

الصفات الموجية للجسيمات

The Wave Properties of Particles

5-1: Introduction

٥-١: مقدمة

تبيّن من التجارب المختلفة كما مرّ في الفصول السابقة وجود طبيعتين للضوء وبقية الإشعاعات الكهرومغناطيسية إحداهما موجية والأخرى جسيمية. وقد تبدو هاتان الطبيعتان متناقضتين في بعض الأحيان، ففي ظاهرة التداخل التي تدل على الصفة الموجية للإشعاع يمكن تواجد موجتين في نفس الموضع والزمن ليحدث التداخل البناء أو الإتلافي، بينما لا يمكن تواجد جسيمين اثنين في نفس الموضع والزمن. وكما ذكرنا سابقاً هنالك ظواهر تُفسر على أساس الطبيعة الموجية للإشعاع كالتداخل كالحيود والاستقطاب والانعكاس والانكسار، وظواهر أخرى تُفسر على أساس أن الإشعاع متكون من جسيمات أو دقائق سُميت بالفوتونات كظواهر إشعاع الجسم الأسود والكهروضوئية وكومبتن. ولا يمكن أن يسلك الإشعاع كلا السلوكين الموجي والجسمي في نفس الوقت، فعندما ينتشر الإشعاع يبرز السلوك الموجي، وعند التفاعل مع المادة يبرز السلوك الجسمي.

إن تقبّل هذه الازدواجية في طبيعة الإشعاع ليس من الأمور اليسيرة بسبب الصفات المتناقضة بين الطبيعتين، فالحركة الموجية توصف بالتردد والطول الموجي وسرعة الطور والسعة والشدة، ويوصف الجسيم بالكتلة والزخم والطاقة. وعندما تنتشر الموجة تملأ حيزاً كبيراً نسبياً في الفضاء. أما الجسيم فيحتل موضعاً محدوداً صغيراً. ويصعب تقبل كل هذه الصفات (الموجية والجسيمية) لشيء واحد. ومع هذا فلا مناص من تقبل هذه الحقيقة المزدوجة سواء تيسّر فهمها أو تعرّس.

5-2: De Broglie's Hypothesis

٥-٢: فرضية دي بروي

في سنة 1924 استفاد دي بروي من فكرة الازدواجية في طبيعة الضوء وقال - ما معناه - إن التناظر واضح في الطبيعة (مبدأ الزوجية في الكون). فالضوء ثنائي بطبيعته، يتصرف في بعض الأحيان كموجة وفي أحيان أخرى كجسيم. وإذا كانت الطبيعة متناظرة فالزوجية في طبيعة الضوء يجب أن تقابلها زوجية في

طبيعة المادة. فالجسيمات أيضاً كالإلكترونات والبروتونات التي نعتقد عادة أنها جسيمات قد تتصرف مثل الموجات في بعض الحالات. وإذا كان الجسيم يتصرف كموجة فيجب أن يكون له طول موجي وتردد. ولم يكن لفكرة دي بروي أساس فيزيائي أو رياضي، فقد قال: (بعد نهاية الحرب العالمية الأولى، فكرت كثيراً في نظرية الكم وثنائية الموجة والجسيم... عندها شعرت بإلهام مفاجئ. كانت ازدواجية آينشتاين الموجية والجسيمية ظاهرة عامة تماماً تمتد إلى كل الطبيعة الفيزيائية)، وجاء جزء من إلهام دي بروي من نظرية بور عن ذرة الهيدروجين، حيث افترض فيها أن الإلكترون يتبع مدارات معينة فقط حول النواة، فقد ذكر: (هذه الحقيقة قدحت في ذهني فكرة أن الإلكترونات لا يمكن اعتبارها مجرد جسيمات). وبعد ذلك بعامين، استخدم شروذنجر مفهوم موجات دي بروي لتطوير نظرية عامة طبقها هو وآخرون لتفسير مجموعة متنوعة واسعة من الظواهر الذرية. وبعد تأكيد وجود موجات دي بروي في تجارب حيود الإلكترون في عام 1927 حصل دي بروي على جائزة نوبل عام 1929.

مرّت علينا سابقاً العلاقة التالية التي تعبر عن زخم الفوتون: $(p = h/\lambda)$. وتبين هذه العلاقة أن طول موجة الفوتون يمكن أن يُحدّد عن طريق زخمه: $(\lambda = h/p)$.

$$p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \quad \dots \dots 5.1$$

وقد اقترح دي بروي أن الجسيم المادي ذا الزخم p سيمتلك طولاً موجياً خاصاً يُعطى بنفس التعبير في المعادلة 5.1. وبسبب أن زخم جسيم كتلته السكونية m_0 وسرعته v هو $(p = m_0 v)$ ، فإن طول موجة دي بروي لهذا الجسيم سيكون:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} \quad \dots \dots 5.2$$

وإذا كان الجسيم يسير بسرعة نسبية (أكثر من عُشر سرعة الضوء) فستتخذ هذه المعادلة الصيغة:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{K m_0 v} \quad \dots \dots 5.3$$

حيث $(m = K m_0)$ و K : معامل لورنتز $(K = 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)})$.

وإضافة لهذا، وانسجماً مع الفوتونات، افترض دي بروي أن علاقة بلانك-آينشتاين $(E = hf)$ التي وُضعت أصلاً للتعبير عن طاقة الأشعة الكهرومغناطيسية (حيث E : طاقة الفوتون و f : تردد الموجة) يمكن تطبيقها على الجسيمات، فتصبح E الطاقة الكلية للجسيم. وسيكون تردد الجسيم حينئذ:

$$f = \frac{E}{h} \quad \dots \dots 5.4$$

كما هو الحال في الموجات الكهرومغناطيسية، لا يمكن ملاحظة المظهرين الموجي والجسمي للأجسام المتحركة في نفس الوقت. ولذا لا يمكننا أن نسأل ما هو الوصف "الصحيح"؟ وكل ما يمكن قوله هو أنه في حالات معينة يشبه الجسم المتحرك في سلوكه الموجة وفي حالات أخرى يتصرف كجسيم فقط. ومجموعة الخصائص التي ستبرز أكثر تعتمد على كيفية مقارنة طول موجة دي بروي مع أبعاد الجسيم نفسه وأبعاد الجزء الذي يتفاعل معه من المادة كما في المثال التالي:

مثال ٥-١: جد طول موجة دي بروي لكل من: (أ) كرة لعبة الغولف التي لها كتلة مقدارها 46 g وتتحرك بسرعة 30 m/s ، و (ب) إلكترون سرعته 10^7 m/s .

الحل: (أ) بما أن $(v \ll c)$ فإنه:

$$\lambda = \frac{h}{m_o v} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\text{ J.s}}{(0.046\text{ kg})(30\text{ m/s})} = 4.8 \times 10^{-34}\text{ m}$$

إن طول موجة الكرة صغير جداً مقارنة بأبعادها، ولذا لا نتوقع أن نجد أي مظهر موجي في هذا التصرف.

(ب) وهنا أيضاً $(v \ll c)$ «لماذا؟». ومع كتلة الإلكترون $(m_o = 9.1 \times 10^{-31}\text{ kg})$ سينتج:

$$\lambda = \frac{h}{m_o v} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\text{ J.s}}{(9.1 \times 10^{-31}\text{ kg})(10^7\text{ m/s})} = 7.28 \times 10^{-11}\text{ m}$$

ويلاحظ أن هذا الرقم قابل للمقارنة مع أبعاد الذرات، فمثلاً يبلغ نصف قطر ذرة الهيدروجين $(5.3 \times 10^{-11}\text{ m})$. ولذلك تمثل الصفة الموجية للإلكترون المتحرك مفتاحاً لفهم تركيب وسلوك الذرة.

مثال ٥-٢: جد الطاقة الحركية لبروتون له طول موجة دي بروي مقداره $(1\text{ fm} = 1 \times 10^{-15}\text{ m})$ ، والذي هو تقريباً قطر البروتون.

الحل: إذا كان المقدار pc للبروتون أصغر بكثير من طاقته السكونية $(E_o = 0.938\text{ GeV})$ فلن نحتاج للحسابات النسبية، وإلا سوف نستخدم هذه الحسابات. «لماذا؟». ولمعرفة الأمر نستخدم المعادلة 5.2 لحساب pc

$$pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\text{ J.s})(3 \times 10^8\text{ m/s})}{1 \times 10^{-15}\text{ m}} = 1.98 \times 10^{-10}\text{ J}$$

$$= \frac{1.98 \times 10^{-10}\text{ J}}{1.6 \times 10^{-19}\text{ J/eV}} = 1.24 \times 10^9\text{ eV} = 1.24\text{ GeV}$$

وبهذا يتبين أن $(pc > E_o)$ ، لذا سنحتاج للحسابات النسبية. ومن المعادلة 1.43 ستكون الطاقة الكلية للبروتون:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_o^2 c^4} = \sqrt{p^2 c^2 + E_o^2} = \sqrt{(1.24\text{ GeV})^2 + (0.938\text{ GeV})^2} = 1.555\text{ GeV}$$

وطاقته الحركية ستصبح:

$$E_k = E - E_o = (1.555 - 0.938)\text{ GeV} = 0.617\text{ GeV} = 617\text{ MeV}$$

٥-٣: موجات دي بروي والعالم العياني

5-3: De Broglie Waves and the Macroscopic World

إذا كانت فرضية دي بروي صحيحة وكان للمادة جانب موجي، فقد تتساءل لماذا لا نرى هذا الجانب في الحياة اليومية؟ وكمثال فإننا نعلم أن الموجات تنحرف (تحيّد) عند إرسالها عبر شق منفرد. ولكننا عندما نسير عبر بوابة (والتي تُعد نوعاً من الشق الفردي) لا نقلق بشأن انحراف أجسامنا. ويكون السبب الرئيسي في عدم رؤيتنا لهذه التأثيرات على المقاييس البشرية هو أن ثابت بلانك h له قيمة صغيرة جداً. ونتيجة لهذا فإن أطوال موجات دي بروي صغيرة جداً حتى لأصغر الأجسام التي يمكننا رؤيتها، ولا نلاحظ تأثيراتها الموجية كما مرّ في المثال ٥-١ بالنسبة لكرة الغولف، وكما في المثال التالي:

مثال ٥-٣: جد الطول الموجي لحبة رمل ساقطة على الأرض إذا كانت كتلتها $(5 \times 10^{-10} \text{ kg})$ وقطرها 0.07 mm وتسقط بسرعة نهائية تبلغ حوالي 0.4 m/s . ثم ناقش النتيجة.

الحل: يكون زخم حبة الرمل لحظة وصولها للأرض:

$$p = m_o v = (5 \times 10^{-10} \text{ kg})(0.4 \text{ m/s}) = 2 \times 10^{-10} \text{ kg.m/s}$$

وطول موجة دي بروي لها:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2 \times 10^{-10} \text{ kg.m/s}} = 3.3 \times 10^{-24} \text{ m}$$

هذا الطول الموجي ليس فقط أصغر بكثير من قطر حبة الرمل، ولكنه أيضاً أصغر بكثير من حجم الذرة النموذجية (التي يكون قطرها حوالي 10^{-10} m). والجسم الأثقل والأسرع حركة سيكون له زخم أكبر وطول موجة دي بروي أصغر. ولهذا فإن تأثيرات هكذا أطوال موجية بالغة الصغر تكون صغيرة جداً بحيث لا يمكننا ملاحظتها في الحياة اليومية.

5-4: The Diffraction of Electrons

٥-٤: حيود الإلكترونات

قادت فرضية دي بروي بأن الجسيمات المادية ترافقها حركة موجية إلى نتائج بعيدة المدى. فأى جسيم كتلته m_o يتحرك بسرعة v صغيرة مقارنة بسرعة الضوء سترافقه موجة يبلغ طولها:

$$\lambda = \frac{h}{m_o v} \quad \dots \dots 5.3'$$

وإذا اكتسب جسيم مشحون كالإلكترون سرعة v عند تعجيله بفرق جهد مقداره V فإن الشغل Ve المنجز على الإلكترون يساوي طاقته الحركية E_k . وعندما تكون سرعته غير نسبية فإنه:

$$E_k = \frac{1}{2} m_o v^2 = \frac{p^2}{2m_o} = Ve \rightarrow p = \sqrt{2m_o Ve} \quad \dots \dots 5.5$$

وبالتعويض في المعادلة 5.1 ينتج أن طول موجة دي بروي المرافقة للجسيم هو:

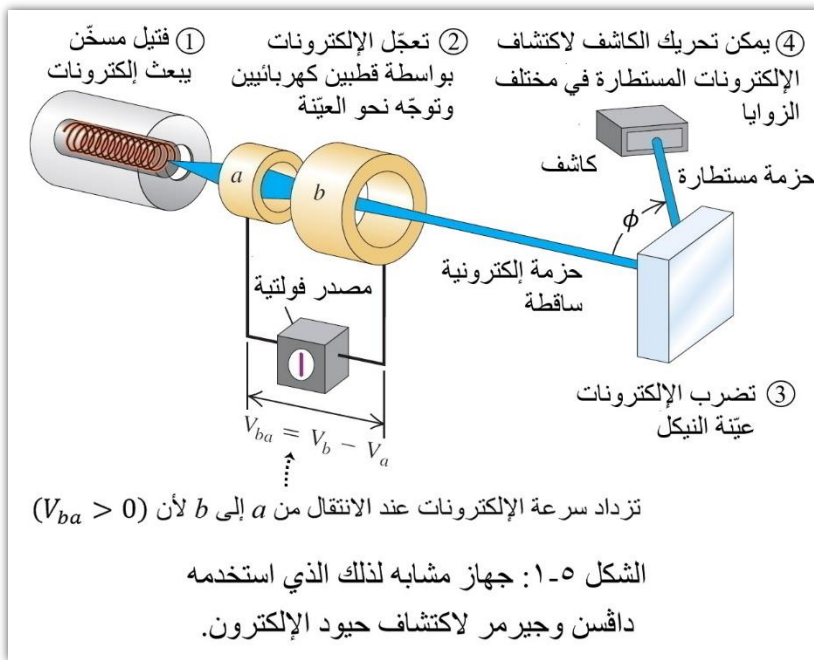
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0Ve}} \quad \dots \dots 5.6$$

وكمثال، فإنه لفرق جهد مقداره 100 V مسّط على إلكترون نحصل على طول موجة للإلكترون مقدارها:

$$\lambda = 1.22 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.22 \text{ \AA}$$

وطول الموجة هذا مقارب لمقادير المسافات بين المستويات الذرية في البلورات. وتوحي لنا هذه الحقيقة إمكانية استخدام البلورات كمحزرات حيود للإلكترونات لمعرفة ما إذا كانت لها خاصية موجية أم لا، بطريقة مماثلة لتلك التي استخدمت في حيود الأشعة السينية.

