، والتحويل العكسي (معادلة 1.8): $x = K(x' + vt')$. وللحصول على تحويل الزمن (t' كدالة لـ t و x)، نستبدل B بـ K في المعادلة 1.9 ونعوض فيها قيمة K من المعادلة 1.14 لينتج:

$$t' = K\left[t + (\frac{1}{K^2} - 1)\frac{x}{v}\right] = K\left[t + (1 - (v^2/c^2) - 1)\frac{x}{v}\right] = K\left[t - \frac{v^2}{c^2}\frac{x}{v}\right]$$

$$\therefore t' = K\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

وبهذا فقد توصلنا إلى التحويلات المكانية والزمانية لحدث يوصف بدلالة الإحداثيات (x, y, z, t) في المنظومة S والإحداثيات (x', y', z', t') في المنظومة S'، وكما يلي:

$$x' = K(x - vt)\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = K\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\Big\} \qquad \ldots\ldots 1.15$$

$$where \quad K = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

ولو أردنا تحويل إحداثيات الحدث في محور الإسناد S' للإحداثيات في محور الإسناد S فإننا نعكس إشارة السرعة، أي نبدل v بـ $(-v)$ ونبادل بين المتغيرات المعلَّمة بالرمز ($'$) وغير المعلَّمة في المعادلات 1.15 . وحينئذ ستكون التحويلات العكسية كما يلي:

$$x = K(x' + vt'), \qquad y = y'\,, \qquad z = z'\,, \qquad t = K\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\Big\} \qquad \ldots\ldots 1.16$$

مما يُلاحظ في تحويلات لورنتز أن t تعتمد على t' و x' كليهما، وأيضاً فإن t' يعتمد على كلا المتغيرين t و x . وهذا بخلاف حالة تحويلات غاليلو، والتي فيها $(t' = t)$. وعندما $(v \ll c)$ فإن تحويلات لورنتز ستتحول إلى تحويلات غاليلو. وهذا يعني أن تحويلات غاليلو هي حالة خاصة من

تحويلات لورنتز. وللتحقق من هذا يلاحظ أنه عندما تقترب v من الصفر فإن $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$، ولهذا فإن K تقترب من 1، والمعادلات 1.15 ستُختزل إلى معادلات تحويلات المكان والزمان لغاليلو (المعادلة 1.3):

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

وإذا أردنا أن نعرف الفرق في الإحداثيات بين حدثين أو الفترة الزمنية بينهما كما يرصدها المراقبان O و O' فمن المعادلات 1.15 و 1.16 يمكن التعبير عن الفرق بين المتغيرات الأربعة (x, x', t, t') بالصيغ التالية:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= K(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta t' &= K\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \end{aligned}\right\} \quad S \rightarrow S' \qquad \ldots\ldots 1.17$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= K(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta t &= K\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \end{aligned}\right\} \quad S' \rightarrow S \qquad \ldots\ldots 1.18$$

حيث أن المقدارَين $(\Delta x' = x_2' - x_1')$ و $(\Delta t' = t_2' - t_1')$ يمثلان الفرق المقاس بواسطة المراقب O'، والمقدارَين $(\Delta x = x_2 - x_1)$ و $(\Delta t = t_2 - t_1)$ يمثلان الفرق المقاس بواسطة المراقب O. ولم نضع الإحداثيين y و z في هذه الصيغ لأن قياسهما لا يتغير بالحركة على امتداد محور x.

1-10: نتائج تحويلات لورنتز

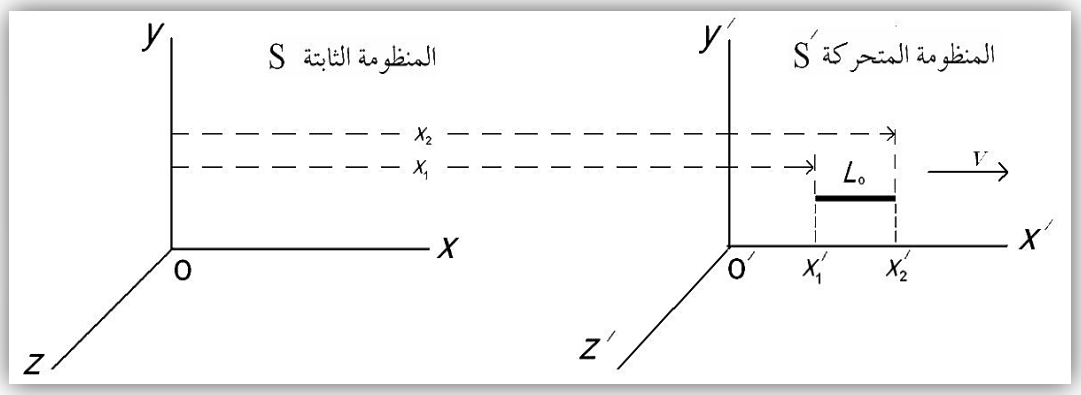
1- نسبية الطول Relativity of Length

لنفرض وجود جسم في المنظومة S' وعلى طول المحور x' كما في الشكل 1-5، وكان إحداثيا نهايتي الجسم هما x_1' و x_2'. ولهذا فإن طول الجسم هو $(L_o = x_2' - x_1')$ بالنسبة للمراقب O'، وهو نفس الطول الذي يراه المراقب O عندما تكون المنظومة S' ساكنة بالنسبة للمنظومة S. ولكن عندما تتحرك المنظومة S' باتجاه محور x وبسرعة منتظمة مقدارها v بالنسبة للمنظومة S فإن المراقب O' يرى طول الجسم مساوياً لـ L_o والمراقب O يراه مساوياً لـ L حيث $(L = x_2 - x_1)$. و x_1 و x_2 هما إحداثيا نهايتي الجسم وفق ما يراه المراقب O في المنظومة S. وباستخدام معادلات تحويلات لورنتز يمكن إيجاد العلاقة بين L و L_o على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= K(x_1 - vt_1) \\ x_2' &= K(x_2 - vt_2) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots 1.19$$

وبطرح المعادلة الأولى من الثانية نحصل على:

$$x_2' - x_1' = K(x_2 - x_1) - vK(t_2 - t_1) \qquad \ldots\ldots 1.20$$



الشكل 1-5

وعندما يقيس المراقب 0 نهايتي الجسم في وقت واحد فإن $(t_2 = t_1)$، وتصبح المعادلة 1.20 كما يلي:

$$L_o = LK = \frac{L}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$where\ (L_o = x_2' - x_1'), (L = x_2 - x_1), (t_2 - t_1 = 0)\ \&\ K = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$\therefore L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \ldots\ldots 1.21$$

ومن هذه المعادلة نجد:

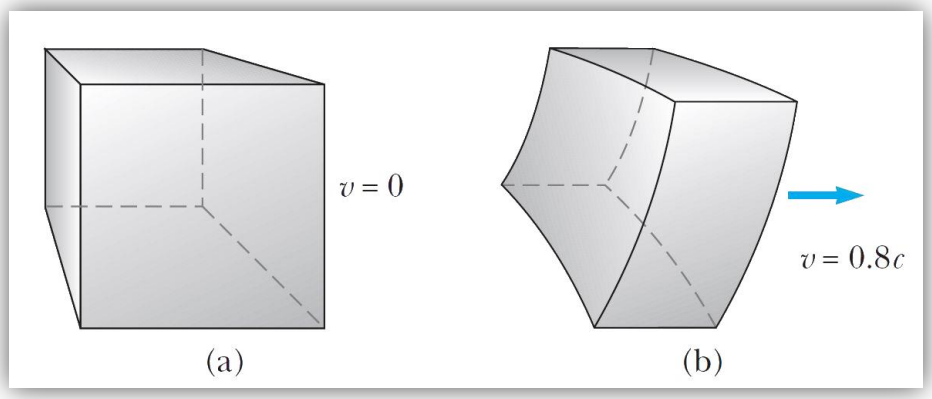
أولاً: $L = L_o$ عندما $(v \ll c)$.

ثانياً: $L = 0$ عندما $(v = c)$.

ثالثاً: $L < L_o$ عندما تقترب v من c: $(v \to c)$.

وهذا يعني أن القيمة المقاسة لطول الجسم ستكون أقل عندما يتحرك بموازاة طوله عن قيمته عندما يكون ساكناً بالنسبة للمراقب، وتُسمى هذه الظاهرة بالانكماش الطولي length contraction. ولا يظهر أي تغيير في طول الجسم الذي يتحرك باتجاه عمودي على اتجاه حركته.

وكمثال على الانكماش الطولي لاحظ الشكل 1-6 حيث يسير صندوق بسرعة $(v = 0.8c)$ وهو مراقَب بواسطة كاميرا. ويحصل تشوه في صورة الصندوق بسبب نقص طول كل ضلع موازٍ للحركة، فعندما تُفتح عدسة الكاميرا لالتقاط صورة فإنها تسجل شكل الجسم في زمن محدد. وبسبب أن الضوء المنبعث من أجزاء أخرى من الجسم يجب أن يصل للعدسة بنفس الوقت (متى ما تؤخذ الصورة) فإن الضوء المنبعث من الأجزاء الأبعد من الجسم يجب أن يبدأ رحلته بوقت أبكر من الضوء المنبعث من الأجزاء الأقرب. ولذلك تسجل الصورة أجزاء مختلفة من الجسم بأوقات مختلفة في صورة واحدة فقط. وهذا يؤدي إلى صورة مشوهة، حيث يبدو الضلع الأفقي متقلصاً والضلع العمودي منحنياً والصورة مدورة.



الشكل 1-6: صور محاكاة حاسوبية لصندوق: (a) عند سكونه نسبة للكاميرا. (b) متحرك بسرعة $v = 0.8c$ نسبة للكاميرا.

مثال 1-1: صاروخ طوله على الأرض $20m$ وأثناء طيرانه ينقص طوله بمقدار $0.4m$ بالنسبة لمراقب على الأرض. جد سرعة الصاروخ.

الحل: طول الصاروخ على الأرض بالنسبة للمراقب هو $L_o = 20m$، وطول الصاروخ أثناء الطيران بالنسبة للمراقب على الأرض هو $(L = 20 - 0.4 = 19.6m)$. ومن تحويلات لورنتز لدينا:

$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad 19.6 = 20\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\therefore v = 0.2c \qquad \text{(سرعة الصاروخ)}$$

2- نسبية الزمن Relativity of Time

لنفرض أن حدثين قد وقعا في نفس الموضع x_o في المنظومة S، الأول في الزمن t_1 والثاني في الزمن t_2، أو أن حادثة قد وقعت في الموضع x_o في المنظومة S في الزمن t_1 واستمرت إلى الزمن t_2، فعندئذ تكون الفترة الزمنية بين الحدثين أو الفترة الزمنية للحادثة بالنسبة لمراقب ساكن في نفس المنظومة هي:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

والفترة الزمنية بالنسبة لمراقب ساكن في المنظومة S' التي تتحرك بسرعة منتظمة v بالنسبة للمنظومة S وباتجاه محور x' هي:

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$

وباستخدام تحويلات لورنتز (المعادلة 1.15) يمكن إيجاد العلاقة بين $\Delta t'$ و Δt على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} t_1' &= K\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) \\ t_2' &= K\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1.22$$

وبطرح المعادلة الأولى من الثانية نحصل على:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = K(t_2 - t_1) - K\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \qquad \dots\dots 1.23\ (= eq.\ 1.17)$$

وعندما يقيس المراقب الساكن في المنظومة S' الفترة الزمنية في نفس الموضع فإن $(x_2 = x_1 = x_o)$ والمعادلة 1.23 تصبح:

$$\Delta t' = K\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad \dots\dots 1.24 \qquad where\ K = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

حيث Δt: الفترة الزمنية المقاسة بواسطة ساعة عند السكون نسبة للراصد = الوقت الأصلي (في المنظومة S)

$\Delta t'$: الفترة الزمنية المقاسة بواسطة ساعة في حركة (في S') بالنسبة للراصد (المتواجد في S).

v: سرعة الحركة النسبية (سرعة المنظومة S')، وc: سرعة الضوء.

ومن المعادلة 1.24 نجد:

أولاً: $\Delta t' = \Delta t$ عندما $(v \ll c)$.

ثانياً: $\Delta t' = \infty$ عندما $(v = c)$، وهذا يعني أن الإشارة الثانية للحدث لن تصل للمراقب في المنظومة S.

ثالثاً: $\Delta t' > \Delta t$ عندما تقترب v من c: $(v \to c)$.

وهذا يعني أن الفترة الزمنية لحادثة تقع في المنظومة S' والتي يقيسها مراقب ساكن في المنظومة S تظهر أطول من الفترة الزمنية التي يقيسها مراقب ساكن في المنظومة S'.

ونستنتج مما تقدم أنه بسبب كون K دائماً أكبر من 1 فالمعادلة 1.24 تبين أن الفترة الزمنية Δt التي يقيسها المراقب عندما يكون الحدث والمراقب معاً في نفس المنظومة تبدو أقصر من الفترة الزمنية $\Delta t'$ التي يقيسها مراقب خارج المنظومة لنفس الحدث. وتُعرف هذه الظاهرة بتباطؤ الزمن time dilation.

إن التباطؤ الزمني غير ملاحظ في حياتنا اليومية، وهذا أمر مفهوم بملاحظة العامل K، حيث أنه ينحرف عن 1 بقيم معتد بها عند السرع العالية جداً فقط كما هو موضح في الشكل 1-7 والجدول1-1. وكمثال، فإنه لسرعة $0.1c$ تكون $K = 1.005$. ولهذا يوجد تأخير زمني بمقدار 0.5% فقط عندما تكون السرعة عُشر سرعة الضوء. وعند الأخذ بعين الاعتبار أن السرع التي نتعامل معها في حياتنا اليومية أقل بكثير من $0.1c$ فإننا لن نلاحظ تأخيراً زمنياً في حياتنا الاعتيادية.

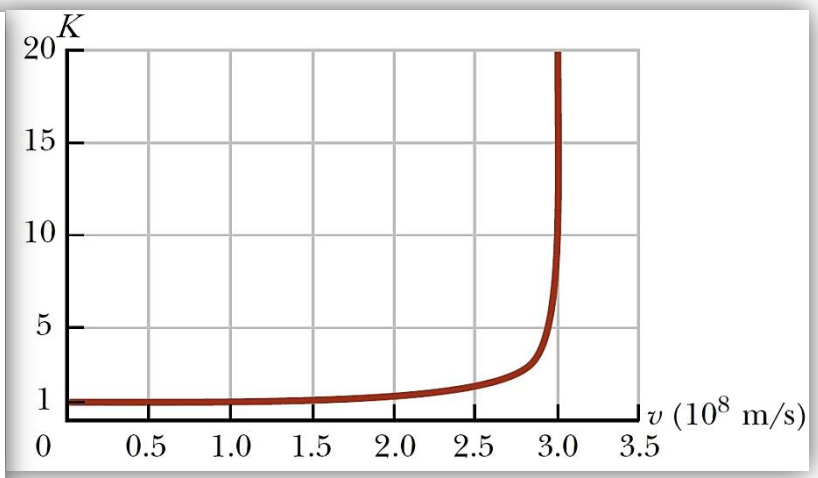
إن الفترة الزمنية لدقات الساعة المتحركة سوف تبدو أطول من الفترة الزمنية لدقات الساعة التي تكون في محور الإسناد الثابت. ولهذا يقال إن الساعة المتحركة تكون دقاتها أبطأ من الساعة التي في محور الإسناد الساكن بمقدار معامل K. ويمكن تعميم هذه النتيجة لكل العمليات الطبيعية بما فيها الميكانيكية والكيميائية والحياتية حيث تكون أبطأ عندما تحدث في محور إسناد متحرك بالنسبة للمراقب

الساكن. وكمثال على هذا فإن نبضات قلب رائد الفضاء المتنقل في الفضاء تكون بمعدلها الطبيعي بالنسبة لساعة داخل المركبة الفضائية. ولكن ساعة رائد الفضاء ونبضات قلبه كليهما تبدوان عند قياسهما متباطئتين بالنسبة للساعة الأخرى على الأرض (رغم أن رائد الفضاء لا يشعر ببطء في حياته داخل المركبة الفضائية).

الجدول 1-1

قيم تقريبية لـ K عند سرع مختلفة

v/c	K
0	1
0.001 0	1.000 000 5
0.010	1.000 05
0.10	1.005
0.20	1.021
0.30	1.048
0.40	1.091
0.50	1.155
0.60	1.250
0.70	1.400
0.80	1.667
0.90	2.294
0.92	2.552
0.94	2.931
0.96	3.571
0.98	5.025
0.99	7.089
0.995	10.01
0.999	22.37



الشكل 1-7: منحنى K مقابل السرعة v، حيث عندما تقترب السرعة من سرعة الضوء فان K تزداد بشكل كبير.