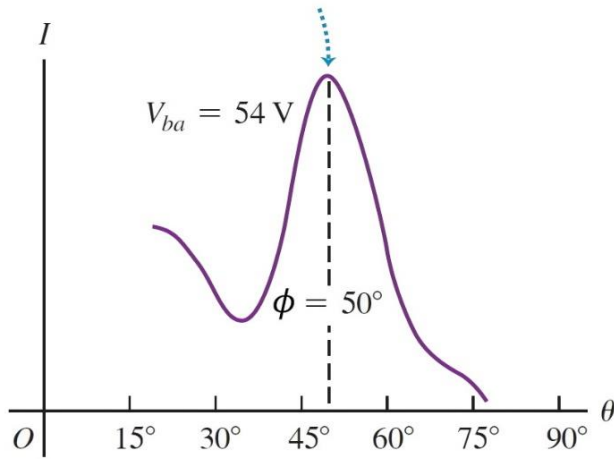
في سنة 1927 كان الفيزيائيان دافسن Davisson وجيرمر Germer يدرسان استطارة الإلكترونات من سطوح الأجسام الصلبة باستخدام جهاز كالمبين في الشكل ٥-١. وقد وُضع الجهاز داخل وعاء زجاجي مفرغ من الهواء، وتم ترتيبه بحيث يمكن تغيير طاقة الإلكترونات في الحزمة الساقطة وموقع كاشف الإلكترونات (أي الزاوية ϕ). ومثل العديد من المعادن الاعتيادية كانت عينة النيكل المستخدمة متعددة البلورات



polycrystalline، إذ تتكون من العديد من البلورات المجهرية عشوائية الاتجاهات ومرتبطة معاً. وفي هكذا حالة تتوقع الفيزياء التقليدية أن الإلكترونات المستطارة ستنتشر بمختلف الاتجاهات، مثل الضوء المرتد عن سطح خشن، مع توزيع سلس للشدة كدالة للزاوية ϕ . وقد تحقق هذا التوقع فعلاً. وبعد هذا حدث خلال

التجربة تسرب أدى إلى دخول الهواء للجهاز وتشكيل غشاء متأكسد على السطح المعدني. وللتخلص من التأكسد وُضعت العينة في فرن عالي الحرارة، ثم أعيدت إلى الجهاز وأعيدت التجربة، ولكن النتائج أصبحت مختلفة جداً. فبدلاً من مشاهدة تغير سلس لشدة الإلكترونات المستطارة مع زاوية الاستطارة لوحظ ظهور قمم عظيمة لشدة حزمة الإلكترون المنعكسة في زوايا محددة (الشكل ٥-٢) تعتمد على طاقة الإلكترونات الساقطة (أي تعتمد على فرق الجهد المعجل المستخدم V_{ba}). وقد لاحظ دافسن وجيرمر تشابه هذا السلوك

هذه القمة في شدة الإلكترونات المستطارة هي بسبب التداخل البناء بين الموجات الإلكترونية المستطارة بواسطة ذرات سطحية مختلفة



الشكل ٥-٢: شدة حزمة الإلكترونات المستطارة كدالة لزاوية الإستطارة ϕ .

مع حيود الأشعة السينية. لذا فإن تلك النتيجة هي عبارة عن تأثيرات التداخل الموجي الناشئ من الطبيعة الموجية للإلكترونات.

استطاع دافسن وجيرمر حساب سرعات الإلكترونات بواسطة الفولتية المعجلة، ولهذا تمكنا من حساب طول موجة دي بروي من المعادلة 5.2. وإذا تم تعجيل إلكترون من السكون عند النقطة a إلى النقطة b من خلال زيادة فرق الجهد $V_{ba} = V_b - V_a$ كما في الشكل ٥-١ فإن الشغل eV_{ba} المنجز على الإلكترون يساوي طاقته

الحركية. وعندما تكون سرعته غير نسبية فإن زخم الإلكترون يُحسب كما في المعادلة 5.5:

$$\frac{p^2}{2m_0} = eV_{ba} \rightarrow p = \sqrt{2m_0 eV_{ba}} \quad \dots \dots 5.5'$$

وطول موجة دي بروي المرافقة للإلكترون هو:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eV_{ba}}} \quad \dots \dots 5.6'$$

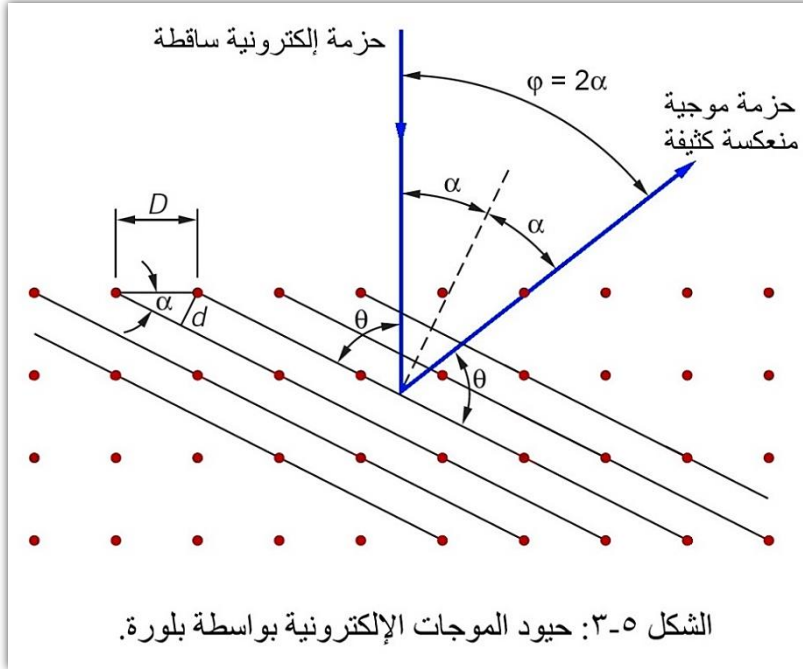
ويلاحظ هنا أنه كلما زاد فرق الجهد المعجل كلما كان الطول الموجي للإلكترون أقصر.

هنا يتبادر إلى الذهن سؤالان: ما سبب هذا التأثير الجديد؟ ولماذا لم يظهر إلا بعد تسخين النيكل؟ يمكن الجواب استناداً على فرضية دي بروي بأن هنالك موجات إلكترونية قد عانت حيوداً من الهدف مثل حيود الأشعة السينية بواسطة المستويات الذرية في البلورات. وتأيدت هذه الفكرة عندما تبين أن تسخين قطعة النيكل عند درجة حرارة عالية يتسبب في تجمع العديد من البلورات المنفردة الصغيرة كي تشكل مناطق بلورية كبيرة داخل النيكل بمستويات بلورية مصطفة بشكل عرضي على اتجاه الحزمة الإلكترونية كما في الشكل ٥-٣.

ويمكن تحليل حالة انعكاس الإلكترونات ذات الفولتية $54 V$ والزاوية 50° الملاحظة في الشكل ٥-٢ على أنها تداخل بناء، أي تداخل الموجات الإلكترونية المنعكسة من مستويات ذرات بلورة النيكل المتباعدة عن بعض بمسافات متساوية كما في الشكل ٥-٣ بطريقة مماثلة لما في نموذج حيود الأشعة السينية للاوي Laue. وتُمثل الخطوط المتوازية المرسومة في الشكل مستويات عمودية على سطح الورقة. وتصنع حزمة

الإلكترونات الساقطة على البلورة زاوية α مع العمود على هذه المستويات. وإذا كان طول موجة دي بروي المرافقة لهذه الإلكترونات يحقق قانون براگ فعندئذ:

$$m\lambda = 2d \sin \theta = 2d \cos \alpha \quad \dots \dots 5.7 \quad (\text{why } \sin \theta = \cos \alpha ?)$$



لذلك سيكون للموجات المستطارة من هذه المستويات علاقات طور صحيحة لتقوية بعضها البعض الآخر، وستولد حزمة عالية الشدة منعكسة بزاوية α مع العمود. ويمكن وضع معادلة براگ بشكل أكثر فائدة بملاحظة أن المسافة d بين المستويات الذرية مرتبطة بالمسافة D بين ذرات طبقة سطح البلورة بالعلاقة $(d = D \sin \alpha)$. وبتعويضها في

$$m\lambda = 2D \sin \alpha \cos \alpha = D \sin 2\alpha \quad \text{المعادلة 5.7 ينتج:}$$

$$m\lambda = D \sin \phi \quad \dots \dots 5.8 \quad \text{وبعد فرض } (\phi = 2\alpha) \text{ ينتج:}$$

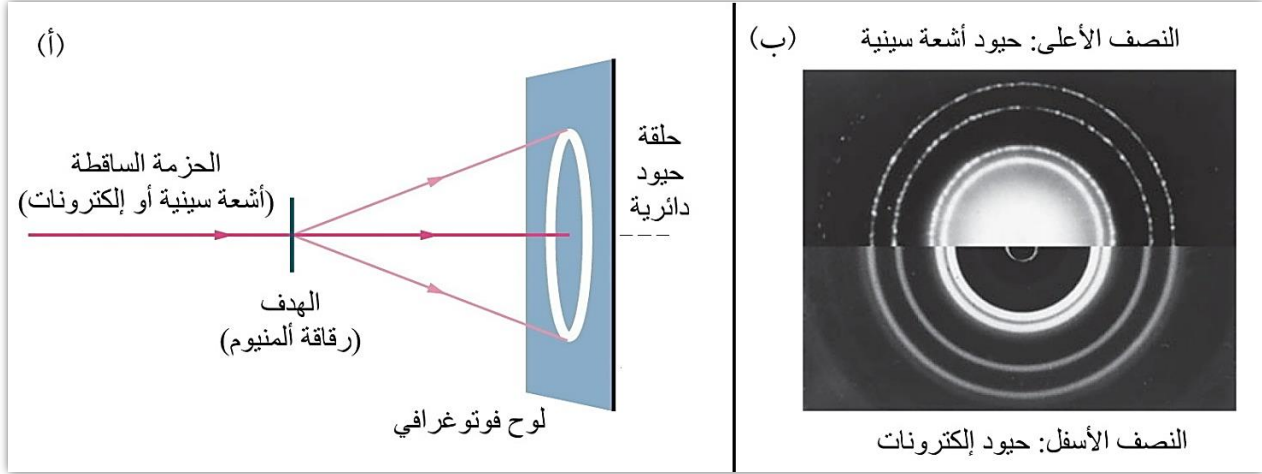
ويمكن تطبيق هذه المعادلة على القياسات التي قام بها دافسن وجيرمر. وعندما تكون حزمة الإلكترونات الساقطة ذات فولتية $54 V$ وزاوية $(\phi = 50^\circ)$ و $(m = 1)$ ولدينا قيمة D معروفة من بيانات الأشعة السينية وتساوي $2.15 \text{ \AA}$ فإنه بعد التعويض في المعادلة 5.8 ينتج:

$$\lambda = 2.15 \text{ \AA} \times \sin 50 = 1.65 \text{ \AA}$$

وعند مقارنة طول الموجة هذا مع القيمة المستحصلة من تعويض $(V = 54 \text{ Volts})$ في المعادلة 5.6 سينتج $(\lambda = 1.66 \text{ \AA})$. وقد أجريت قياسات مماثلة لإلكترونات طاقتها أعلى من هذه القيمة وقورنت في كل مرة فجاءت موافقة بشكل جيد مع فرضية دي بروي.

تجربة تومسون: قدم تومسون Thomson في عام 1928 برهاناً على الطبيعة الموجية للإلكترونات النسيية، حيث قذف حزمة ضيقة من الإلكترونات بطاقات تتراوح بين 10 إلى 40 keV على رقائق معدنية، وكان ترتيب التجربة مشابهاً لذلك المستخدم في الحصول على أنماط لاوي للأشعة السينية، وحصل على نمط بشكل حلقات واضحة ومتمركزة حول بقعة مركزية على الشاشة. ويبين الشكل ٥-٤-ب التشابه في الأنماط التي تنتجها الأشعة السينية وموجات الإلكترونات.

تتكون المعادن العادية مثل الذهب والفضة والألمنيوم من عدد كبير من بلورات صغيرة جداً ذات اتجاهات عشوائية. وفي حالة سقوط أي موجة بطول λ على رقاقة مصنوعة من هكذا مواد فسيُنتج نمط حيود يتكون من قمم شدة تشكل حلقات دائرية حول اتجاه الحزمة الساقطة كما في الشكل ٥-٥-أ.



الشكل ٥-٤: حيود الأشعة السينية والإلكترونات، (أ) مخطط للترتيب المستخدم لإنتاج نمط حيود لهدف من الألمنيوم متعدد البلورات. (ب) يُظهر النصف العلوي من الصورة نمط حيود لأشعة سينية طولها الموجي 71 pm تمر عبر رقاقة ألومنيوم. ويُظهر النصف السفلي نمط حيود متولد بواسطة إلكترونات طاقتها 600 eV (طول موجة دي بروي لها حوالي 50 pm)، وتم تكبير هذا النمط 1.6 مرة لتيسير المقارنة مع نمط حيود الأشعة السينية. ويُلاحظ أن النموذجين متماثلان هندسياً.

لم تكن الإلكترونات الأجسام الوحيدة التي تم التحقق من صفاتها الموجية، فقد تمت البرهنة على الخصائص الموجية للذرات والجزيئات المتعادلة لأول مرة عام 1930 بعد إسقاط حزم من ذرات الهيليوم وجزيئات الهيدروجين على بلورة فلوريد الليثيوم. ومنذ ذلك الحين لوحظ حيود ذرات أخرى وبروتونات ونيوترونات. وفي جميع الحالات كانت قياسات الأطوال الموجية متفقة مع توقعات دي بروي.

مثال ٥-٤: في تجربة حيود الإلكترون باستخدام فولتية معجّلة مقدارها 54 V ، تحدث أقصى شدة عندما تكون الزاوية بين كاشف الإلكترونات والحزمة الإلكترونية الساقطة ($\phi = 50^\circ$). ويشير حيود الأشعة السينية إلى أن التباعد بين ذرات الهدف هو $(2.18 \times 10^{-10} \text{ m})$. جد الطول الموجي للإلكترون.