مثـــال 1-2: وقـع حـدث علـى الأرض، واسـتمر مـدة $40\ sec$ بالنسبة لمراقب على الأرض. ما هي الفترة الزمنية التي يسجلها لنفس الحدث مراقب متحرك بسرعة منتظمة مقدارها $v = 0.6c$ بالنسبة للأرض؟

الحل:

$$\Delta t = 40\ sec$$

ومن تحويلات لورنتز لدينا:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

إذن ستكون الفترة الزمنية التي يسجلها المراقب المتحرك هي:

$$\Delta t' = \frac{40}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = 50sec$$

3- نسبية السرعة Relativity of Velocity

لنفترض أن جسماً يتحرك بسرعة u' في المنظومة S' بموازاة المحور x'، فبموجب نسبية نيوتن تُعطى السرعة u لهذا الجسم بالنسبة للمنظومة S بالمعادلة:

$$u = v + u' \qquad \ldots\ldots 1.25$$

حيث v تمثل سرعة المنظومة S' بالنسبة للمنظومة S.

ولحساب الصيغة النسبية لهذه المعادلة يجب استعمال تحويلات لورنتز. ونبدأ بالعلاقتين:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad and \quad u' = \frac{dx'}{dt'}$$

ومن المعادلات 1.16 لدينا:

$$x = K(x' + vt')$$
$$\therefore dx = K(dx' + vdt') \qquad \ldots\ldots 1.26$$

ومن المعادلات 1.16 أيضاً:

$$t = K\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$
$$\therefore dt = K\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right) \qquad \ldots\ldots 1.27$$

وبقسمة المعادلة 1.26 على المعادلة 1.27:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{K(dx' + vdt')}{K\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)}$$

وبقسمة بسط ومقام الطرف الأيمن لهذه المعادلة على dt' نحصل على:

$$u = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \qquad \ldots\ldots 1.28$$

وتمثل هذه المعادلة الصيغة النسبية لمعادلة جمع سرعتين متوازيتين. وتُختزل إلى صيغة نيوتن (المعادلة 1.25) إذا كانت قيم السرع v و u' صغيرة بالمقارنة بسرعة الضوء c فيُهمل الحد $\left(\frac{vu'}{c^2}\right)$ مقارنة بالعدد 1.

وفي حالة خاصة عندما $(u' = c)$ سينتج:

$$u = \frac{c + v}{1 + vc/c^2} \quad \Rightarrow \quad u = c$$

وهذا موافق للفرضية الأساسية بأن سرعة الضوء ثابتة ولا تعتمد على حركة المصدر أو المراقب.

إن المعادلة 1.28 تمثل تحويل سرعة لورنتز العكسية من المنظومة S' إلى المنظومة S، أما تحويل سرعة لورنتز من المنظومة S إلى المنظومة S' فيعطى بالعلاقة:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}} \qquad \ldots\ldots 1.28'$$

سؤال: افرض أنك تستعد لرحلة إلى نظام شمسي آخر، وخلال الرحلة سوف تتحرك بسرعة مقدارها $0.99c$. وفكّرتَ في ما إذا كنت بحاجة لشراء ملابس جديدة بحجم أصغر لأنك سوف تكون أنحف خلال الرحلة بسبب ظاهرة الانكماش الطولي، وفكّرت أيضاً بتوفير بعض النقود بحجز غرفة أصغر في المركبة الفضائية لتنام بها لأنك سوف تكون أقصر عندما تستلقي فيها. فهل عليك أن: (أ) تشتري ملابس أصغر، أو (ب) تحجز غرفة أصغر، أو (ج) لا تقوم بشيء مما سبق، أو (د) تقوم بالأمرين معاً؟

مثال 1-3: (أ) بدأ رائد فضاء رحلة إلى المنظومة النجمية الثنائية المسماة الشعرى اليمانية Sirius والتي تبعد عن الأرض حوالي 8 سنوات ضوئية. وقد قام بقياس زمن رحلة الذهاب ووجدها 6 سنوات. فإذا كانت المركبة الفضائية تتحرك بسرعة ثابتة مقدارها $0.8c$، كيف يمكن لمسافة 8 سنوات ضوئية أن تتلائم مع السنوات الستة للرحلة التي قاسها رائد الفضاء؟

الحل: إن رائد فضاء يقيس طول الفضاء بين الأرض ونجم الشعرى، وهذا الفضاء يُعتبر في حالة حركة بالنسبة لرائد الفضاء. ولهذا فإننا نصنف هذا المثال على أنه مسألة انكماش طولي. كما يمكن أن نعتبر رائد الفضاء كجسيم يتحرك بسرعة ثابتة. وتمثل مسافة 8 سنوات ضوئية الطول الأصلي للمسافة بين الأرض والنجم بواسطة مراقب على الأرض يرصد كلا الجسمين في حالة سكون.

والآن نحسب الانكماش الطولي للفضاء المقاس بواسطة رائد الفضاء باستخدام المعادلة 1.21:

$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = (8\ ly)\sqrt{1-\frac{(0.8c)^2}{c^2}} = 5\ ly$$

وباستخدام نموذج جسيم يتحرك بسرعة ثابتة لإيجاد زمن الرحلة المقاس بواسطة ساعة رائد الفضاء ينتج ما يلي:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{5\ ly}{0.8c} = \frac{5\ ly}{0.8(1\ ly/yr)} = 6\ yr$$

مما يلاحظ أننا عوضنا عن سرعة الضوء بالمقدار $(c = 1\ ly/yr)$. كما إن النتيجة تعني أن الرحلة تتطلب فترة زمنية أقل من 8 سنوات لرائد الفضاء لأن المسافة بين الأرض ونجم الشعرى بالنسبة له تكون أقصر.

(ب) ماذا لو تم رصد هذه الرحلة باستخدام مرقاب قوي جداً على الأرض؟ عند أي زمن يرى الراصد على الأرض أن رائد الفضاء قد وصل إلى نجم الشعرى؟

الحل: تُحسب الفترة الزمنية التي يقيسها الراصد على الأرض لوصول رجل الفضاء كما يلي:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{8\ ly}{0.8c} = 10\ yr$$

1-11: الكتلة النسبية Relativistic Mass

عند استخدام الميكانيك التقليدي تُعتبر كتل الأجسام ثابتة، ولكن وفق النظرية النسبية الخاصة فإن كتلة الجسم تتغير حسب سرعته وفق العلاقة:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \qquad \ldots\ldots 1.29$$

حيث m_o: كتلة الجسم السكونية،

و m: كتلة الجسم عندما يتحرك بسرعة v بالنسبة لمراقب ساكن، وتُسمى الكتلة النسبية.

ويمكن أن يُستنتج من المعادلة 1.29 ما يلي:

أولاً: إن الكتلة السكونية m_o هي التي تُعتبر ثابتة وفق النظرية النسبية وليست الكتلة النسبية m.

ثانياً: عندما تكون سرعة الجسم صغيرة نسبياً وتقترب من الصفر $(v \to 0)$ فإن $(m \cong m_o)$.

ثالثاً: عندما تقترب سرعة الجسم من سرعة الضوء $(v \to c)$ تزداد كتلته النسبية إلى أن تصل إلى ما لانهاية $(m = \infty)$ عند $(v = c)$. وهذا لا يمكن حدوثه أبداً، ولهذا فإنه يمكن اعتبار سرعة الضوء هي السرعة الحَدِّية التي لا يمكن لأي جسم مادي أن يصل إليها فضلاً عن تجاوزها.

مثال 1-4: ما هي السرعة التي يجب أن يسير بها جسم تبلغ كتلته النسبية ضعف كتلته السكونية؟

الحل:

$$m = 2m_o \quad \Rightarrow \quad m_o = 0.5m$$

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \left(\frac{m_o}{m}\right)^2 = 0.25$$

$$\therefore \frac{v^2}{c^2} = 1 - 0.25 = 0.75 \quad \Rightarrow v = 0.866c$$

1-11: الزخم النسبي Relativistic Momentum

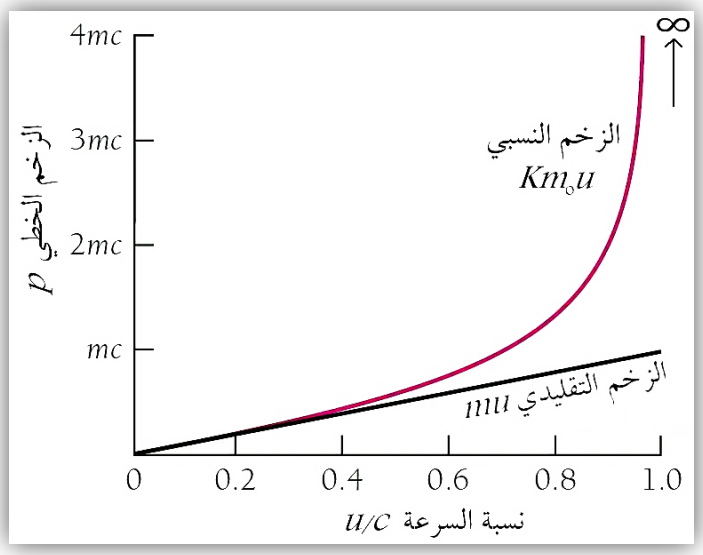
يُعبر عن الزخم الخطي وفق الميكانيك التقليدي بالصيغة $(p = mu = m_o u)$[1]. ولكن الكتلة تكون متغيرة عند السرع القريبة من سرعة الضوء وفق النظرية النسبية، فلهذا يكون الزخم الخطي وفق النظرية النسبية الخاصة بالصيغة التالية:

$$p = mu = \frac{m_o u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = Km_o u \qquad \ldots\ldots 1.30$$

حيث u سرعة الجسم، و m_o كتلته السكونية. وعندما $(u \ll c)$ فإن الزخم الخطي سيكون بالصيغة التقليدية لأن $(K \to 1)$. ومما يُلاحظ من المعادلة 1.30 ومن الشكل 1-8 أن سرعة الجسم لا يمكن أن

[1] هنا استخدمنا الرمز u لسرعة الجسيمات لأن الرمز v نستخدمه عادةً للسرعة النسبية لإطارين مرجعيين.

تصل إلى سرعة الضوء لأن زخم الجسم سيكون لا نهائياً، وهذا أمر مستحيل. لـذا فـالزخم النسـبي Km_ou صحيح دائماً، أما الزخم التقليدي m_ou فإنه يصلح فقط لسرعات أصغر بكثير من c.



الشكل 1-8: زخم جسم يتحرك بسرعة u نسبة للراصد.

مثال 1-5: يتحرك إلكترون (كتلته $9.11 \times 10^{-31}kg$) بسرعة مقدارها $0.75c$. جد مقدار زخمه النسـبي وقارنه مع الزخم المحسوب بالصيغة التقليدية.

الحل:

$$p = \frac{m_e u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(9.11\times10^{-31}kg)(0.75\times3\times10^{8}m/s)}{\sqrt{1-\frac{(0.75c)^2}{c^2}}} = 3.1\times10^{-22}kg.m/s$$

أما وفق الصيغة التقليدية (التي لا يصح استخدامها هنا لأن السرعة نسبية) فيُحسب الزخم كما يلي:

$$p_{\text{classical}} = m_e u = 2.05\times10^{-22}kg.m/s$$

وعليه فإن النتيجة النسبية الصحيحة أكبر بـ 50% من النتيجة التقليدية.

1-12: القوة النسبية Relativistic Force

تُعرف القوة المؤثرة على جسم وفق الميكانيك التقليدي بأنها المعدل الزمني لتغير زخم الجسم:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m_o u)}{dt} = m_o\frac{du}{dt} = m_o a \qquad \ldots\ldots 1.31$$

وتمثل هذه الصيغة قانون نيوتن الثاني. ولكن وفق النظرية النسبية تصبح الكتلة متغيرة عند السرع النسبية، وتُعرّف القوة المؤثرة حينئذ بأنها المعدل الزمني لتغير الزخم النسبي للجسم. وتُعطى الصيغة النسبية لقانون نيوتن الثاني بالشكل:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mu) = \frac{d}{dt}(Km_o u) \qquad \ldots\ldots 1.32$$

وعندما $(u \ll c)$ فإن K ستكون مقاربة لـ 1 وتصبح F مقاربة لـ mu، وهذا موافق للميكانيك التقليدي.

مثال 1-6: جد تعجيل جسيم كتلته m وسرعته النسبية u عندما تؤثر عليه قوة مقدارها F موازية لـ u.

الحل: من المعادلة 1.32،

$$F = \frac{d}{dt}(Kmu) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$
$$= \frac{m}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\frac{du}{dt} + mu\frac{d}{dt}(1-u^2/c^2)^{-1/2}$$
$$= \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{du}{dt} + mu\left[-\frac{1}{2}(1-u^2/c^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{-2u}{c^2}\right)\frac{du}{dt}\right]$$
$$= m\left(\frac{1}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{u^2/c^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}\right)\frac{du}{dt} = m\left(\frac{1-\frac{u^2}{c^2}+\frac{u^2}{c^2}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}\right)\frac{du}{dt}$$
$$F = m\left(\frac{1}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}\right)\frac{du}{dt} = \frac{ma}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \quad where\ a = \frac{du}{dt}$$

ونلاحظ هنا أن $(F = K^3ma)$، أي إن مجرد إستبدال m بـ Km في الصيغة التقليدية لا يعطي دائماً النتيجة النسبية الصحيحة. وتعجيل الجسيم سيكون:

$$a = \frac{F}{m}(1-u^2/c^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \ldots\ldots 1.33$$

ونستنتج من هذه المعادلة أنه حتى لو كانت القوة ثابتة المقدار فإن تعجيل الجسيم سيقل بزيادة سرعته. أي عندما $(u \to c)$ فإن $(a \to 0)$، وبالتالي فإن الجسيم لا يصل أبداً لسرعة الضوء.

1-13: الطاقة النسبية Relativistic Energy

تُعتبر العلاقة بين الكتلة والطاقة أشهر العلاقات التي حصل عليها آينشتاين من فرضيات النسبية الخاصة. ويمكن الحصول على هذه العلاقة من تعريف الشغل W المنجز على جسم يتحرك في بعد واحد على امتداد محور x بواسطة قوة مقدارها F باتجاه محور x أيضاً، حيث يُعطى الشغل بالعلاقة $(W = Fx)$. وإنْ لم تؤثر قوة أخرى على الجسم وكان الجسم قد بدأ حركته من الصفر فإنّ جميع الشغل المنجز عليه سيكون طاقة حركية E_k (kinetic energy) قيمتها $(E_k = Fx)$. كما إن هذه القوة ستسبب تغييراً في الزخم، وستُعطى صيغة الطاقة الحركية بالتكامل:

$$E_k = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{dp}{dt}dx$$

وفي الفيزياء غير النسبية تُعطى الطاقة الحركية لجسم كتلته m وسرعته u بالصيغة $\left(E_k = \frac{1}{2}mu^2\right)$.

ولإيجاد الصيغة النسبية للطاقة الحركية سنبدأ من الصيغة النسبية لقانون نيوتن الثاني (المعادلة 1.32):

$$E_k = \int_0^x \frac{d(Kmu)}{dt}dx = \int_0^u u\, d(Km_o u) = \int_0^u u\, d\left(\frac{m_o u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

وبالتكامل بطريقة التجزئة $(\int udv = uv - \int vdu)$:

$$E_k = \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o \int_0^u \frac{u\, du}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o \frac{-2/c^2}{-2/c^2}\int_0^u u(1-u^2/c^2)^{-1/2}\, du$$

$$= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \left[\frac{m_o}{-2/c^2}\frac{(1-u^2/c^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^u$$

$$= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \left[m_o c^2\sqrt{1-u^2/c^2}\right]_0^u$$

$$= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + m_o c^2\sqrt{1-u^2/c^2} - m_o c^2$$

$$= \frac{m_o u^2 + m_o c^2\,(1-u^2/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o c^2 = \frac{m_o u^2 + m_o c^2 - m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o c^2$$

$$E_k = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o c^2 = Km_o c^2 - m_o c^2 \qquad \ldots\ldots 1.34$$

$$or \quad E_k = mc^2 - m_o c^2 = (m-m_o)c^2 \qquad \ldots\ldots 1.34'$$

وتنص هذه النتيجة على أن الطاقة الحركية النسبية لجسم ما ستكون مساوية للفرق بين $Km_o c^2$ و $m_o c^2$، أو إن الطاقة الحركية النسبية للجسم تساوي الزيادة في كتلته نتيجة للحركة مضروبة في مربع سرعة الضوء.