الحل: يمتلك الإلكترون هنا طاقة حركية مقدارها 54 eV ، وهي صغيرة جداً مقارنة بطاقته السكونية $(m_0 c^2 = 0.51 \text{ MeV})$. ولهذا ستكون سرعته غير نسبية، ويمكن تطبيق المعادلة 5.6:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 V e}} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(54 \text{ V})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}} = 1.67 \times 10^{-10} \text{ m}$$

ويمكن بدلاً من هذا استعمال المعادلة 5.8 وافترض $(m = 1)$ ،

$$\lambda = D \sin \phi = (2.18 \times 10^{-10} \text{ m}) \sin 50^\circ = 1.67 \times 10^{-10} \text{ m}$$

إن الرقمين الناتجين يتفقان مع دقة النتائج التجريبية، وهذا يعطي تقييماً ممتازاً لهذه الحسابات. ويلاحظ أن الطول الموجي للإلكترون هنا أقل من الأبعاد بين الذرات.

مثال 5-5: جد طول موجة دي بروي للإلكترون طاقته الحركية 120 eV .

الحل: الطريقة الأولى: من المعادلة 5.1 ($\lambda = h/p$)، ولهذا نحسب زخم الإلكترون أولاً. ويمكن هذا من خلال العلاقة $(E_k = \frac{1}{2}mv^2)$ التي تؤدي إلى العلاقة:

$$p = mv = \sqrt{2mE_k}$$

$$= \sqrt{(2)(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(120 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} = 5.91 \times 10^{-24} \text{ kg.m/s}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{5.91 \times 10^{-24} \text{ kg.m/s}} = 1.12 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.12 \text{ Å}$$

الطريقة الثانية: وفق العلاقة $(E_k = qV)$ يمكن معرفة الجهد المسلط على الإلكترون، وهو 120 V . وحينئذ يمكن تطبيق المعادلة 5.6:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0Ve}} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(120 \text{ V})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}} = 1.12 \text{ Å}$$

مثال 5-6: لدينا ثلاثة جسيمات: إلكترون وفوتون وبروتون، كلها تتحرك في الفراغ. أيُّ منها: (أ) يمتلك طاقة سكونية؟ وما مقدارها؟ (ب) له شحنة؟ وما مقدارها؟ (ج) يحمل طاقة؟ وما مقدارها؟ (د) يحمل زخماً؟ وما مقداره؟ (هـ) يتحرك بسرعة الضوء؟ (و) يمتلك طولاً موجياً يميز حركته؟

الحل: أ- الإلكترون والبروتون لهما كتلة، ولهذا يمتلك كل منهما طاقة سكونية مقدارها $(E_0 = m_0c^2)$. والفوتون لا يمتلك طاقة سكونية $(E_0 = 0)$ ، ولا يكون في حالة سكون.

ب- الإلكترون له شحنة مقدارها $(-e)$ والبروتون له شحنة مقدارها $(+e)$ ، والفوتون ليس له شحنة.

ج- كلها تحمل طاقة، فالإلكترون والبروتون إذا كانا يتحركان بسرعة نسبية فالطاقة الكلية التي يحملها كل منهما هي $(E = E_k + E_0 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4})$ ، وإذا كانا يتحركان بسرعة غير نسبية فالطاقة الحركية لكل منهما هي $(E_k = \frac{1}{2}m_0v^2)$. أما الطاقة التي يحملها الفوتون فهي $(E = hf = pc)$.

د- كلها تحمل زخماً. فللإلكترون والبروتون: $(p = Km_0v)$ ، وإذا كانت $(v \ll c)$ فإن $(K = 1)$ و $(p = m_0v)$. والفوتون يحمل زخماً مقداره $(p = E/c = h/\lambda)$.

هـ- الفوتون فقط يتحرك بسرعة الضوء لأن الضوء متكون من فوتونات.

(١) لماذا لم نستخدم العلاقة النسبية هنا لحساب الزخم؟

و- كل منها له طول موجي، فلإلكترون والبروتون طول موجة دي بروي ($\lambda = h/p$)، والفوتون له نفس العلاقة للطول الموجي ($\lambda = h/p$).

5-5: The Diffraction of Neutrons

٥-٥: حيود النيوترونات

ينفرد النيوترون بخاصية مهمة هي أن صافي شحنته يساوي صفراً، ولهذا فهو لا يتأثر بالمجالات الكهروستاتيكية للإلكترونات والنوى، وينفذ من أكثر المواد بسهولة كبيرة، ولا يمكن تعجيله بواسطة فرق جهد كهربائي. وفي معظم الحالات يتصادم تصادماً مرناً مع النوى (ما معنى التصادم المرن؟)، ويفقد النيوترون جزءاً من طاقته في كل تصادم. وفي حال استمرار عملية التصادم كأن يتواجد النيوترون داخل وسط مادي كبير فسوف تصل سرعته وبالتالي طاقته إلى حالة اتزان تعتمد على درجة حرارة المادة التي يتفاعل معها. ولو كانت هذه المادة بدرجة حرارة مطلقة T فإن النيوترونات ستمتلك طاقة حركية E_k تُعطى بالصيغة:

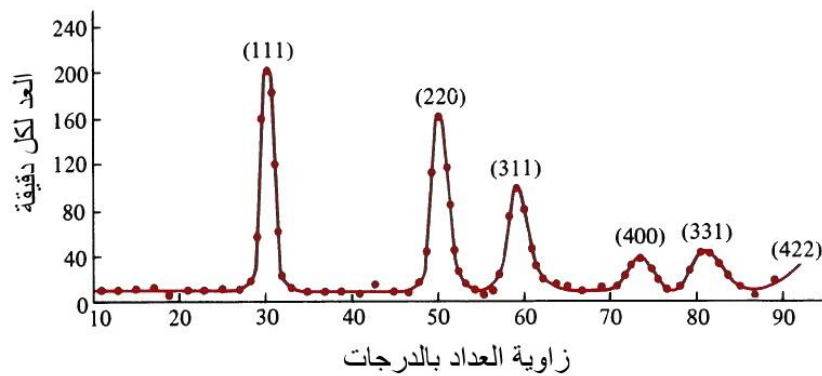
$$E_k = kT \quad \dots \dots 5.9$$

حيث k : ثابت بولتزمان، وقيمه $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$.

ولو وصلت بعض النيوترونات إلى حالة اتزان في وسط من الكرافيت أو البرافين في درجة حرارة الغرفة (التي سنعتبرها تساوي 300 K) فإن معدل الطاقة الحركية لهذه النيوترونات سيكون:

$$E_k = 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 4.14 \times 10^{-21} \text{ J} = 4.14 \times 10^{-14} \text{ erg} = 0.025 \text{ eV}$$

وباستخدام العلاقة ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$) يتبين أن سرعة نيوترون بهذه الطاقة هي ($2.22 \times 10^3 \text{ m/s}$)، (كيف؟)، وتسمى هكذا نيوترونات واطئة الطاقة بالنيوترونات البطيئة أو النيوترونات الحرارية thermal neutrons. وسيكون طول موجة دي بروي لها $1.78 \text{ \AA}$ (كيف؟)، وهو تقريباً بنفس مرتبة طول موجة الأشعة السينية. وهذا يعني أنه عند ادخال التحويل اللازم على الطرق المستخدمة في دراسة الأشعة السينية يمكن دراسة التفاعلات بين النيوترونات البطيئة والمادة. وبالفعل فقد تمت دراسة حيود النيوترونات بأكثر من طريقة، وفي الشكل ٥-٥ نموذج لحيود النيوترونات عن مسحوق الماس. وتشير الأرقام المكتوبة فوق القمم إلى المستويات البلورية التي تنتج هذه القمم.



الشكل ٥-٥: نمط لحيود النيوترونات منتج بواسطة مسحوق الماس.

يُستخدم حيود النيوترونات الحرارية لدراسة التركيب البلوري والجزيئي بنفس طريقة حيود الأشعة السينية. وقد ثبت أن حيود النيوترونات مفيد بشكل خاص في دراسة الجزيئات العضوية الكبيرة.

مثال 5-7: جد السرعة والطاقة الحركية لنيوترون كتلته $(1.675 \times 10^{-27} \text{ kg})$ وطول موجة دي بروي له $(\lambda = 0.2 \text{ nm})$. ثم قارن هذه الطاقة بمعدل الطاقة الحركية الانتقالية لجزيئة غاز مثالي في درجة حرارة الغرفة $(T = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K})$

الحل: نستخرج سرعة النيوترون من المعادلة 5.2:

$$v = \frac{h}{\lambda m_o} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{(0.2 \times 10^{-9} \text{ m})(1.675 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 1.98 \times 10^3 \text{ m/s}$$

الطاقة الحركية للنيوترون هي:

$$E_k = \frac{1}{2} m_o v^2 = \frac{1}{2} (1.675 \times 10^{-27} \text{ kg})(1.98 \times 10^3 \text{ m/s})^2$$

$$= 3.28 \times 10^{-21} \text{ J} = 0.0205 \text{ eV}$$

يعطى معدل الطاقة الحركية الانتقالية لجزيئة غاز مثالي بالعلاقة:

$$E_k = \frac{1}{2} m_o v_{av}^2 = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(293 \text{ K}) = 6.07 \times 10^{-21} \text{ J} = 0.0379 \text{ eV}$$

يلاحظ أن قيمتي الطاقين متقاربتان، وهذا هو سبب تسمية النيوترون ذي الطاقة الحركية في هذا النطاق بالنيوترون الحراري. ويلاحظ أيضاً أن سرعة النيوترون المحسوبة أقل بكثير من سرعة الضوء. وهذا يبرر استخدامنا للصيغة غير النسبية للمعادلة 5.2.

5-6: What are the Waves of De Broglie? ما هي موجات دي بروي؟

إن التَمَوُّج يعني التغير الدوري، فمثلاً ما يتغير بشكل دوري في موجات الماء هو ارتفاع سطح الماء، وفي موجات الصوت هو ضغط الوسط الناقل كالهواء، وفي موجات الضوء تتغير المجالات الكهربائية والمغناطيسية. ولكن ما الذي يتغير في حالة موجات المادة؟

إن الكمية التي يصف تغيرها الموجات المادية تُدعى دالة الموجة wave function، ويُعبر عنها بالحرف الإغريقي Ψ (يُلفظ: پساي psi). وإن قيمة دالة الموجة المرافقة لجسيم متحرك عند الموقع x, y, z في زمن t تتعلق باحتمالية العثور على الجسيم في ذلك المكان والزمان. ومع هذا فإن الدالة الموجية Ψ نفسها ليس لها معنى فيزيائي مباشر، بخلاف مربع القيمة المطلقة للدالة الموجية $|\Psi|^2$ التي تُدعى بكثافة الاحتمالية probability density.

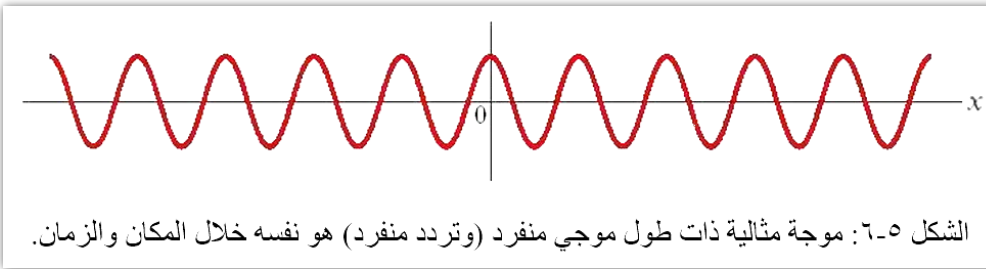
إن احتمالية العثور تجريبياً على الجسيم الموصوف بدالة الموجة Ψ عند النقطة x, y, z في الزمن t تتناسب مع قيمة $|\Psi|^2$ في الزمن t ، ويجب أن تكون قيمة الاحتمالية محصورة بين 0 (الجسم غير موجود جزئاً) و 1 (الجسم موجود قطعاً)، والاحتمالية بين هاتين القيمتين (مثلاً 0.2) تعني أن هناك فرصة 20%

للعثور على الجسم. وما دامت $|\Psi|^2$ لا تساوي صفراً في مكان ما فتوجد فرصة ما - حتى لو كانت صغيرة - للكشف عن الجسم هناك. وتم تقديم هذا التفسير لأول مرة بواسطة ماكس بورن Max Born في عام 1926. وهناك فرق كبير بين احتمالية وقوع حدث ما والحدث نفسه. فرغم أننا نستطيع التحدث عن الدالة الموجية Ψ التي تصف الجسم واحتمالية تواجده في الفضاء فإن هذا لا يعني أن الجسم نفسه قد تواجد فعلاً. وعندما يتم إجراء تجربة للكشف عن الإلكترونات مثلاً، فإما يتم العثور على إلكترون كامل في وقت ومكان محددين أو لا يُعثر عليه، وليس هناك معنى لإيجاد 20% من الإلكترونات. بل هناك احتمال بنسبة 20% أن يتم العثور على الإلكترون في ذلك الوقت والمكان. وهذه الاحتمالية تتحدد بـ $|\Psi|^2$.

5-7: The Quantum Particle

٧-٥: الجسم الكمي

اعتبرت الفيزياء التقليدية قبل طرح نظرية بلانك الكمية أن الجسيمات لها نموذج جسيمي فقط وأن الموجات لها نموذج موجي فقط. ولكن فكرة أن كلاً من الضوء والجسيم المادي يمتلك خصائص الجسيمات والموجات معاً لا تتلاءم مع هذا التمييز بينهما، رغم أن الأدلة التجريبية تبين أن هذا الاستنتاج هو ما يجب أن نتقبله. ويؤدي الإقرار بهذه الطبيعة المزدوجة إلى نموذج جديد يدعى الجسم الكمي، وهو مزيج من النموذجين الجسيمي والموجي. وفي هذا النموذج تمتلك الكيانات خصائص الجسيمات والموجات معاً، ويجب علينا اختيار سلوك واحد مناسب (جسيمي أو موجي) لفهم ظاهرة معينة.



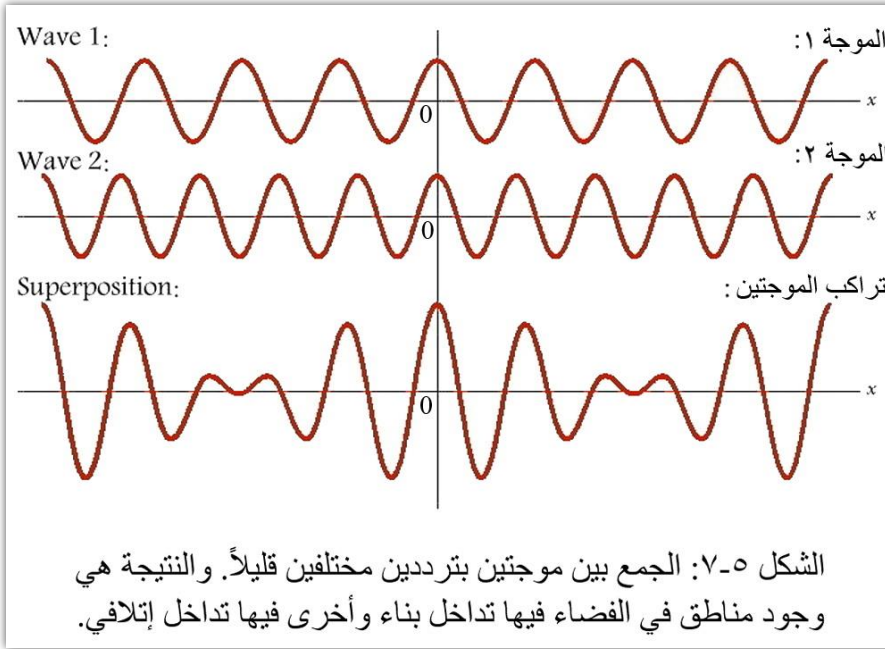
ولتوضيح الأمر

أكثر نستذكر بعض خصائص الجسم المثالي والموجة المثالية، فالجسيم

المثالي هو جسيم نقطي متموضع في الفضاء localized in space لا يؤخذ حجمه بعين الاعتبار zero size، والموجة المثالية هي ذات تردد منفرد تمتد بشكل لا نهائي كما في الشكل ٥-٦. ولهذا فهي غير متموضعة في مكان محدد في الفضاء.

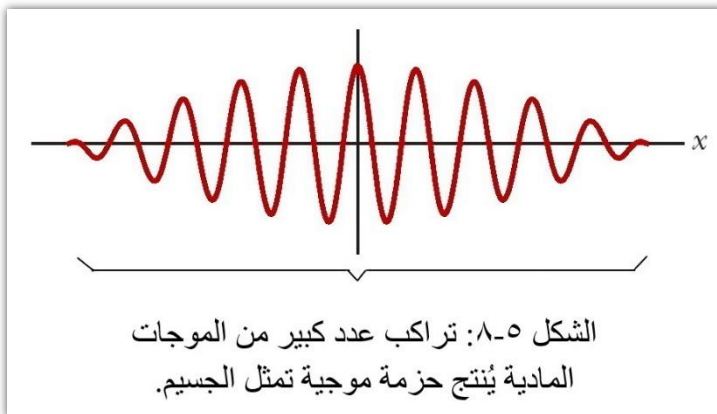
ويمكن بناء كيان متموضع من موجات ممتدة للما لا نهاية كالتالي: نرسم موجة واحدة على طول محور x مع وضع إحدى قممها عند $(x = 0)$ ، كما هو موضح في الشكل ٧-٥ (الموجة ١)، ثم نرسم موجة ثانية (الموجة ٢) بنفس السعة ولكن بتردد مختلف، وتكون إحدى قممها أيضاً عند $(x = 0)$. ونتيجة للتراكب superposition بين هاتين الموجتين تحدث نبضات، أي يحدث تغير دوري في سعة

الموجة، حيث أن الموجتين تتناوبان متداخلتين مرة بنفس الطور وأخرى بطور مختلف. ويوضح المنحنى الثالث في الشكل ٧-٥ نتيجة تراكب هاتين الموجتين.



ومما يلاحظ أننا أدخلنا بعض التموضع من خلال تراكب الموجتين، فالموجة المنفردة لها نفس السعة في كل مكان في الفضاء. وبإضافة موجة ثانية ذات تردد مختلف قليلاً حدث اختلاف في النقاط التي هي بنفس الطور عن النقاط ذات الطور المختلف ولم تصبح السعة ثابتة في كل مكان.

ويمكن إضافة المزيد من الموجات للموجتين الأصليتين، وكل موجة جديدة لها تردد جديد، وتتم الإضافة بحيث تكون إحدى قمم الموجة الجديدة عند $(x = 0)$ مما ينتج أن جميع الموجات تضاف بشكل بناء عند $(x = 0)$. وعندما نضيف عدداً كبيراً من الموجات فإن احتمال وجود قيمة موجبة لدالة موجية عند أي نقطة أخرى $(x \neq 0)$ يساوي احتمال وجود قيمة سالبة، ويكون هناك تداخل إتلافي في مختلف المواقع ما عدا قُرب $(x = 0)$ ، حيث تكون جميع القمم متراكبة. وتظهر نتيجة إضافة موجات كثيرة في الشكل ٨-٥ وتسمى المنطقة الصغيرة للتداخل البناء حزمة موجية wave packet. وهذه المنطقة المتموضعة من الفضاء تختلف عن جميع المناطق الأخرى. ويمكن تشخيص حزمة الموجة على أنها جسيم لأنها تحتوي على الطبيعة الموضعية للجسيم. ويتوافق موضع حزمة الموجة مع موضع الجسيم.



الطبيعة الموضعية لهذا الكيان هي الخاصية الوحيدة للجسيم التي تولدت بهذه العملية. ولم نتطرق إلى الكيفية التي قد تحقق بها الحزمة الموجية الخصائص الأخرى للجسيمات مثل الكتلة والشحنة الكهربائية والبرم. ولذلك فإن عملية تمثيل جسيم بصورة كاملة لم تتم بعد. ولو أثبتنا أن سرعة الحزمة الموجية تساوي

سرعة الجسيم فإن هذا سيضيف نقطة دعم أخرى لفكرة تمثيل الجسيم بحزمة من الموجات المتراكبة.

5-8: Phase Velocity and Group Velocity سرعة الطور وسرعة المجموعة

ما هي السرعة التي تنتقل بها موجات دي بروي؟ وهل هي نفس سرعة الجسم المتحرك الذي افترض ارتباطها به؟

إذا أشرنا لسرعة موجة دي بروي بالرمز v_p فيمكن تطبيق المعادلة الاعتيادية ($v_p = \lambda f$) لقياس سرعة الموجات، حيث λ هي طول موجة دي بروي ($\lambda = h/p = h/Km_0 v$). وتسمى v_p أيضاً سرعة الطور v_{phase} لأنها سرعة نقطة ذات طور ثابت في الموجة مثل قمة الموجة أو قعرها. ولإيجاد التردد f نسوي الصيغة الكمية ($E = hf$) بالصيغة النسبية للطاقة الكلية ($E = Km_0 c^2$) لينتج:

$$hf = Km_0 c^2 \quad \rightarrow \quad f = \frac{Km_0 c^2}{h}$$

ولهذا ستكون سرعة موجة دي بروي:

$$v_p = \lambda f = \left(\frac{h}{Km_0 v} \right) \left(\frac{Km_0 c^2}{h} \right) = \frac{c^2}{v} \quad \dots \dots 5.10$$

يتضح من هذه المعادلة أن سرعة موجات دي بروي تتجاوز سرعة الجسم v وكذلك سرعة الضوء c لأن ($v < c$) دائماً. وهذا لا يعني بالضرورة أن موجات دي بروي تبتعد عن الجسم. ولكي نفهم هذه النتيجة غير المتوقعة علينا معرفة أن النقطة ذات الطور الثابت في الدالة الموجية لموجات دي بروي لا تحمل كتلة ولا طاقة ولا معلومات. والممنوع وفق فرضية النظرية النسبية هو أن تصل كتلة ما إلى سرعة الضوء أو أن تنتقل طاقة ما بسرعة أكبر من سرعة الضوء. وأيضاً يجب التمييز بين سرعة الطور v_p (أي سرعة الموجة المنفردة) وسرعة المجموعة v_g group velocity التي تحوي الموجات المنفردة، والتي تسمى أيضاً سرعة الحزمة packet velocity. ويمكن الاعتقاد بأن الجسيم موجود داخل حزمة موجية، حيث تنتقل الحزمة بأكملها بسرعة الجسيم v ، و ($v_g < c$)، بينما تنتقل الموجات الفردية المكونة للمجموعة بسرعة الطور v_p . وبهذا فإن v_p ليس لها أهمية فيزيائية وإن السرعة ($v_p > c$) لموجات دي بروي لا تنتهك النظرية النسبية الخاصة.

ولدراسة هذه الحالة رياضياً نفترض وجود موجة ذات بعد واحد تنتشر في الاتجاه الموجب لمحور x بسرعة طور v_p ، وتذبذب في المحور y . وهذه الموجة المتنقلة ذات الطول الموجي λ والتردد f والسعة A يمكن وصفها بالعلاقة:

$$y = A \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t \right) \quad \dots \dots 5.11$$

وبما أن $(k = 2\pi/\lambda)$ حيث k : العدد الموجي wave number و $(\omega = 2\pi f)$ حيث ω : التردد الزاوي angular frequency، فيمكن التعبير عن هذه المعادلة بشكل آخر مختصر شائع كما يلي:

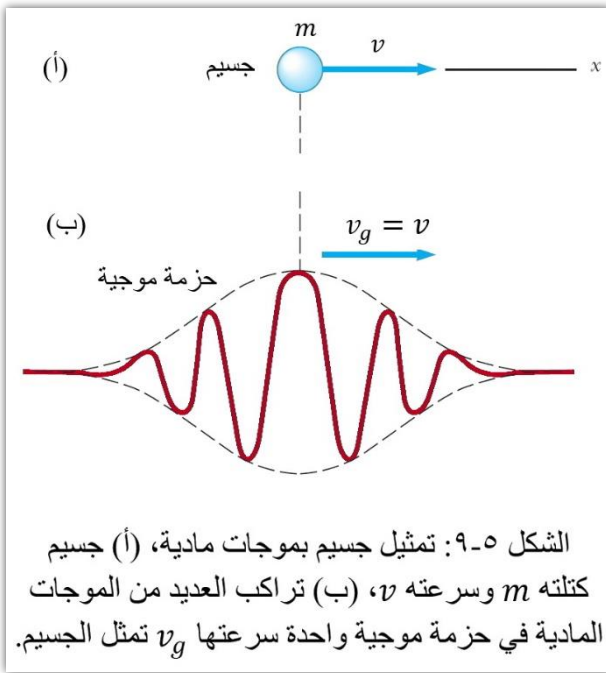
$$y = A \cos(kx - \omega t) \quad \dots \dots 5.12$$

وستكون سرعة الطور v_p :

$$v_p = \lambda f = \left(\frac{2\pi}{k}\right) \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k} \quad \dots \dots 5.13$$

ويمكن تفسير هذه المعادلة بأنها تمثل نسبة معامل تغير الزمن t إلى معامل تغير الفضاء x في المعادلة 5.12 التي تمثل الموجة.

تعكس سعة موجات دي بروي التي تتوافق مع جسم متحرك احتمالية العثور عليه في مكان معين في وقت معين، فمثلاً لو كانت السعة صفراً في مكان وزمان محددين فهذا يعني عدم وجود الجسم. ومن الواضح أن موجات دي بروي لا يمكن تمثيلها بصيغة تشبه المعادلة 5.12 التي تصف سلسلة غير محددة من الموجات جميعها بنفس السعة A كما في الشكل 5-6. وبدلاً من ذلك، نتوقع أن يتوافق التمثيل الموجي لجسم متحرك مع حزمة موجية مثل تلك الموضحة في الشكل 5-8 الذي تكون الموجات المرسومة فيه ذوات سعات يعتمد عليها احتمال اكتشاف الجسم.



وكما وصفنا الحزمة أو المجموعة الموجية wave group في الفقرة السابقة، فهي عبارة عن تراكب لموجات فردية (موجات دي بروي) ذات أطوال موجية مختلفة يؤدي تداخلها مع بعضها إلى اختلاف في السعة يحدد شكل المجموعة الناتجة التي تتحرك بسرعة v_g مماثلة لسرعة الجسم التقليدي، لاحظ الشكل 5-9، وقد ترتبت سعة وطور كل موجة داخلها بحيث تتداخل الموجات بشكل بناء ضمن منطقة صغيرة من الفضاء. أما خارج

هذه المنطقة فإن تركيب الموجات يولد محصلة سعة تقترب بسرعة من الصفر كنتيجة للتداخل الإلغافي. ومن الجدير بالذكر أنه لا يُشترط أن يتمثل الجسيم الواحد بموجة واحدة، بل يمكن تمثيله بعدة موجات محصورة في حيز من الفراغ حول الجسيم تجمعها حزمة موجية واحدة.

ولتبسيط التمثيل الرياضي نعود لتراكب موجتين، فنفترض وجود موجتين بسعتين متساويتين A ، ولكنهما تختلفان قليلاً بالتردد الزاوي ω كما في الشكل 5-7. ويمكن تمثيلهما رياضياً كما يلي:

$$y_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{and} \quad y_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

وباستعمال مبدأ التراكب يمكن جمع الموجتين مع بعض كما يلي:

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

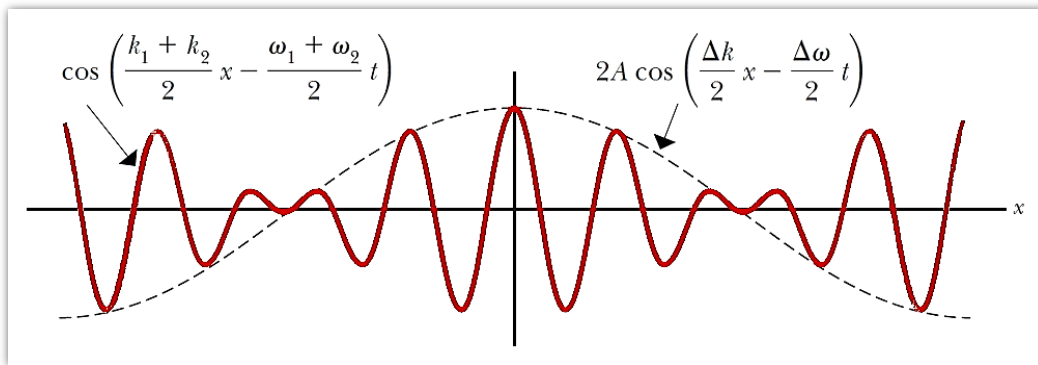
وبفرض $(a = k_1 x - \omega_1 t)$ و $(b = k_2 x - \omega_2 t)$ سيكون الناتج:

$$y = 2A \cos \left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t)}{2} \right] \cos \left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) + (k_2 x - \omega_2 t)}{2} \right]$$

$$y = \left[2A \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t \right) \right] \cos \left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \quad \dots \dots 5.14$$

حيث: $(\Delta k = k_1 - k_2)$ و $(\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2)$.

ويمثل عامل جيب التمام الثاني $\cos \left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$ في المعادلة 5.14 موجة ذات عدد موجي وتردد يساويان معدل العدد الموجي ومعدل التردد للموجات المنفردة، بينما يمثل العامل $2A \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t \right)$ غلاف الموجة الذي يمتلك الشكل الرياضي للموجة أيضاً كما هو موضح بالمنحنى المتقطع في الشكل ١٠-٥.