وبإعادة ترتيب المعادلة 1.34 و $1.34'$ ينتج:

$$mc^2 = Km_o c^2 = m_o c^2 + E_k \qquad \ldots\ldots 1.35$$

وإذا اعتبرنا أن mc^2 هي الطاقة الكلية للجسم E لنتج أن طاقة الجسم عند السكون تساوي $m_o c^2$ لأن E_k عند السكون تساوي صفراً، وبهذا ستأخذ معادلة الطاقة الكلية الشكل التالي:

$$E = E_o + E_k \qquad \ldots\ldots 1.36$$

حيث E_o: الطاقة السكونية (rest energy) لجسم كتلته m_o،

$$E_o = m_o c^2 \qquad \ldots\ldots 1.37$$

وإذا كان الجسم متحركاً ستكون طاقته الكلية:

$$E = mc^2 = Km_oc^2 = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \dots\dots 1.38$$

وقد تم إثبات هذه المعادلة عملياً باستخدام معجلات لتعجيل الجسيمات عند طاقات عالية جداً. كما إن هذه المعادلة تشبه المعادلة 1.29 ، ولكن الطرفين في المعادلة 1.38 قد ضربا بـ c^2 ، وهذا ناتج عن مبدأ تكافؤ الكتلة والطاقة. وبما أن الكتلة والطاقة هما كميتان ليستا مستقلتين عن بعض فإن مبدئي الحفظ لهما (حفظ المادة وحفظ الطاقة) هما في الحقيقة مبدأ واحد، أي يمكن توليد كتلة أو إفناؤها بشرط أن تفنى أو تتولد كمية مكافئة من الطاقة في نفس الوقت، والعكس بالعكس. أي إن التوليد يجب أن يقابله فناء، والإفناء يقابله ولادة. لذا فالكتلة والطاقة هما مظهران مختلفان لنفس الشيء، وإن ثابت التناسب بين وحدة الكتلة kg ووحدة الطاقة J هو c^2 . أي إن كيلوغرام واحداً من المادة يحوي طاقة مقدارها:

$$mc^2 = 1kg \times (3 \times 10^8 m/s)^2 = 9 \times 10^{16} J$$

وهذا يكفي لإرسال حمولة مقدارها مليون طن إلى القمر.

عندما تكون $(u \ll c)$ فإن الطاقة الحركية للجسم تُختزل إلى الصيغة التقليدية $\left(E_k = \frac{1}{2}mu^2\right)$، ويمكن التحقق من هذا باستخدام المفكوك ذي الحدين binomial expansion :

$$(1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots, \quad for\ x \ll 1$$

حيث أن القوى عالية الرتبة لـ x ستُهمل في المفكوك. وفي حالتنا هذه فإن $\left(x = \frac{u}{c}\right)$ أي $\left(\frac{u}{c} \ll 1\right)$، وبالتالي فإن:

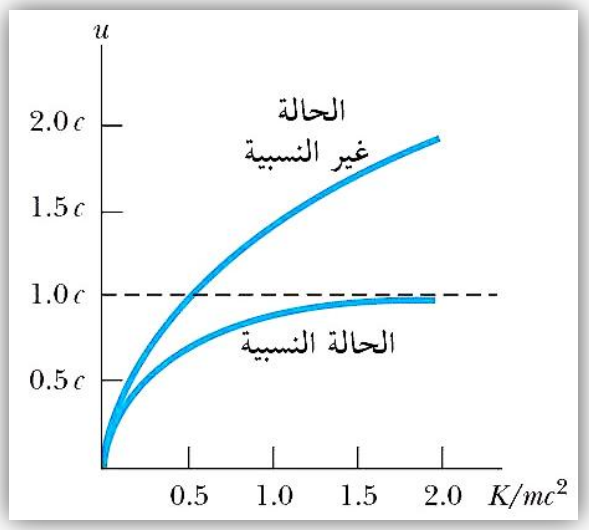
$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots$$

وبتعويض هذه النتيجة في المعادلة 1.34 :

$$E_k = m_oc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots\right) - m_oc^2 \approx m_oc^2 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}m_oc^2 - m_oc^2 = \frac{1}{2}m_ou^2$$

وهذا يتوافق مع النتيجة التقليدية للطاقة الحركية للجسم.

ولمعرفة الفرق بين الحالتين النسبية وغير النسبية للسرعة u كدالة للطاقة الحركية E_k لاحظ الشكل 1-9، ففي الحالة النسبية لا يمكن لسرعة الجسيم u أن تتجاوز c بغض النظر عن الطاقة الحركية وفق ما تم التأكد منه في تجارب معجلات الجسيمات عالية الطاقة، ويلاحظ أن المنحنيين في تطابق مقبول عندما $(u \ll c)$.



الشكل 1-9: مخطط لمقارنةٍ بين الصيغتين النسبية وغير النسبية للسرعة كدالة للطاقة الحركية.

1-14: العلاقة بين الطاقة والزخم The Relationship between Energy and Momentum

في العديد من الحالات يتم قياس الزخم الخطي لجسيم أو طاقته وليس السرعة. ولهذا فإنه من المفيد أن نمتلك صيغة تربط بين الطاقة الكلية النسبية E والزخم الخطي النسبي p، وذلك من خلال استخدام المعادلتين $(E = Km_oc^2)$ و $(p = Km_ou)$، وبتربيع هاتين المعادلتين وإجراء عملية الطرح يمكننا أن نتخلص من u لنحصل في النهاية على المعادلة التالية:

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4 \qquad \ldots\ldots 1.39$$

مسألة: اشتق المعادلة 1.39.

الحل :

$$E = Km_oc^2 \rightarrow E^2 = (Km_oc^2)^2$$
$$p = Km_ou \rightarrow p^2 = (Km_ou)^2$$

بضرب p^2 بـ c^2 ثم الطرح ينتج:

$$E^2 - p^2c^2 = (Km_oc^2)^2 - (Km_ou)^2c^2 = K^2[(m_oc^2)^2 - (m_ou)^2c^2]$$
$$= K^2[m_o^2c^4 - m_o^2c^2u^2] = m_o^2c^4K^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$
$$= m_o^2c^4\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m_o^2c^4$$

$$\therefore E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

مما يلاحظ من هذه المعادلة أنه عندما يكون الجسيم في حالة سكون فإن $(p = 0)$، وبالتالي فإن $(E = m_oc^2)$، وهذا يعني أن الطاقة الكلية تساوي طاقة السكون. وللحالة التي تمتلك فيها الجسيمات كتلة صفرية كالفوتونات نضع $(m_o = 0)$ في المعادلة 1.39 فينتج:

$$E = pc \qquad \ldots\ldots 1.40$$

وهذه المعادلة هي الصيغة الدقيقة التي تربط بين الطاقة الكلية والزخم الخطي للفوتونات، والتي تتحرك دائماً بسرعة الضوء.

الإلكترون فولت Electronvolt

إن وحدة الطاقة المعتاد استخدامها في الفيزياء الذرية هي وحدة الكترون- فولت eV، وهي الطاقة المكتسبة بواسطة إلكترون معجّل خلال فرق جهد مقداره فولت واحد، حيث $(W = qV)$،

$$1\ eV = (1.602 \times 10^{-19}\ C)(1\ V) = 1.602 \times 10^{-19}\ J$$

وكمثال فإن الإلكترون الذي يمتلك كتلة قدرها $9.11 \times 10^{-31} kg$ تكون طاقته السكونية بوحدة الجول:

$$m_e c^2 = (9.11 \times 10^{-31} kg)(3 \times 10^8 m/s)^2 = 8.2 \times 10^{-14} J$$

ولتحويلها لوحدة إلكترون- فولت:

$$m_e c^2 = (8.2 \times 10^{-14} J)\left(\frac{1\ eV}{1.602 \times 10^{-19}\ J}\right) = 0.511 \times 10^6 eV = 0.511\ MeV$$

ولأن $(m_e c^2 = 0.511\ MeV)$ فإن كتلة الإلكترون ستُكتب بالصيغة $(m_e = 0.511\ MeV/c^2)$.

مثال 1-7: تبلغ سرعة إلكترون $u = 0.85\ c$. جد طاقته الكلية وطاقته الحركية بوحدة إلكترون- فولت.