الشكل ١٠-٥: نمط التراكب في الشكل ٧-٥ مع غلاف الموجة المترابكة (المنحنى المتقطع).

ويمكن لغلاف المجموعة هذا أن ينتقل عبر الفضاء بسرعة المجموعة $(v_{group} \equiv v_g)$ التي تختلف عن سرعة الموجات الفردية الموجودة داخله، وتمثل v_g نسبة معامل تغير الزمن t إلى معامل تغير المكان x في العامل $2A \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t \right)$:

$$v_g = \frac{\Delta \omega / 2}{\Delta k / 2} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad \dots \dots 5.15$$

وتمثل هذه السرعة مجموع موجتين فقط. وعندما يتم تراكب عدد كبير من الموجات لتشكيل حزمة موجية ستأخذ هذه النسبة شكل مشتقة:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \dots \dots 5.16$$

وعند ضرب البسط والمقام بـ $\hbar$ (حيث $\hbar = h/2\pi$) سينتج:

$$v_g = \frac{\hbar d\omega}{\hbar dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} \quad \dots \dots 5.17$$

وإذا نظرنا إلى الرموز داخل القوسين في المعادلة 5.17 كلاً على حدة، فالبسط سيصبح:

$$\hbar\omega = \frac{h}{2\pi} (2\pi f) = hf = E$$

$$\hbar k = \frac{h}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) = \frac{h}{\lambda} = p \quad \text{والمقام :}$$

ولهذا يمكن كتابة المعادلة 5.17 بالشكل:

$$v_g = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} \quad \dots \dots 5.18$$

ونظراً لأننا نستكشف احتمالية أن غلاف الموجات المتجمعة يمثل الجسم فسنفترض جسيماً حراً يتحرك بسرعة v صغيرة مقارنة بسرعة الضوء ($v \ll c$). وطاقة الجسم حينئذ هي طاقته الحركية (لماذا؟):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

وباشتقاق هذه المعادلة بالنسبة لـ p وإدخالها في المعادلة 5.18 ينتج:

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{2p}{2m} = \frac{mv}{m} = v \quad \dots \dots 5.19$$

ولهذا فإن سرعة الحزمة الموجية هي مماثلة لسرعة الجسم الذي نريد تمثيله بموجات دي بروي، وهذا يمنحنا ثقة أكبر بأن الحزمة الموجية هي طريقة معقولة لتمثيل جسيم.

مثال 5-8: يبلغ طول موجة دي بروي للإلكترون 2 pm . جد (أ) طاقته الحركية، (ب) سرعتي الطور والمجموعة لموجة دي بروي.

الحل: (أ) الخطوة الأولى هي أن نحسب pc للإلكترون:

$$pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{2 \times 10^{-12} \text{ m}} = 9.939 \times 10^{-14} \text{ J} \approx 620 \text{ keV}$$

وبما أن الطاقة السكونية للإلكترون ($E_o = 511 \text{ keV}$) فإن ($pc > E_o$). ولهذا سنستعمل الحسابات النسبية:

$$E_k = E - E_o = \sqrt{E_o^2 + (pc)^2} - E_o = \sqrt{(511 \text{ keV})^2 + (620 \text{ keV})^2} - 511 \text{ keV} \\ = 803 \text{ keV} - 511 \text{ keV} = 292 \text{ keV}$$

(ب) يمكن إيجاد سرعة الإلكترون من العلاقة 1.42:

$$E = KE_o = \frac{E_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{E_o^2}{E^2}} = c \sqrt{1 - \frac{(511 \text{ keV})^2}{(803 \text{ keV})^2}} = 0.771c$$

لذا ستكون سرعتا الطور والمجموعة كما يلي:

$$v_p = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{0.771c} = 1.30c, \quad v_g = v = 0.771c$$

5-9: The Uncertainty Principle

٥-٩: مبدأ اللادقة

عندما يقاس موقع أو سرعة جسيم في لحظة ما، فإن عدم الدقة في القياسات التجريبية تؤخذ بعين الاعتبار. ووفقاً للميكانيك التقليدي فإنه لا يوجد عائق أساسي أمام الحصول على نتائج دقيقة في القياس باستخدام طرق تجريبية مضبوطة تماماً وصنع جهاز يقيس بدقة تامة، أي من الممكن - من حيث المبدأ - إجراء مثل هذه القياسات بدقة عالية جداً ربما تكون مصحوبة بنسبة خطأ صغيرة يمكن إهمالها. أما وفق النظرية الكمية فإنه من المستحيل إجراء القياس لكل من موقع الجسيم وزخمه سوية في نفس الوقت بدقة تامة حتى لو استعملنا أدق الأجهزة وأفضل الطرق التجريبية، وذلك بسبب تطبيق مفهوم الموجة المادية الذي يعني أن الموجة تنتشر في حيز من الفراغ. وكان هايزنبرگ Heisenberg قد قدم فكرة مبدأ اللادقة في القياس سنة 1927 (وقد يُسمى أيضاً مبدأ الريبة، أو مبدأ الشك، أو مبدأ عدم اليقين، أو مبدأ عدم التحديد، أو مبدأ عدم التأكد)، والذي يمكن صياغته كما يلي:

(من المستحيل فيزيائياً قياس كل من الموقع الدقيق والزخم الدقيق لجسيم ما في نفس الوقت)، أو:
(إذا تم قياس موقع جسيم وكان مقدار اللادقة في القياس Δx ، وتم إجراء قياس في نفس الوقت لمركبة x من الزخم بعدم دقة مقداره Δp_x ، فلا يمكن أن يكون حاصل ضرب مقداري اللادقة هذين أصغر من $\hbar/2$).

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \dots \dots 5.20$$

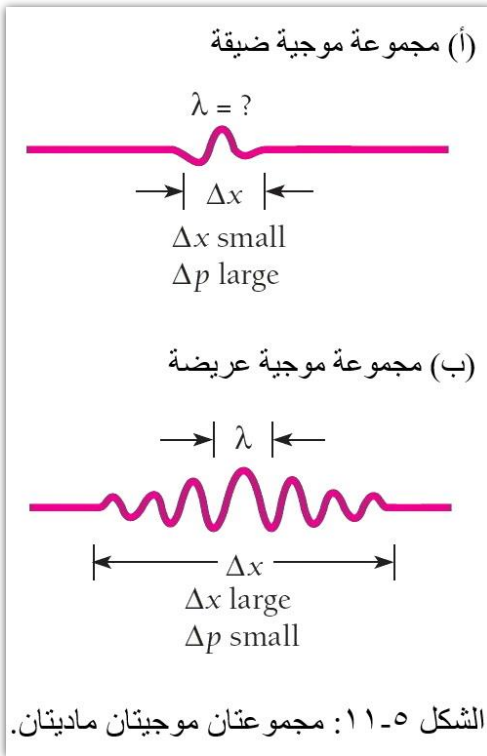
هنا $(\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J.s})$. وبالنسبة لمحور y ومحور z :

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \dots \dots 5.20', \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad \dots \dots 5.20''$$

واللا دقة هنا تعني أيضاً نسبة الخطأ في القياس، ولكنها نسبة خطأ ناتجة بسبب خصائص الجسيم الكمي بغض النظر عن دقة قياس الجهاز. لذا سيكون معنى مبدأ اللادقة هو أنه لا يمكن أن يكون حاصل ضرب نسبة الخطأ في قياس الزخم الخطي للجسيم بنسبة الخطأ في قياس موقع الجسيم في نفس اللحظة أقل من $\hbar/2$ الذي يساوي مقداراً صغيراً جداً هو $(5.27 \times 10^{-35} \text{ J.s})$ ، أي إنها لا يمكن أن تصل إلى الصفر.

وهذا يعني وجود نسبة من الخطأ أو اللادقة في القياس في هكذا حالات دوماً. وقد كان هايزنبرك حريصاً على الإشارة إلى أن عدم الدقة التي لا بد منها (Δp_x و Δx) لا تنشأ عن عيوب في أدوات القياس العملية، بل تنشأ من التركيب الكمي quantum structure للمادة.

إن اعتبار جسيم ما متحرك كمجموعة موجية يعني ضمناً أن هناك حدوداً أساسية للدقة التي يمكننا بها قياس خصائصه كالموقع والزخم. ولتوضيح الأمر نلاحظ المجموعة الموجية في الشكل ٥-٨ (ص ١٣)، إذ يُحتمل أن يكون الجسيم الذي تمثله هذه المجموعة الموجية متموضعاً في أي مكان داخلها في وقت معين، وستتخذ كثافة الاحتمالية $|\Psi|^2$ أعلى قيمة لها في منتصف المجموعة. ولهذا فمن المرجح تواجد الجسيم هناك. ولكن يُحتمل أيضاً إيجاد الجسيم في أي مكان آخر داخل الحزمة لا تكون فيه $|\Psi|^2$ مساوية للصفر. كلما كانت المجموعة الموجية أضيق، أمكن تحديد موقع الجسيم بدقة أكبر (الشكل ٥-١١ أ). ولكن الطول الموجي للموجات في حزمة ضيقة لا يُحدد بصورة جيدة، فلا توجد موجات كافية لقياس λ بدقة. وهذا يعني أنه بسبب اعتماد الزخم على الطول الموجي ($p = h/\lambda$) فإن زخم الجسيم p ليس كمية دقيقة هنا. وإذا أجرينا قياسات عديدة للزخم فسنجد نطاقاً واسع الاختلاف من القيم.



من ناحية أخرى، فإن مجموعة موجية واسعة، مثل تلك الواردة في الشكل ٥-١١ ب، لها طول موجي محدد بوضوح. ولهذا فإن الزخم الذي يتوافق مع هذا الطول الموجي هو كمية دقيقة، وستعطي سلسلة من القياسات نطاقاً ضيقاً من القيم. ولكن أين يتواجد الجسيم؟ عرض المجموعة الآن أكبر بكثير من أن نتمكن من تحديد مكان الجسيم بالضبط في وقت معين. أي إنه كلما زادت دقة تحديد الزخم قلّت دقة تحديد الموقع، والعكس صحيح.

إن ثابت بلانك h صغير جداً لدرجة أن القيود التي يفرضها مبدأ اللادقة تكون مهمة فقط في عالم الذرة. وضمن هذا النطاق يساعد هذا المبدأ بشكل كبير في فهم العديد من

الظواهر. وتجدر الإشارة إلى أنه نادراً ما يتم الوصول إلى الحد الأدنى $\hbar/2$ لحاصل الضرب $\Delta x \Delta p_x$.

اللا دقة في الطاقة والزمن: يمكن التعبير عن مبدأ اللادقة بدلالة مجموعة أخرى من المتغيرات المترافقة. فقد نرغب في قياس الطاقة E المنبعثة خلال فترة زمنية Δt في عملية ذرية. وإذا كانت الطاقة

بشكل موجات كهرومغناطيسية فإن الوقت المحدود المتاح يحدُّ من الدقة التي يمكننا بها حساب تردد الموجات f . وإذا افترضنا أن الحد الأدنى من اللا دقة في عدد الموجات التي نحسبها في مجموعة موجية هو موجة واحدة فإن اللا دقة Δf في قياسنا للتردد هي:

$$\Delta f \geq \frac{1}{\Delta t} \quad \dots \dots 5.21$$

وهذا بسبب أن تردد الموجات تحت الدراسة يساوي عددها مقسوماً على الفترة الزمنية. وبضرب الطرفين بثابت بلانك h تنتج في الطرف الأيسر اللا دقة في الطاقة ΔE :

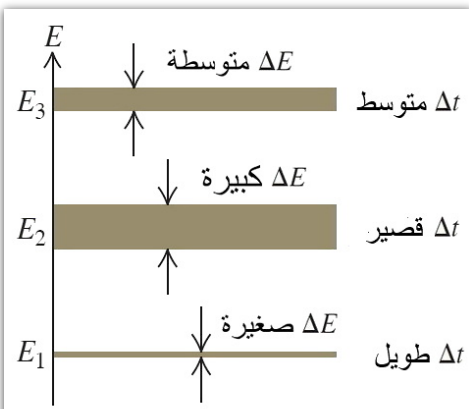
$$h \Delta f \geq \frac{h}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta E \geq \frac{h}{\Delta t} \quad \text{or} \quad \Delta E \Delta t \geq h$$

وباعتماد حساب أكثر دقة يعتمد على طبيعة المجموعات الموجية wave groups تتغير هذه النتيجة إلى

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \dots \dots 5.22$$

وتعني هذه المعادلة أن الدقة في تحديد زمن حدوث الحدث t تكون على حساب الدقة في تحديد طاقة الجسيم E ، والعكس صحيح. وهذا له تطبيق مباشر على مستويات الطاقة في الذرة. فرغم افتراض أن كل مستوى من مستويات الطاقة له طاقة محددة تماماً حسب نموذج بور للذرة فإن المعادلة 5.22

تقول إن هذا ليس صحيحاً لجميع مستويات الطاقة. إذ أن النظام الذي يظل في حالة غير مستقرة لفترة طويلة جداً (Δt كبيرة) يمكن أن يمتلك طاقة محددة بصورة جيدة (ΔE صغيرة)، ولكن إذا ظل النظام في حالة ما لفترة قصيرة فقط (Δt صغيرة) فإن اللا دقة في الطاقة يجب أن تكون بالمقابل أكبر (ΔE كبيرة). ويوضح الشكل ٥-١٢ هذه الفكرة.



الشكل ٥-١٢: كلما طال زمن الحالة Δt قلَّ امتدادها في الطاقة (كما موضح في عرض مستويات الطاقة)

وتشير المعادلة 5.22 أيضاً إلى أن مبدأ حفظ الطاقة يمكن أن يبدو منتهكاً بمقدار ΔE لفترة زمنية قصيرة فقط Δt تتفق مع المعادلة 5.22 «كيف؟ وهل هناك مثال على هذا؟».

اللا دقة في الزخم الزاوي والموقع الزاوي: هنالك شكل آخر لمبدأ اللا دقة يربط بين الزخم الزاوي L_θ

$$\Delta \theta \Delta L_\theta \geq \frac{\hbar}{2} \quad \dots \dots 5.23$$

وللجسيم وموقعه الزاوي θ هو: وتعني هذه المعادلة أن الدقة في قياس الزخم الزاوي للجسيم تكون على حساب الدقة في تحديد موقعه الزاوي، والعكس صحيح.

سؤال ١: حُدِّد موقع جسيم عند ($x = 0$) بالضبط، مع لا دقة مقدارها صفر باتجاه محور x . كيف يؤثر هذا الموقع على اللا دقة في مركبة السرعة للجسيم باتجاه محور y ؟
(أ) لا يؤثر عليها. (ب) يجعلها لا نهائية. (ج) يجعلها صفراً.

مثال ٥-٩: قيست سرعة إلكترون فكانت ($5 \times 10^3 \text{ m/s} \pm 0.003 \%$). ما هي الحدود التي يمكن تحديد موقع هذا الإلكترون ضمنها على طول اتجاه متجه سرعته؟
الحل: زخم الإلكترون هو:

$$p = m_e v = (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(5 \times 10^3 \text{ m/s}) = 4.55 \times 10^{-27} \text{ kg.m/s}$$

وبسبب أن اللا دقة في هذه القيمة هي 0.003% فإنه:

$$\Delta p = 0.00003 p = (0.00003)(4.55 \times 10^{-27}) = 1.365 \times 10^{-31} \text{ kg.m/s}$$

ويمكن أن يُحسب الحد الأدنى للا دقة في الموقع باستخدام قيمة Δp هذه والمعادلة 5.20:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(1.365 \times 10^{-31} \text{ kg.m/s})} = 3.86 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.386 \text{ mm}$$

سؤال ٢: لو زادت سرعة الإلكترون في المثال ٥-٩ إلى ألف ضعف بنفس نسبة الخطأ 0.003% فما الذي سيزداد أكثر؟ دقة حساب زخمه الخطي أم حساب موقعه؟

مثال ٥-١٠: احسب الحد الأدنى من الطاقة الحركية للإلكترون متموضع داخل حيز طوله ($6 \times 10^{-15} \text{ m}$)، أي بقدر نصف قطر نواة ذرة نموذجية.

الحل: لنفترض أن الحد الأدنى من زخم الإلكترون يساوي ذلك الذي يحدده مبدأ اللا دقة للإلكترون مقيد ضمن المسافة Δx المساوية لنصف القطر النووي ($\Delta x = \pm r$). ويمكننا بعد ذلك تحديد الحد الأدنى لطاقة الإلكترون من الحد الأدنى للزخم.

$$\Delta x \approx r = 6 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(6 \times 10^{-15} \text{ m})} = 8.78 \times 10^{-21} \text{ kg.m/s}$$

يمكن افتراض أن القيمة الدنيا للزخم ستكون على الأقل بقدر اللا دقة له، أي ($p_{\min} \geq \Delta p$). ولهذا:

$$p \approx \Delta p \geq 8.78 \times 10^{-21} \text{ kg.m/s}$$

بما أننا لا نعرف مقدار طاقة الإلكترون لحد الآن، فسنحسبها بالطريقة الأكثر شمولاً، أي الطريقة النسبية.

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 = \left[\frac{(8.78 \times 10^{-21} \text{ kg.m/s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} \right]^2 + (0.51 \text{ MeV})^2$$

$$= (16.4 \text{ MeV})^2 + (0.51 \text{ MeV})^2 = 269.22 (\text{MeV})^2$$

$$E = 16.4 \text{ MeV}$$

$$E_k = E - E_0 = 16.4 \text{ MeV} - 0.51 \text{ MeV} = 15.9 \text{ MeV}$$

يلاحظ أنه بسبب كون ($E \gg E_0$) فإن الحسابات النسبية كانت في محلها. «لماذا؟»

مثال ٥-١١: وجدنا في المثال الأخير أنه إذا كان الإلكترون محصوراً في حجم نصف قطر نووي، فإن مبدأ اللادقة يشير إلى أن الحد الأدنى للطاقة الحركية للإلكترون يجب أن يبلغ حوالي 16 MeV . ماذا يدل هذا حول إمكانية تواجد إلكترونات داخل النواة؟

الحل: قيمة 16 MeV للطاقة الحركية للإلكترون أكبر من تلك الملاحظة للإلكترونات المنبعثة من النوى في تحلل بيتا. وهذا يعني أن الإلكترونات ليست محصورة داخل النواة ويجب أن تتكون الإلكترونات المنبعثة من النواة (أثناء تحلل بيتا) بالفعل عند انبعاثها وليست موجودة في النواة قبل التحلل.

مثال ٥-١٢: إن مستويات الطاقة في الذرة لا تكون متباعدة عن بعض بشكل متساوٍ. وعندما تصنع الذرة انتقالاً بين حالات طاقة منفصلة عن بعض بمقدار ΔE فإن الطاقة تُبعث بشكل فوتون تردده ($f = \Delta E/h$). ورغم أن الذرة المثيجة يمكن أن تشع في أي وقت من ($t = 0$) إلى ($t = \infty$) فإن معدل الفترة الزمنية لحالة التهيج الذي تشع الذرة خلاله يسمى العمر أو فترة البقاء τ lifetime. وعادةً ما تظل الذرة في حالة التهيج لفترة قصيرة جداً ($\sim 10^{-8} \text{ s}$) قبل أن تبعث فوتوناً وتعود إلى حالة طاقة أدنى. ويمكن اعتبار زمن التهيج τ على أنه عدم دقة في الوقت Δt الذي يحدث فيه الانتقال. ويتوافق عدم الدقة هذا مع حد أدنى لعدم الدقة في تردد الفوتون المنبعث من خلال مبدأ اللادقة. وهذا بدوره يشير إلى "عرض الطاقة energy width" كما في الشكل ٥-١٢، أي اللادقة في الطاقة ΔE . احسب (أ) "عرض الطاقة" المميز لهكذا حالة، (ب) نسبة عدم الدقة للتردد ($\Delta f/f$) إذا كان الطول الموجي للفوتون المنبعث 300 nm .

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV.s}}{2(10^{-8} \text{ s})} = 3.3 \times 10^{-8} \text{ eV} \quad \text{الحل : (أ)}$$

هذه طاقة صغيرة، لكن العديد من حالات الطاقة المثيجة لها مثل هذا العرض للطاقة. أما للحالات الأرضية المستقرة فإن ($\tau = \infty$) و ($\Delta E = 0$). وبالنسبة للحالات المثيجة في النواة يمكن أن تكون τ قصيرة بمقدار 10^{-20} s (أو أقصر) مع عرض طاقة 100 keV (أو أكثر).

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{300 \times 10^{-9} \text{ m}} = 10^{15} \text{ Hz} \quad \text{(ب)}$$

$$E = hf \rightarrow \Delta E = h \Delta f$$

$$\Delta f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{3.3 \times 10^{-8} \text{ eV}}{4.136 \times 10^{-15} \text{ eV.s}} \approx 8 \times 10^6 \text{ Hz}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{8 \times 10^6 \text{ Hz}}{10^{15} \text{ Hz}} = 8 \times 10^{-9}$$

يمكن قياس نسبة عرض الخط الضيق هذا بمقياس تداخل حساس. فالأجهزة الحديثة قادرة على قياس نسب تقترب من 10^{-17} أو 1 Hz فقط من تردد 10^{17} Hz . ومع هذا، فإن تأثيرات درجة الحرارة والضغط تلقي بظلالها عادةً على عرض الخط الطبيعي وتوسع الخط من خلال الآليات المرتبطة بتأثير دوبلر والتصادمات.

5-10: The Electron Microscope ١٠-٥: المجهر الإلكتروني

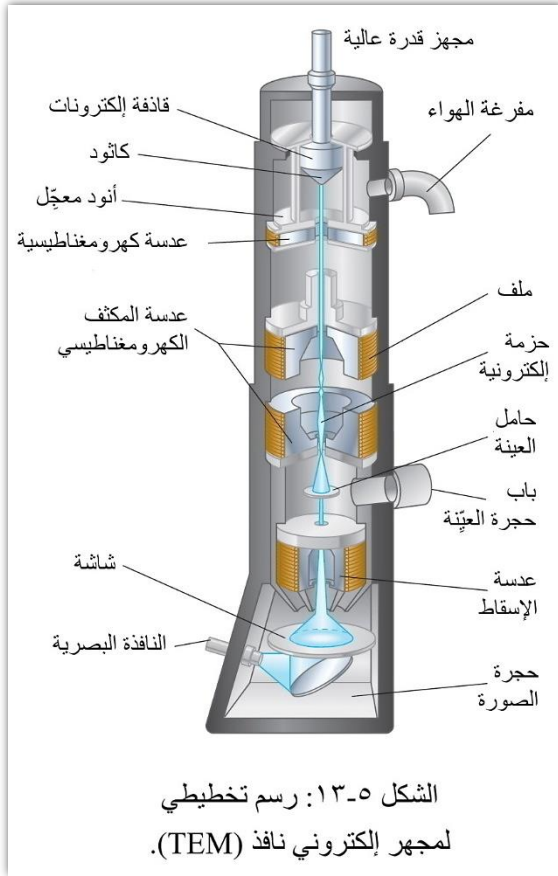
يقدم المجهر الإلكتروني مثلاً مهماً للتفاعل بين الخصائص الموجية والجسيمية للإلكترونات. وقد بني أول نموذج له في عام 1932. ويمكن فيه استخدام حزمة إلكترونية لتكوين صورة لجسم ما بنفس طريقة الحزمة الضوئية الموجودة في المجهر البصري. فكما ينحني شعاع الضوء بواسطة الانعكاس أو الانكسار يمكن أن ينحني مسار الإلكترون بواسطة مجال كهربائي أو مغناطيسي، وكما يمكن تجميع أشعة الضوء المشتتة من نقطة على جسم بواسطة عدسة لامة أو مرآة مقعرة يمكن تجميع الإلكترونات المشتتة من منطقة صغيرة عن طريق المجالات الكهربائية أو المغناطيسية أو كليهما.

تناسب قدرة التحليل لأي أداة بصرية - والتي تكون محدودة بسبب الحيود - مع الطول الموجي للإشعاع الذي يستخدم لإضاءة العين المراد رصدها. وفي حالة وجود مجهر جيد يستخدم الضوء المرئي سيكون الحد الأقصى للتكبير المفيد حوالي $(500 \times)$ ، وتعطي التكبيرات الأعلى صوراً أكبر، ولكنها لا تكشف عن تفاصيل أكثر.

إن الإلكترونات السريعة لها أطوال موجية أقصر بكثير من تلك الموجودة في الضوء المرئي، ويمكن التحكم فيها بسهولة بواسطة المجالات الكهربائية والمغناطيسية بسبب شحنتها. ومقدار الطول الموجي للإلكترونات في المجهر الإلكتروني هو نفسه الموجود في منطقة الأشعة السينية من الطيف الكهرومغناطيسي، لكن ليس من الممكن (حتى الآن) تركيز الأشعة السينية بشكل كافٍ.

تنتج الملفات الحاملة للتيار في المجهر الإلكتروني مجالات مغناطيسية تعمل كعدسات لتركيز شعاع إلكتروني على العينة، وبالتالي تُنتج صورة مكبرة على شاشة فلورية أو لوحة فوتوغرافية (الشكل ٥-١٣). ويجب أن يكون الجهاز مفرغاً من الهواء كي لا تستطار الإلكترونات بواسطة جزيئات الهواء ويحصل تشويش للصورة.

يتفوق المجهر الإلكتروني على المجهر البصري لأن دقة التحليل resolution للمجهر البصري محدودة بسبب تأثيرات الحيود. ونظراً لأن المجهر البصري يستخدم أطوالاً موجية تبلغ حوالي 500 nm فإنه لا يمكنه تحليل الأشياء



أسئلة

- ١- إذا كان للمادة طبيعة موجية فلماذا لا يمكن ملاحظة هذه الخاصية الشبيهة بالموجة في تجاربنا اليومية؟
- ٢- هل إن الإلكترون موجة أم جسيم؟ ادمع إجابتك عن طريق الاستشهاد ببعض النتائج التجريبية.
- ٣- إذا كان للجسيم مظهران مادي وموجي، فهل يمكن أن يظهر في وقت واحد؟
- ٤- ما هو المعيار في بروز إحدى الصفتين المادية أو الموجية دون الأخرى للجسيم؟
- ٥- إذا تعجل إلكترون بفرق جهد مقداره $100 V$ سيكون طول الموجة المرافقة له $1.22 \text{ \AA}$ وفق افتراضات دي بروي، وهذا مقارب لمقادير المسافات بين المستويات الذرية في البلورات. ماذا يعني هذا إذا أردت التحقق عملياً من صحة هذه الحسابات؟
- ٦- ظهرت أعظم شدة للإلكترونات المستطارة في تجربة دافسن وجيرمر عند فرق جهد $54 V$ وزاوية 50° . ما تفسيرك لهذا؟
- ٧- ما الفرق بين موجة دي بروي للجسيم وحزمة الموجة؟
- ٨- تنتقل موجات دي بروي دائماً بسرعة أكبر من سرعة الضوء. ما تفسيرك؟
- ٩- لماذا لا يمكن تمثيل موجات دي بروي بالمعادلة $[\Psi = A \cos(kx - \omega t)]$ ؟
- ١٠- ما الذي يمثله كل من المقدار المحصور في القوس المربع والجيب تمام الآخر في الطرف الأيمن من المعادلة التالية التي تمثل موجات دي بروي:

$$y = \left[2A \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t \right) \right] \cos \left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$$

- ١١- هل تنتقل حزمة موجات دي بروي بنفس سرعة الموجات المنفردة داخلها؟ ولماذا؟
- ١٢- عند تراكم عدد كبير من الموجات لتشكيل حزمة موجية فإن سرعة الحزمة الموجية تساوي سرعة الجسيم المراد تمثيله بموجات دي بروي. أثبت هذا.
- ١٣- أي من الظواهر التالية يوضح الطبيعة الموجية للإلكترونات؟
(أ) التأثير الكهروضوئي (ب) إشعاع الجسم الأسود (ج) تأثير كومبتون (د) حيود الإلكترونات بواسطة البلورات (هـ) لا شيء من تلك الإجابات.
ثم بيّن أي ظاهرة منها تدل على الطبيعة الموجية للإشعاع.
- ١٤- للبروتون كتلة أصغر قليلاً من كتلة النيوترون. هل سيكون لبروتون له نفس الطول الموجي للنيوترون (أ) طاقة حركية أكبر، (ب) طاقة حركية أقل، (ج) نفس الطاقة الحركية؟
- ١٥- يتحرك إلكترون وبروتون بسرعتين غير نسبيتين ويمتلكان نفس طول موجة دي بروي. أي الكميات التالية هي نفسها أيضاً للجسيمين؟ (أ) السرعة، (ب) الطاقة الحركية، (ج) الزخم، (د) التردد.
- ١٦- يبين المثال ٥-٤ أنه لأجل أن تمتلك الإلكترونات طولاً موجياً مقداره $(1.67 \times 10^{-10} m)$ يجب تعجيلها من السكون خلال جهد مقداره $54 V$ ومن ثم تكتسب طاقة حركية مقدارها $54 eV$. هل إن فوتوناً له نفس الطاقة يمتلك أيضاً طولاً موجياً مقداره $(1.67 \times 10^{-10} m)$ ؟

مسائل محلولة

- (١) رتّب الأطوال الموجية للجسيمات التالية من الأكبر إلى الأصغر مع بيان السبب لكل حالة،
 (أ) فوتون طاقته 3 eV ، (ب) إلكترون طاقته الحركية 3 eV ، (ج) بروتون طاقته الحركية 3 eV ، (د) فوتون طاقته 0.3 eV ، (هـ) إلكترون زخمه $3 \text{ eV}/c$.