الحل: باستخدام حقيقة أن الطاقة السكونية للإلكترون هي $0.511\ MeV$ وأن $E = Km_o c^2$ فإنه:

$$E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{0.511\ MeV}{\sqrt{1 - (0.85\ c)^2/c^2}} = 0.97\ MeV$$

ويتم الحصول على الطاقة الحركية بطرح الطاقة السكونية من الطاقة الكلية:

$$E_k = E - m_e c^2 = 0.97\ MeV - 0.511\ MeV = 0.459\ MeV$$

أسئلــة

1- إذا كان جسم يتحرك بسرعة $(0.5\ c)$ بالنسبة لمحور إسناد يتحرك بتعجيل. فهل يمكـن تطبيـق قـوانين النظرية النسبية الخاصة عليه من قبل مراقب في المحور المتعجل؟ ولماذا؟

2- ما هي الحقيقة المهمة التي أثبتتها تجربة مايكلسون- مورلي؟

3- إلى أي مدى تكون تحويلات غاليليو صحيحة؟ وما هي التحويلات التي عالجت هذا النقص؟

4- يمكن تصنيف محاور الإسناد المتحركة إلى صنفين أحدهما يتحرك بسرعة ثابتة نسبة إلى محور إسـناد ثابت ويسمى "المحور القصوري" والصنف الآخر يتحرك بتعجيل. فوفق أي صـنف منهمـا يصـح تطبيـق النظرية النسبية الخاصة؟

5- رائد فضاء تسير مركبته بسرعة نسبية، هل ستكون سرعة نبضات قلبه وفق المعدل الطبيعي بالنسبة لسـاعة داخل المركبة الفضائية أم لا؟ ولماذا؟

6- لو أثرت قوة مقدارها F موازية للسرعة النسبية u لجسيم كتلته m فتعجل الجسيم وفق العلاقة:

$$\left[a = \frac{F}{m}(1 - u^2/c^2)^{3/2}\right]$$

فلماذا لا يصل الجسيم لسرعة الضوء أبداً رغم وجود قوة مسلطة عليه ورغم وجود تعجيل له؟

7- إذا كان هنالك محور إسناد قصوري يتحرك نسبة لمحور ثابـت بسـرعة v وكانـت قيمـة معامـل النسـبية قريبة من (1) فإن السرعة v مقارنة بسرعة الضوء c ستكون:

(a) $v = c$, (b) $v > c$, (c) $v \ll c$, (d) $v < c$.

8- مسطرة مترية تتحرك باتجاه يصنع زاوية $(90°)$ مع طولهـا وبسـرعة $(0.6\ c)$. مـا مقـدار طولهـا حينئـذ بالنسبة لمراقب ثابت؟

(a) $0.8\ m$, (b) $1\ m$, (c) $1.2\ m$, (d) $0\ m$.

9- رائد فضـاء كانـت كتلتـه علـى الأرض $(100\ Kg)$ وعنـدما انطلـق فـي سـفينة فضـائية أصـبحت كتلتـه $(106\ Kg)$ بالنسبة لمشاهد على الأرض، فما مقدار سرعة السفينة الفضائية؟

(a) $0.35\ c$, (b) $0.70\ c$, (c) $0.33\ c$, (d) $0.66\ c$.

10- وقع حدث على الأرض، واستمر مدة عشرين ثانية بالنسبة لمراقب على الأرض. ما هـي الفتـرة الزمنيـة التي يسجلها لنفس الحدث مراقب يتحرك بسرعة منتظمة مقدارها $(0.7\ c)$ بالنسبة للأرض؟

(a) $2.8\ sec$, (b) $28\ sec$, (c) $0.28\ min$, (d) $2.8\ min$.

11- الأثير هو .....

12- إذا كانت السرعة بالنسبة لمراقب في المنظومة الثابتة S مساوية لسرعة الضوء c فإنها ستساوي ..... بالنسبة لمراقب في المنظومة المتحركة S'.

13- أُسست النظرية النسبية الخاصة على فرضيتين ومبدأين هما: ..... و .....

14- إن فرضية ثبات سرعة الضوء التي استندت إليها النظرية النسبية الخاصة هي .....

15- إن مبدأ النسبية الذي استندت إليه النظرية النسبية الخاصة هو .....

16- ينص مبدأ نسبية نيوتن على .....

17- المحور القصوري حسب الفيزياء التقليدية هو .....

18- إن وحدة معامل النسبية K هي .....

19- لا يمكن أن يكون معامل النسبية K أصغر من .....

20- رائد فضاء كانت كتلته على الأرض $65\ kg$ وأصبحت كتلته $67\ kg$ في سفينة فضائية متحركة بالنسبة لمراقب على الأرض. لذا فإن سرعة السفينة الفضائية تساوي .....

21- ظاهرة الانكماش الطولي في الفيزياء النسبية هي .....

22- ظاهرة تباطؤ الزمن في الفيزياء النسبية هي .....

23- لو سار جسم بسرعة الضوء فإن طوله سيكون ..... بالنسبة للمراقب الثابت.

24- وحدة الكترون- فولت eV هي .....

مسائل محلولة

(1) حدثان وقعا في الموضعين $(6 \times 10^4 m, 0, 0)$ و $(9 \times 10^4 m, 0, 0)$ وظهرا في نفس الوقت لمراقب على الأرض. ما هي الفترة الزمنية بين الحدثين بالنسبة لمراقب يتحرك بسرعة $0.7\ c$ بالنسبة للأرض؟

الحل: من المعادلة 1.23 ،

$$t_2' - t_1' = -K\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{0.7\ c}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-(0.7\ c)^2/c^2}}(9 \times 10^4 - 6 \times 10^4) = 9.8 \times 10^{-5} sec$$

(2) لاحظ مراقب في المنظومة S' المتحركة باتجاه محور xx' بسرعة منتظمة مقدارها $0.8\ c$ بالنسبة للمنظومة S توهجاً في الموضع $(0,0,0)$، وبعد 24 ثانية لاحظ في الموضع $(9 \times 10^8 m, 0, 0)$ توهجاً آخر. ما هي الفترة الزمنية بين التوهجين بالنسبة لمراقب في المنظومة S ؟

الحل: $x_2' = 9 \times 10^8 m$, $x_1' = 0$، $t_1' = 0$ ، $t_2' = 24\ sec$

من المعادلة 1.18 :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = K\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$$

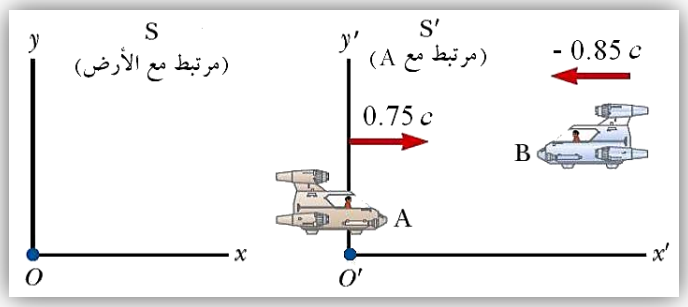
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.8\ c)^2}{c^2}}}\left(24\ sec + \frac{0.8\ c}{c^2} \times 9 \times 10^8 m\right) = 44\ sec$$

(3) مركبتان فضائيتان A و B تتحركان باتجاهين متعاكسين، ويقيس مراقب على الأرض سرعتي المركبتين الفضائيتين فيجد سرعة المركبة A تساوي $0.75c$ وسرعة المركبة B تساوي $0.85c$. جد مقدار سرعة المركبة B كما يقيسها ركاب المركبة A.

الحل: يمكن حل هذه المسألة بأخذ S' كمحور إسناد للمركبة A، ولهذا فإن $v = 0.75c$ نسبة للمراقب على الأرض (محور S). ويمكن اعتبار المركبة B كجسم يتحرك لليسار بسرعة $u = -0.85c$ نسبة للمراقب الأرضي. ولهذا فإن سرعة B نسبة لـ A يمكن معرفتها باستخدام المعادلة $1.28'$.

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}} = \frac{-0.85c - 0.75c}{1 - \frac{(0.75c)(-0.85c)}{c^2}} = -0.9771c$$

وتشير الإشارة السالبة إلى أن المركبة الفضائية B تتحرك باتجاه محور x السالب كما يقيسها ركاب المركبة الفضائية A.



(4) تتحرك المركبة الفضائية α بسرعة $0.9c$ نسبة للأرض وأرادت المركبة الفضائية β أن تتجاوزها بسرعة نسبية مقدارها $0.5c$ بنفس الاتجاه. ماهي السرعة التي يجب أن تسير بها β بالنسبة للأرض؟

الحل: وفق تحويلات غاليلو ستحتاج β سرعة نسبة للأرض مقدارها $(0.9c + 0.5c = 1.4c)$، وهذا مستحيل. لذا فبموجب المعادلة 1.28 والقيمتين $(u' = 0.5c)$ و $(v = 0.9c)$ ستكون السرعة المطلوبة:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} = \frac{0.5c + 0.9c}{1 + \frac{(0.9c)(0.5c)}{c^2}} = 0.965c$$

وهذه السرعة أقل من سرعة الضوء c.