الحل: يوصف الطول الموجي لكل الحالات بالعلاقة $(\lambda = h/p)$ ، فلحالة (أ) يُعطى زخم الفوتون بالعلاقة $(p = E/c)$ ، ولهذا: $(p = E/c = 3 \text{ eV}/c)$ ، وبالتالي سيكون λ للحالة "أ" مساوياً لـ λ للحالة "هـ" لأن الزخمين متساويان و h ثابت.
 * ولأن الطول الموجي يتناسب عكسياً مع الزخم والطاقة فسيكون الطول الموجي للحالة "د" أكبر من الطول الموجي للحالة "أ" بعشر مرات.
 * وللجسيم الذي له كتلة سيكون:

$$pc = \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \sqrt{(E_k + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4} = \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2} \quad \dots \dots 1$$

وهذا يعني أنه كلما زادت الكتلة زاد الزخم إذا كانت الطاقة الحركية هي نفسها للجسيمين، وبالتالي ستكون الكتلة الأكبر ذات طول موجي أصغر، ولهذا سيكون λ للحالة "ب" أكبر من λ للحالة "ج".
 * أما بالنسبة للمقارنة بين الحالتين "ب" و "هـ" فإن الإلكترون الذي طاقته الحركية 3 eV سيكون زخمه أكبر من $3 \text{ eV}/c$ وفق العلاقة 1، ولهذا سيكون له طول موجي أقصر من طول موجة الإلكترون في الحالة "هـ".
 * لذلك سيكون الترتيب المطلوب كما يلي: $ج > ب > هـ = أ > د$

- (٢) ما هو طول موجة دي بروي لإلكترون يتعجل من السكون بفرق جهد 50 V ؟
 (a) 0.1 nm (b) 0.139 nm (c) 0.174 nm (d) 0.834 nm (e) none of those answers.
الحل: (c) . حيث يمكن الحصول على زخم الإلكترون مما يلي:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m} = eV \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{2meV}$$

وسيكون طول موجة دي بروي حينئذ:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(50 \text{ V})}} = 1.74 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$= 1.74 \text{ \AA} = 0.174 \text{ nm}$$

- (٣) يتحرك كل من بروتون وإلكترون ونواة الهيليوم (جسيم ألفا) بسرعة v . رتّب أطوال موجة دي بروي لهذه الجسيمات من الأكبر إلى الأصغر.

الحل: الترتيب هو الإلكترون ثم البروتون ثم نواة الهيليوم. حيث تكون كتلتها (بدلالة بعضها نسبة للبعض الآخر) كالتالي: $(m_p \approx 1840m_e)$ و $(m_{He} \approx 4m_p)$ ، لأن السرعة المعطاة سواء كانت نسبية أو غير نسبية فإن الطول الموجي يتناسب عكسياً مع الكتلة: $(\lambda = h/p = h/mv)$.

- (٤) يتحرك إلكترون وبروتون باتجاهين متعاكسين، وكانا قد تعجلا من السكون بنفس فرق الجهد. فأَيُّ منهما له طول موجي أكبر؟ (أ) الإلكترون، (ب) البروتون، (ج) نفسه لكليهما، (د) ليس لهما طول موجي.

الحل: إذا كانت السرعة غير نسبية فالطاقة الحركية ستكون: $(E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = p^2/2m = eV)$ ، وهي نفسها للجسيمين لأن شحنتيهما متساويتان مقداراً وقد تعرّضا لنفس فرق الجهد. والزخم سيساوي

($p = \sqrt{2meV}$). ولهذا يبقى اعتماد الزخم على فرق الكتلة بينهما. وبما أن كتلة الإلكترون أصغر فسيكون زخمه أصغر وطوله الموجي أكبر وفق العلاقة ($\lambda = h/p = h/\sqrt{2meV}$).

(٥) (أ) بأي فرق جهد يلزم تعجيل الإلكترونات ليكون لها نفس الطول الموجي للأشعة السينية ذات الطول الموجي 0.22 nm ؟ و (ب) ليكون لها نفس طاقة الأشعة السينية في الفرع "أ"؟ (ج) احسب طول موجة الإلكترون في الفرع "ب" باستخدام الحسابات غير النسبية؟

الحل: (أ)

$$\lambda = \frac{h}{m_o v} \rightarrow v = \frac{h}{m_o \lambda}$$

$$E_k = e\Delta V = \frac{1}{2} m_o v^2 \rightarrow \Delta V = \frac{m_o v^2}{2e} = \frac{m_o (h/m_o \lambda)^2}{2e} = \frac{h^2}{2em_o \lambda^2}$$

$$\Delta V = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{2(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(0.22 \times 10^{-9} \text{ m})^2} = 31.15 \text{ V}$$

$$E_{\text{photon}} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{0.22 \times 10^{-9} \text{ m}} = 9.035 \times 10^{-16} \text{ J} \quad (\text{ب})$$

$$E_k = e\Delta V = E_{\text{photon}} \rightarrow \Delta V = \frac{E_{\text{photon}}}{e} = \frac{9.035 \times 10^{-16} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 5647 \text{ V}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_o E_k}} \quad (\text{ج})$$

$$= \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(9.035 \times 10^{-16} \text{ J})}} = 1.63 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.0163 \text{ nm}$$

إن هذا الطول الموجي للإلكترون أصغر بكثير من الطول الموجي 0.22 nm للفوتون الذي له نفس الطاقة.

(٦) إذا كانت المسافة بين المستويات الذرية في البلورة في تجربة دافسن وجيرمر $0.91 \text{ \AA}$ ، والزاوية بين حزمة الإلكترونات الساقطة على البلورة والعمود على مستويات البلورة 25° ، وقد حدث الانعكاس في المرتبة الأولى، فاحسب الطول الموجي للإلكترونات المستطارة.

الحل:

$$d = 0.91 \text{ \AA}, \quad \alpha = 25^\circ, \quad m = 1$$

$$d = D \sin \alpha \rightarrow D = \frac{d}{\sin \alpha} = \frac{0.91 \text{ \AA}}{\sin 25} = 2.153 \text{ \AA}$$

$$m\lambda = D \sin \phi \rightarrow \lambda = 2.153 \text{ \AA} \sin(2 \times 25) = 1.65 \text{ \AA}$$

(٧) يتم استخدام قرص مضغوط CD-ROM بدلاً من بلورة في تجربة حيود الإلكترون. ويحتوي سطح القرص المضغوط على مسارات من أخاديد صغيرة بتباعد منتظم بينها يبلغ $1.6 \mu\text{m}$. فإذا كانت سرعة الإلكترونات ($1.26 \times 10^4 \text{ m/s}$) ففي أي قيمة للزاوية ϕ ستظهر المرتبتان ($m = 1$) و ($m = 2$) لأعظم شدة؟

الحل: شرط أعلى شدة هو ($m\lambda = D \sin \phi$)، والطول الموجي λ هو ($\lambda = h/p = h/m_o v$). ولهذا:

$$\sin \phi = \frac{m\lambda}{D} = \frac{mh}{Dm_o v} \rightarrow \phi = \sin^{-1} \left(\frac{mh}{Dm_o v} \right)$$

وهنا m : مرتبة الطيف لأقصى شدة و m_o : كتلة الإلكترون.

$$\phi_1 = \sin^{-1} \left(\frac{h}{Dm_o v} \right) \quad : \text{عندما } (m = 1)$$

$$= \sin^{-1} \left(\frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{(1.6 \times 10^{-6} \text{ m})(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.26 \times 10^4 \text{ m/s})} \right) = 2.07^\circ$$

عندما $(m = 2)$:

$$\phi_1 = \sin^{-1} \left(\frac{2(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})}{(1.6 \times 10^{-6} \text{ m})(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.26 \times 10^4 \text{ m/s})} \right) = 4.14^\circ$$

(٨) (أ) احسب زخم فوتون في الطيف المرئي طوله الموجي $(4 \times 10^{-7} \text{ m})$. (ب) جد سرعة إلكترون له نفس زخم الفوتون في الفرع أ.

الحل : (أ)

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{4 \times 10^{-7} \text{ m}} = 1.65 \times 10^{-27} \text{ kg.m/s}$$

(ب) من العلاقة: $(p = m_e v)$

$$v = \frac{p}{m_e} = \frac{1.65 \times 10^{-27} \text{ kg.m/s}}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 1.82 \times 10^3 \text{ m/s} = 1.82 \text{ km/s}$$

(٩) قطر نواة ذرة هو بمرتبة 10^{-14} m . ولكي يكون الإلكترون محصوراً داخل النواة يجب أن يكون طول موجة دي بروي له بهذه المرتبة أو أصغر. (أ) ما هي الطاقة الحركية للإلكترون المحصور بهذا منطقة؟ (ب) قيّر قيمة مرتبة الطاقة الكامنة الكهربائية لنظام يحوي إلكترونات داخل نواة ذرة تحتوي على عشرة بروتونات. (ج) هل تتوقع أن تجد إلكترونات في النواة، ولماذا؟

الحل: (أ) بما أن $(\lambda \sim 10^{-14} \text{ m})$ أو أصغر، فإنه:

$$p = \frac{h}{\lambda} \sim \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{10^{-14} \text{ m}} = 6.626 \times 10^{-20} \text{ kg.m/s} \approx 10^{-19} \text{ kg.m/s} \text{ or more.}$$

وستكون طاقة الإلكترون:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \sim \sqrt{(10^{-19})^2 (3 \times 10^8)^2 + (9.1 \times 10^{-31})^2 (3 \times 10^8)^4}$$

$$E \sim 10^{-11} \text{ J} \sim 10^8 \text{ eV} (\sim 100 \text{ MeV}) \text{ or more}$$

$$E_k = E - m_e c^2 \sim 10^8 \text{ eV} - (0.511 \times 10^6 \text{ eV}) \sim 10^8 \text{ eV} \text{ or more} \quad \text{وكذلك :}$$

(ب) إذا كانت النواة تحتوي على عشرة بروتونات فإن الطاقة الكامنة الكهربائية لنظام نواة - إلكترون ستكون:

$$U_e = \frac{kq_1 q_2}{r} \sim \frac{(9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2)[10(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})](-e)}{0.5 \times 10^{-14} \text{ m}} \sim (-10^6 \text{ eV})$$

$$E_k + U_e \sim 10^8 \text{ eV} \gg 0 \quad \text{(ج)}$$

هذا يعني أن الطاقة الكلية للإلكترون تساوي تقريباً طاقته الحركية، أي إنه يتحرك بحرية. ولهذا لا يمكن أن يكون مقيداً داخل النواة. ويضاف لهذا أيضاً ما ذكرناه في حل المثال ٥-١١.

سؤال ٣: حسبنا طاقة الإلكترون الكلية في المسألة السابقة فكانت بمرتبة 100 MeV . ما هي مرتبة سرعته؟ وهل يُعقل أن يكون له هكذا سرعة داخل النواة؟

(١٠) افترض جسماً كميّاً كتلته m يتحرك بحرية بسرعة u ، وطاقته الكلية تساوي طاقته الحركية $(E = E_k = \frac{1}{2}mu^2)$. احسب سرعة طور الموجة الكمية التي تمثل الجسيم وعلّق على النتيجة.

الحل: الجسيم يتحرك بحرية، ولهذا لا نفترض له طاقة كامنة. وستكون طاقته:

$$E = E_k = \frac{1}{2}mu^2 = hf \rightarrow f = \frac{mu^2}{2h}$$

$$p = mu = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{mu}$$

$$v_{phase} = f\lambda = \left(\frac{mu^2}{2h}\right)\left(\frac{h}{mu}\right) = \frac{u}{2}$$

وسرعة الطور ستكون :

إن سرعة الطور هذه تعادل نصف السرعة المقاسة تجريبياً u التي ينقل بها الجسيم الكمي الكتلة والطاقة والزخم. وستتحرك قمم الموجة المنفردة في الشكل ١٠-٥ (ص ١٦) للأمام بشكل أبداً من تحرك غلافها للأمام، لذلك يبدو أن القمم المنفردة تتحرك للخلف بالنسبة للحزمة التي تحتويها.

(١١) جسيم كمي نسبي حُر يتحرك بسرعة u ، وطاقته الكلية $(E = hf = \hbar\omega = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4})$ وزخمه $(p = h/\lambda = \hbar k = Km_0u)$. وبالنسبة للموجة الكمية التي تمثل الجسيم تكون سرعة الحزمة $(v_g = d\omega/dk)$. (أ) احسب سرعة الطور، (ب) برهن أن سرعة الحزمة الموجية هي بنفس سرعة الجسيم.

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{E/\hbar}{p/\hbar} = \frac{E}{Km_0u} \quad \text{where } p = Km_0u \quad \text{(أ) الحل}$$

$$= \frac{\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}{Km_0u} = \frac{\sqrt{K^2m_0^2u^2c^2 + m_0^2c^4}}{\sqrt{K^2m_0^2u^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{K^2m_0^2u^2c^2}{K^2m_0^2u^2} + \frac{m_0^2c^4}{K^2m_0^2u^2}} = \sqrt{c^2 + \frac{c^4}{K^2u^2}} = c\sqrt{1 + \frac{c^2}{K^2u^2}}$$

$$= c\sqrt{1 + \frac{c^2}{u^2/(1 - u^2/c^2)}} \quad \text{where } K^2 = \frac{1}{1 - (u^2/c^2)}$$

$$= c\sqrt{1 + \frac{c^2}{u^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = c\sqrt{1 + \frac{c^2}{u^2} - 1} = c\sqrt{\frac{c^2}{u^2}} = \frac{c^2}{u}$$

وهنا تكون سرعة الطور أكبر من سرعة الضوء، ولا تحمل النقطة ذات الطور الثابت في الدالة الموجية كتلة ولا طاقة ولا معلومات.

(ب)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \frac{1}{2}(p^2c^2 + m_0^2c^4)^{-1/2}(2pc^2 + 0)$$

$$\begin{aligned}
&= pc^2 \sqrt{\frac{1}{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} = \sqrt{\frac{p^2 c^4}{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} = \sqrt{\frac{p^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}} = c \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}} \\
&= c \sqrt{\frac{K^2 m_0^2 u^2}{K^2 m_0^2 u^2 + m_0^2 c^2}} = c \sqrt{\frac{K^2 u^2}{K^2 u^2 + c^2}} = c \sqrt{\frac{u^2/(1 - u^2/c^2)}{u^2/(1 - u^2/c^2) + c^2}} \\
&= c \sqrt{\frac{u^2/(1 - u^2/c^2)}{\frac{u^2 + c^2(1 - u^2/c^2)}{(1 - u^2/c^2)}}} = c \sqrt{\frac{u^2/(1 - u^2/c^2)}{\frac{u^2 + c^2 - u^2}{(1 - u^2/c^2)}}} = c \sqrt{\frac{u^2}{c^2}} = u
\end{aligned}$$

وسرعة الحزمة هذه هي السرعة التي تنتقل بها الكتلة والطاقة والزخم.

(١٢) ابتكر عالم طريقة جديدة لعزل الجسيمات المنفردة. وهو يدّعي أن هذه الطريقة تمكنه من الكشف في وقت واحد عن موضع الجسيم على طول المحور بانحراف معياري قدره 0.12 nm وعن مركبة الزخم له على طول هذا المحور بانحراف معياري قدره $(3 \times 10^{-25} \text{ kg.m/s})$. استخدم مبدأ اللا دقة لهايزنبرغ لتقييم صحة هذا الادعاء.

الحل: وفق مبدأ اللا دقة: $(\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2)$. ولهذا يمكننا التعامل مع الانحراف المعياري كمقياس مباشر لعدم الدقة. وهنا:

$$\Delta x \Delta p_x = (1.2 \times 10^{-10} \text{ m})(3 \times 10^{-25} \text{ kg.m/s}) = 3.6 \times 10^{-35} \text{ J.s}$$

ولكن $(\hbar/2 = 5.27 \times 10^{-35} \text{ J.s})$. ولهذا فإن $(\Delta x \Delta p_x < \hbar/2)$. وهذا يبين عدم صحة الادعاء.

(١٣) عُجِّل إلكترون وبروتون لنفس السرعة، وكانت اللا دقة التجريبية للسرعة هي نفسها للجسيمين. وتم أيضاً قياس موقعي الجسيمين. فهل إن أدنى قدر محتمل لعدم الدقة في موقع الإلكترون: (أ) يقل عن أدنى قدر محتمل لعدم الدقة في موقع البروتون، (ب) مساوٍ لما للبروتون، (ج) أكثر مما للبروتون، (د) لا يمكن معرفته من المعلومات المعطاة؟

الحل: إذا كانت اللا دقة في السرعة هي نفسها للجسيمين فسيكون للجسيم ذي الكتلة الأصغر عدم دقة أصغر في الزخم $(\Delta p_x = m \Delta v_x)$. ولهذا فإن عدم الدقة الأكبر في موقعه هي: $(\Delta x \geq \hbar/2 \Delta p_x = \hbar/2 m \Delta v_x)$. ولأن كتلة الإلكترون أصغر من كتلة البروتون فإن أدنى قدر محتمل لعدم الدقة في موقع الإلكترون أكبر من ذلك الذي للبروتون.

(١٤) (أ) يتحرك إلكترون في الاتجاه x بسرعة $(3.6 \times 10^6 \text{ m/s})$ ويمكننا قياسها بدقة 1%. ما هي اللا دقة في قياس إحداثي x له في نفس الوقت؟ (ب) كرر حسابات الفرع "أ" في حالة كرة كتلتها 0.145 kg وسرعتها 42.5 m/s . افترض مرة أخرى أنه يمكن قياس سرعتها بدقة 1%.

الحل: (أ) زخم الإلكترون هو

$$p_x = m_e v_x = (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.6 \times 10^6 \text{ m/s}) = 3.3 \times 10^{-24} \text{ kg.m/s}$$

تكون اللا دقة في الزخم Δp مساوية لـ 1% من هذه القيمة، أي $(3.3 \times 10^{-26} \text{ kg.m/s})$. ولهذا فإن اللا دقة في الموقع ستكون:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2 \Delta p_x} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(3.3 \times 10^{-26} \text{ kg.m/s})} \approx 1.6 \times 10^{-9} \text{ m} = 1.6 \text{ nm}$$

وهذا يقارب قطر ما يقارب 10 ذرات.

(ب) زخم الكرة هو $p_x = m_b v_x = (0.145 \text{ kg})(42.5 \text{ m/s}) = 6.16 \text{ kg.m/s}$
تكون اللا دقة في الزخم $(6.16 \times 10^{-2} \text{ kg.m/s})$. واللا دقة المقابلة لها في الموقع ستكون:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(6.16 \times 10^{-2} \text{ kg.m/s})} = 8.55 \times 10^{-34} \text{ m}$$

هذه اللا دقة أصغر بـ 19 مرتبة من قيمة قطر نواة الذرة الذي يقارب 10^{-10} m . وهنا نرى أنه بسبب الحجم الصغير لثابت بلانك لا يمكن ملاحظة التأثيرات الكمية للأشياء الاعتيادية.

(١٥) تعتمد قدرة تحليل المجهر الإلكتروني على طول الموجة المستخدمة. فإذا أردنا رؤية ذرة ما فهذا يتطلب طولاً موجياً يقارب 10^{-11} m . (أ) إذا تم استخدام الإلكترونات في المجهر لهذا الغرض فما هو الحد الأدنى للطاقة الحركية اللازمة؟ (علماً أن الطاقة السكونية للإلكترون هي 0.511 MeV)، (ب) إذا استخدمت الفوتونات فما هو الحد الأدنى من طاقة الفوتون اللازمة للحصول على قدرة التحليل المطلوبة؟

الحل: بما أن طول موجة دي بروي هو $(\lambda = h/p)$ فإن زخم الإلكترون أو الفوتون سيكون:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{10^{-11} \text{ m}} = 6.626 \times 10^{-23} \text{ kg.m/s}$$

(أ) ستكون الإجابة بالحسابات النسبية للإلكترونات صحيحة بشكل أكثر دقة،

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \sqrt{p^2 c^2 + E_0^2}$$

$$= \sqrt{\left[(6.626 \times 10^{-23} \text{ kg.m/s})(3 \times 10^8 \text{ m/s}) \left(\frac{1 \text{ MeV}}{1.6 \times 10^{-13} \text{ J}} \right) \right]^2 + (0.511 \text{ MeV})^2}$$

$$= 0.525 \text{ MeV}$$

والطاقة الحركية المقابلة ستكون:

$$E_k = E - E_0 = (0.525 - 0.511) \text{ MeV} = 0.014 \text{ MeV} = 14 \text{ keV}$$

أما إن أهملنا الحسابات النسبية فستصبح الطاقة الحركية:

$$E_k = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{(6.626 \times 10^{-23} \text{ kg.m/s})^2}{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})} \left(\frac{1 \text{ keV}}{1.6 \times 10^{-16} \text{ J}} \right) = 15.1 \text{ keV}$$

(ب) للفوتونات:

$$E = pc = (6.626 \times 10^{-23} \text{ kg.m/s})(3 \times 10^8 \text{ m/s}) \left(\frac{1 \text{ keV}}{1.6 \times 10^{-16} \text{ J}} \right) = 124 \text{ keV}$$

(١٦) (أ) ما هو فرق الجهد المعجل اللازم في المجهر الإلكتروني لإنتاج إلكترونات بطول موجي 0.06 nm ؟
(ب) إذا تم استخدام البروتونات بدلاً من الإلكترونات فما هو فرق الجهد المعجل اللازم لإنتاج بروتونات بطول موجي 0.06 nm ؟

$$E_k = eV = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m_0} \quad \text{(أ) الحل :}$$

$$V = \frac{(h/\lambda)^2}{2m_0 e} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}/0.06 \times 10^{-9} \text{ m})^2}{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})} = 419 \text{ V}$$

$$V = \frac{(h/\lambda)^2}{2m_0 e} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s} / 0.06 \times 10^{-9} \text{ m})^2}{2(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})} = 0.228 \text{ V} \quad (\text{ب})$$

ملاحظة: بما أن $(\lambda = h/p = h/\sqrt{2m_0 E})$ فإنه لنفس الطول الموجي λ ستمتلك الجسيمات التي لها كتلة أكبر طاقة أصغر، ولهذا نحتاج لفرق جهد معجل أصغر للبروتونات.

(١٧) لفحص تركيب الأجسام الصغيرة جداً مثل الفيروسات يجب أن يكون الطول الموجي للموجة الفاحصة حوالي عُشر طول الجسم للحصول على صورة دقيقة. ولكن كلما أصبح الطول الموجي أقصر كلما زادت طاقة فوتون الإشعاع المستعمل، ويمكن أن تتلف الجسم الذي تتم دراسته. وأحد البدائل هو استخدام الموجات المادية الإلكترونية بدلاً من الإشعاع الكهرومغناطيسي. وتختلف الفيروسات اختلافاً كبيراً في الحجم، لكن الطول 50 nm يُعتبر مقبولاً. ولنفترض أنك تريد دراسة هكذا فيروس باستخدام موجة طولها 5 nm .

(أ) إذا كنت تستخدم إشعاعاً كهرومغناطيسياً بهذا الطول الموجي فكم ستكون طاقة الفوتون (بوحدة eV)؟

(ب) إذا كنت تستخدم إلكترونات بهذا الطول الموجي فكم ستكون طاقته الحركية (بوحدة eV)؟

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6} \text{ eV.m}}{5 \times 10^{-9} \text{ m}} = 248 \text{ eV} \quad \text{الحل : (أ) للفوتون}$$

$$E_e = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{h^2}{2m_0 \lambda^2} \quad (\text{ب) ولإلكترون}$$

$$= \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(5 \times 10^{-9} \text{ m})^2} = 9.65 \times 10^{-21} \text{ J} = 0.0603 \text{ eV}$$

يملك الإلكترون طاقة أقل بكثير من فوتون له نفس الطول الموجي، وبالتالي فإن الضرر الذي يمكن أن يسببه للفيروس هو أقل بكثير. ولهذا أصبح من الواضح سبب تفضيل الموجات المادية (كما في المجهر الإلكتروني) على الموجات الكهرومغناطيسية لدراسة الأجسام المجهرية.

(١٨) لدينا إلكترون ورصاصة كتلتها 0.02 kg ، ولكل منهما سرعة تبلغ 500 m/s . وتبلغ دقة حساب هذه السرعة بحدود 0.01% . فبأي حد أدنى يمكن تحديد موقع كل من الجسمين على طول اتجاه السرعة؟

الحل: ينص مبدأ اللا دقة على $(\Delta x \Delta p_x \geq h/2)$ حيث $(\Delta p_x = m\Delta v)$. ولكل من الإلكترون والرصاصة لا دقة في السرعة تبلغ:

$$\Delta v = 0.0001 \times 500 \text{ m/s} = 0.05 \text{ m/s}$$

وأقل لا دقة لموقع الإلكترون هي:

$$\Delta x = \frac{h}{2m\Delta v} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(0.05 \text{ m/s})} = 0.001158 \text{ m} = 1.158 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{h}{2m\Delta v} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(0.02 \text{ kg})(0.05 \text{ m/s})} = 5.27 \times 10^{-32} \text{ m} \quad \text{وللرصاصة :}$$

(١٩) يبلغ متوسط عمر الميون μon حوالي $2 \mu\text{s}$. احسب الحد الأدنى لعدم الدقة في طاقته السكونية.

الحل: أقصى وقت يمكن استخدامه في قياس طاقة الجسيم يساوي عمر الجسيم $(\Delta t_{\max} \approx 2 \mu\text{s})$. ولهذا فالحد الأدنى من اللا دقة الذي يمكن الحصول عليه عند قياس طاقة الميون هو:

$$\Delta E_{\min} = \frac{h}{2(\Delta t)_{\max}} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(2 \times 10^{-6} \text{ s})} = 2.6 \times 10^{-29} \text{ J} = 1.6 \times 10^{-10} \text{ eV}$$

(٢٠) يبلغ زمن حالة غير مستقرة في ذرة 5.2 ms . ما هي اللا دقة في الطاقة في هذه الحالة؟

الحل :

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2(5.2 \times 10^{-3} \text{ s})} = 1.01 \times 10^{-32} \text{ J} = 6.33 \times 10^{-14} \text{ eV}$$

مقدار اللا دقة في الطاقة هو جزء صغير جداً من الطاقة النموذجية للمستويات الذرية، والتي تكون بمرتبة 1 eV .

فهرست الفصل الخامس

الصفحة	الموضوع
١	١-٥ : مقدمة
١	٢-٥ : فرضية دي بروي
٤	٣-٥ : موجات دي بروي والعالم العياني
٤	٤-٥ : حيود الإلكترونات
١٠	٥-٥ : حيود النيوترونات
١١	٦-٥ : ما هي موجات دي بروي؟
١٢	٧-٥ : الجسيم الكمي
١٤	٨-٥ : سرعة الطور وسرعة المجموعة
١٨	٩-٥ : مبدأ اللا دقة
٢٣	١٠-٥ : المجهر الإلكتروني
٢٥	أسئلة
٢٦	مسائل محلولة

مصادر الفصل الخامس

- ١- أساسيات الفيزياء، ف. بوش، ترجمة طبعة سنة 1977.
- ٢- الفيزياء الذرية، د. طالب ناهي الخفاجي و د. عباس حمادي و د. هرمز موشي، 1980.
- ٣- مفاهيم في الفيزياء الحديثة، آرثر بايزر، ترجمة الطبعة الثانية.
- 4- Concepts of Modern Physics, Arthur Beiser, 6th ed. 2003.
- 5- Fundamentals of physics- Halliday, Resnick, Walker, 10th ed. 2014.
- 6- Introduction to Atomic and Nuclear Physics, Semat and Albright, 5th ed. 1972.
- 7- Modern Physics For Scientists and Engineers, Thornton & Rex, 4th ed, 2013.
- 8- Modern Physics, A. Serway, J. Moses and A. Moyer, 3rd ed. 2005.
- 9- Modern Physics, Kenneth Krane, 3rd ed, 2012.
- 10- Modern Physics, Paul A. Tipler and Ralph A. Llewellyn, 5th ed. 2008.
- 11- Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, A. Serway and W. Jewett, 10th ed. 2019.
- 12- Principles of physics, A. Serway and W. Jewett, 4th ed. 2006.
- 13- University Physics with modern physics, Young & Freedman, 15th ed. 2020.