(5) احسب سرعة الإلكترون المنبعث من الكاثود إلى الأنود عند فرق جهد $120\ kV$.

الحل :

$$E_k = qV = (1.6 \times 10^{-19}\ C)(120000V) = 1.92 \times 10^{-14} J$$

$$= (1.92 \times 10^{-14} J)\left(\frac{1\ eV}{1.602 \times 10^{-19}\ J}\right) = 1.2 \times 10^5 eV = 0.12\ MeV$$

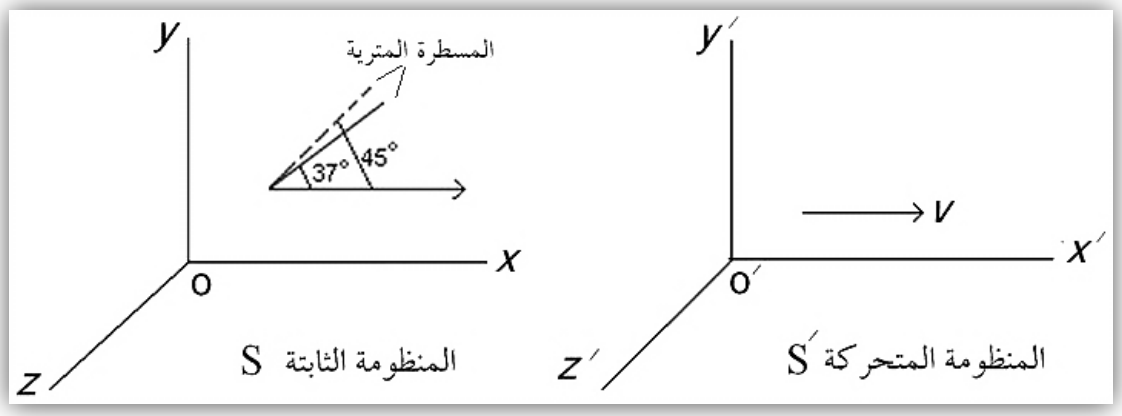
$$E = E_o + E_k = m_o c^2 + E_k = 0.511\ MeV + 0.12\ MeV = 0.631\ MeV$$

$$mc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad 0.631\ MeV = \frac{0.511\ MeV}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$1 - u^2/c^2 = \left(\frac{0.511\ MeV}{0.631\ MeV}\right)^2 = 0.656 \quad \rightarrow \quad u^2/c^2 = 1 - 0.656 = 0.344$$

$$u^2 = 0.344\ c^2 \quad \rightarrow \quad u = 0.58\ c$$

(6) مسطرة مترية موجودة في المنظومة S وتصنع زاوية مقدارها $37°$ مع المحور x كما في الشكل 1-10. كم يجب أن تكون سرعة مراقب باتجاه المحور xx' في المنظومة S' لكي تظهر له زاوية ميل المسطرة مساوية لـ $45°$؟ وما هو طول المسطرة الذي يقيسه هذا المراقب؟



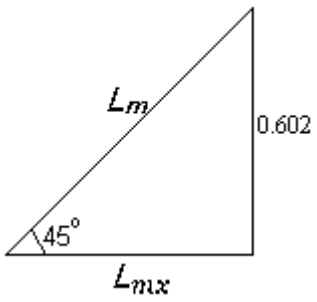
الشكل 1-10

الحل: طول المسطرة في المنظومة S : $L = 1m$

الطول باتجاه x في حالة السكون: $L_x = 1\,cos37 = 0.798\,m$

الطول باتجاه y في حالة السكون: $L_y = 1\,sin\,37 = 0.602\,m$

الطول L_y لا يتغير لأنه عمودي على الحركة



$$Tan\,45 = \frac{0.602}{L_{mx}} = 1 \quad \rightarrow \quad L_{mx} = 0.602\,m$$

$$L_{mx} = L_x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left(\frac{L_{mx}}{L_x}\right)^2 = \left(\frac{0.602}{0.798}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \rightarrow \quad v = 0.66\,c$$

طول المسطرة بالنسبة للمراقب المتحرك:

$$sin\,45 = \frac{L_y}{L_m} = \frac{0.602\,m}{L_m} \quad \rightarrow \quad L_m = \frac{0.602\,m}{0.707} = 0.851\,m$$

(7) مكعب يتحرك بسرعة نسبية منتظمة v باتجاه أحد أضلاعه. أثبت أن حجمه V وكثافته ρ تُعطى بالعلاقتين:

$$V = V_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)} \quad , \quad \rho = \rho_o/\left(1 - (v^2/c^2)\right)$$

الحل: لنفرض أن طول ضلع المكعب $L_o =$ ، لذا فحجمه سيكون: $V_o = L_o^3$

وفي حالة الحركة فإن الضلع الذي يكون باتجاه الحركة يأخذ الصيغة:

$$L_x = L_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

أما الضلعان الآخران فلا يتغيران ويبقى طول كل منهما L_o، لذا فحجم المكعب المتحرك يكون:

$$V = L_xL_o^2 = L_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}\,L_o^2 = L_o^3\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = V_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

أما كثافة المكعب فإنها في حالة السكون ستساوي: $\left(\rho_o = \frac{m_o}{V_o}\right)$، وفي حالة الحركة: $\left(\rho = \frac{m}{V}\right)$،

$$\because m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad , \quad V = V_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

$$\therefore \rho = \left(\frac{m_o}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\right)\left(\frac{1}{V_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\right) = \frac{m_o}{V_o\left(1 - (v^2/c^2)\right)} = \frac{\rho_o}{1 - (v^2/c^2)}$$

(8) صاروخ على الأرض طوله $10m$. جد مقدار النقص في طوله أثناء الطيران بسرعة $0.6c$ بالنسبة لمراقب على الأرض. ثم جد الوقت الذي يجب أن يمضي ليكون الفرق بين الزمن في الصاروخ والزمن على الأرض ثانية واحدة.

الحل :

$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 10\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}} = 8m$$

النقص في الطول :

$$L_o - L = 10 - 8 = 2m$$

فرق الزمن :

$$\Delta t' - \Delta t = 1 \;\rightarrow\; \Delta t' = \Delta t + 1$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \quad or \quad \Delta t'\sqrt{1-(v^2/c^2)} = \Delta t$$

$$\Delta t = (\Delta t+1)\sqrt{1-(v^2/c^2)} = (\Delta t+1)\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}} = (\Delta t+1)(0.8)$$

$$\Delta t = 0.8\,\Delta t + 0.8 \;\rightarrow\; 0.2\,\Delta t = 0.8 \;\rightarrow\; \Delta t = 4\ sec$$

$$\therefore \Delta t' = 4 + 1 = 5\ sec \quad or \quad \Delta t' - \Delta t = 5 - 4 = 1\ sec$$

(9) ما طول المسطرة المترية المقاس أثناء تحركها باتجاه طولها بسرعة منتظمة بحيث تكون كتلتها مساوية لضعف كتلتها السكونية؟

الحل:

$$m = 2m_o = \frac{m_o}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \;\rightarrow\; 2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \;\rightarrow\; 1 - v^2/c^2 = \frac{1}{4}$$

$$v^2/c^2 = 0.75$$

$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1m\sqrt{1-0.75} = 0.5m$$

(10) أثبت أن مشتقة الطاقة الكلية بالنسبة للزخم تساوي السرعة النسبية $\left(\frac{dE}{dp} = u\right)$.

الحل :

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

بأخذ تفاضل طرفي المعادلة:

$$2EdE = 2c^2pdp + 0 \;\rightarrow\; 2E\frac{dE}{dp} = 2c^2p \;\rightarrow\; \frac{dE}{dp} = \frac{c^2p}{E}$$

$$\because E = mc^2 \quad and \quad p = mu$$

$$\therefore \frac{dE}{dp} = \frac{c^2mu}{mc^2} = u$$

(11) يبلغ متوسط عمر الميونات muons عند السكون $(2.2 \times 10^{-6}s)$. أما متوسط عمرها المقاس في المختبر فيبلغ $(6.6 \times 10^{-6}s)$. جد: (أ) كتلتها النسبية عند هذه السرعة في المختبر، مع العلم أن كتلتها السكونية تبلغ $207m_e$. (ب) طاقتها الحركية بوحدة eV. (ج) زخمها.

الحل: (أ)

$$m = Km_o$$

$$\Delta t' = K\Delta t \quad \rightarrow \quad K = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{6.6 \times 10^{-6}s}{2.2 \times 10^{-6}s} = 3$$

$$\therefore m = 3 \times 207m_e = 621m_e$$

(ب)
$$E_k = Km_oc^2 - m_oc^2 = (K-1)m_oc^2 = (3-1)\left(207 \times 0.511\frac{MeV}{c^2}\right)c^2$$
$$= 211.5\ MeV$$

(ج)
$$Total\ energy\ E = mc^2 = 621m_ec^2 = 621 \times \left(0.511\frac{MeV}{c^2}\right)c^2 = 317.3\ MeV$$

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

$$E^2 = (317.3\ MeV)^2 = p^2c^2 + \left(207 \times 0.511\frac{MeV}{c^2}\right)^2 c^4$$

$$p^2c^2 = (317.3\ MeV)^2 - (105.7\ MeV)^2 = 89506.8\ (MeV)^2$$

$$\therefore P = 299\ MeV/c$$

(12) تبلغ الطاقة الكلية لبروتون ثلاث مرات بقدر طاقته السكونية.

(أ) جد طاقة البروتون السكونية بوحدة إلكترون- فولت.

الحل :

$$Rest\ energy = m_pc^2$$
$$= (1.67 \times 10^{-27}kg)(3 \times 10^8 m/s)^2 = 1.5 \times 10^{-10}J$$
$$= (1.5 \times 10^{-10}J)\left(\frac{1\ eV}{1.6 \times 10^{-19}\ J}\right) = 938\ MeV$$

(ب) بأي سرعة سيتحرك البروتون؟

الحل: لأن الطاقة الكلية هي 3 مرات بقدر الطاقة السكونية فإنه: $E = 3m_pc^2$

$$E = Km_pc^2 \quad \rightarrow \quad K = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 3$$

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{9} \quad or \quad \frac{u^2}{c^2} = \frac{8}{9} \quad \rightarrow \quad u = \frac{\sqrt{8}}{3}c = 0.943\ c = 2.83 \times 10^8 m/s$$

(ج) احسب الطاقة الحركية للبروتون بوحدة إلكترون- فولت.

الحل :

$$E_k = E - m_pc^2 = 3m_pc^2 - m_pc^2 = 2m_pc^2$$

$$Because\ \ m_pc^2 = 938\ MeV\ ,\ \ \therefore E_k = 2 \times 938\ MeV = 1876\ MeV = 1.876\ GeV$$

(د) احسب زخم البروتون؟

الحل: يمكن استخدام المعادلة 1.39 لحساب الزخم مع $(E = 3m_pc^2)$:

$$E^2 = (3m_pc^2)^2 = p^2c^2 + m_p^2c^4$$
$$p^2c^2 = 9(m_pc^2)^2 - (m_pc^2)^2 = 8(m_pc^2)^2$$

وبجذر الطرفين:

$$Pc = \sqrt{8}\, m_pc^2$$

$$p = \sqrt{8}\,\frac{m_pc^2}{c} = \sqrt{8}\frac{938\ MeV}{c} = 2653\ MeV/c = 2.653\ GeV/c$$

(13) إلكترون كتلته $(m = 0.511\ MeV/c^2)$ وفوتون كتلته $(m = 0)$، لكل منهما زخم مقداره $(2\ MeV/c)$. جد الطاقة الكلية لكل منهما.

الحل: (أ) تُحسب طاقة الإلكترون الكلية من المعادلة 1.39 كما يلي:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} = \sqrt{(2\ MeV/c)^2c^2 + (0.511\ MeV/c^2)^2c^4}$$
$$= \sqrt{(2\ MeV)^2 + (0.511\ MeV)^2} = 2.064\ MeV$$

(ب) تُحسب طاقة الفوتون الكلية من المعادلة 1.40 كما يلي:

$$E = pc = (2\ MeV/c)c = 2\ MeV$$

(14) تصل طاقة الشمس إلى الأرض بمعدل يقارب $1.4\ kW$ لكل متر مربع من سطح عمودي على اتجاه الشمس. ما مقدار انخفاض كتلة الشمس في الثانية الواحدة بسبب فقدان الطاقة هذا؟ مع العلم أن معدل نصف قطر مدار الأرض حول الشمس هو $1.5 \times 10^{11}m$.

الحل: المساحة السطحية لكرة نصف قطرها r هي: $A = 4\pi r^2$. والقدرة الكلية المشعَّة من قبل الشمس، والتي تساوي القدرة التي تتلقاها كرة نصف قطرها هو نصف قطر مدار الأرض، ستساوي:

$$P = \frac{P}{A}A = \frac{P}{A}(4\pi r^2) = \left(1.4 \times \frac{10^3W}{m^2}\right)(4\pi)(1.5 \times 10^{11}m)^2 = 3.96 \times 10^{26}W$$

ولهذا فإن الشمس تفقد $3.96 \times 10^{26}J$ من طاقة السكون في كل ثانية، وهذا يعني أن كتلة السكون للشمس تقل بالمقدار التالي في كل ثانية:

$$m = \frac{E_o}{c^2} = \frac{3.96 \times 10^{26}J}{(3 \times 10^8\ m/s)^2} = 4.4 \times 10^9\ kg$$

وبما أن كتلة الشمس تبلغ $2 \times 10^{30}\ kg$ فلا تنفد كتلة الشمس لمليارات السنين وفق هذا المعدل.

(15) جسيم غير مستقر في حالة سكون ينشطر تلقائياً إلى شظيتين مختلفتي الكتلة، وتبلغ كتلة أولاهما $(2.5 \times 10^{-28}\ kg)$ والثانية $(1.67 \times 10^{-27}\ kg)$. فإذا كانت سرعة الشظية الأخف هي $(0.893c)$ بعد الانشطار فما هي سرعة الشظية الأثقل؟

الحل: يجب أن يكون الزخم النسبي للشظايا محفوظاً. ولكي يكون فرق الزخم الكلي صفراً قبل وبعد التشظي يجب أن يكون: $p_2 = p_1$ (حيث p_1: زخم الشظية الأخف و p_2: زخم الشظية الأثقل)،

$$K_1 m_1 u_1 = K_2 m_2 u_2$$

$$K_1 m_1 u_1 = \frac{2.5 \times 10^{-28}\ kg}{\sqrt{1 - (0.893)^2}} \times (0.893c) = (4.96 \times 10^{-28}\ kg)c$$

$$K_2 m_2 u_2 = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\ kg)}{\sqrt{1 - (u_2/c)^2}} u_2 = (4.96 \times 10^{-28}\ kg)c$$

$$1 - \left(\frac{u_2}{c}\right)^2 = \left(\frac{1.67 \times 10^{-27}\ u_2}{4.96 \times 10^{-28}\ c}\right)^2 = 11.33 \left(\frac{u_2}{c}\right)^2$$

$$1 = 12.33 \left(\frac{u_2}{c}\right)^2 \quad \rightarrow \quad u_2 = 0.285c$$

فهرست الفصل الأول

الموضوع	الصفحة
1-1: ما هي الفيزياء الذرية؟	1
1-2: مقدمة في النسبية	1
1-3: المحاور القصورية	2
1-4: قوانين نيوتن للحركة	3
1-5: تحويلات غاليلو	4
1-6: مبدأ نسبية نيوتن	5
1-7: تجربة مايكلسون- مورلي	6
1-8: فرضيات النظرية النسبية الخاصة	7
1-9: تحويلات لورنتز	8
1-10: نتائج تحويلات لورنتز	11
1- نسبية الطول	11
2- نسبية الزمن	13
3- نسبية السرعة	16
1-11: الكتلة النسبية	18
1-12: القوة النسبية	19
1-13: الطاقة النسبية	20
1-14: العلاقة بين الطاقة والزخم	23
الإلكترون فولت	24
أسئلة	25
مسائل محلولة	27

مصادر الفصل الأول

1- الفيزياء الذرية، د. طالب ناهي الخفاجي و د. عباس حمادي و د. هرمز موشي.
2- مفاهيم في الفيزياء الحديثة، آرثر بايزر، ترجمة الطبعة الثانية.
3- Introduction to Atomic and Nuclear Physics, Semat and Albright, Fifth Edition.
4- Concepts of Modern Physics, Arthur Beiser, Sixth Edition.
5- Modern Physics, A. Serway, J. Moses and A. Moyer, Third Edition.
6- Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, A. Serway and W. Jewett, eighth edition.
7- 1000 Solved Problems in Modern Physics, A. Kamal.