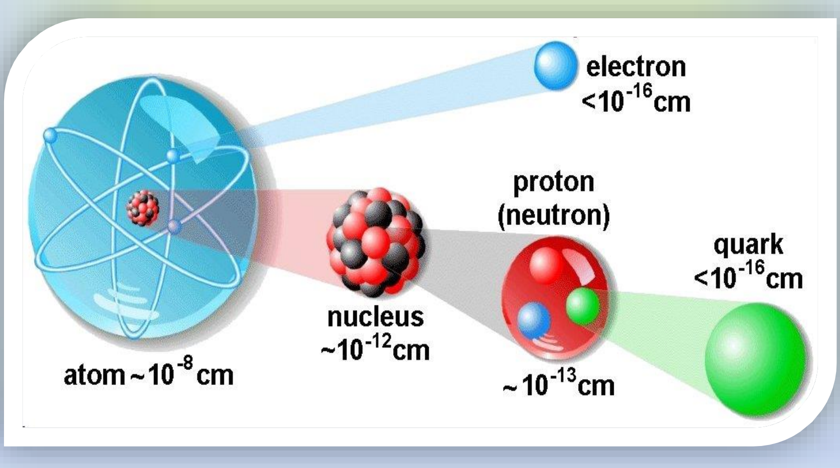
جامعة بغداد – كلية التربية للعلوم الصرفة / ابن الهيثم

قسم الفيزياء – المرحلة الثالثة

الفيزياء الذرية



2024-2025

2024-2025

الفصل الأول

النظرية النسبية الخاصة

Special Theory of Relativity

١-١: ما هي الفيزياء الذرية؟ 1-1: What is Atomic Physics?

الفيزيـاء الذريـة فـرع مـن الفيزيـاء يهـتم بدراسـة الـذرّة atom وهيكليتهـا وحـالات الطاقـة energy states لها وتفاعلاتها مع الجسيمات الأخرى ومع المجالات الكهربائية والمغناطيسية.

وفي كثير من المصادر العلمية تُدرج الفيزياء الذرية ضمن مواضيع الفيزيـاء الحديثـة، كمـا يتـداخل مفهوم الفيزياء الذرية أحياناً مع مفهوم الفيزياء النووية، ولكنه يختلف عنه، إذ أن الأخيـر معنـي بالتفـاعلات النووية التي تحدث في النواة فقط، في حين أن الفيزياء الذريـة تُعنـى بالـذرة ككـل. وكـذلك يتـداخل مع مفهـوم الفيزيـاء الجزيئيـة الـذي يُعنـى بدراسـة الخـواص الفيزيائيـة للجزيئـات والأطيـاف ودراسـة الـروابط الكيميائية التي تربط الذرات المختلفة المكوِّنة للجزيئات.

وقد بُرهن أن الفيزياء الذرية تمثل تطبيقـاً ناجحـاً للميكانيـك الكمـي quantum mechanics الـذي يمثل ركيزة أساسية للفيزياء الحديثة.

١-٢: مقدمة في النسبية 1-2: Introduction to Relativity

تُعتبر النظرية النسبية الخاصة التـي صـاغها العـالم الألمـاني ألبـرت آينشـتاين Albert Einstein عـام 1905 إحدى الانجازات العلمية المتميزة في القرن العشرين، وساعدت في تفسـير بعـض الظـواهر التـي لـم تستطع الفيزياء التقليدية تفسيرها. وكانت ثمرة لجهود العديد من العلماء الذين سـبقوا آينشـتاين فـي القـرن التاسـع عشـر، خاصـة مـا طرحـه ماكسـويل فـي نظريتـه الكهرومغناطيسـية، والـذي توقـع وجـود موجـات كهرومغناطيسية تسير بسرعة الضوء وأن الضوء نفسه جزء من الموجات الكهرومغناطيسية.

وقد بيّن آينشتاين أن القياسات الزمنية والمكانية تتأثر بالحركة بين المُراقِـب observer ومـا يُراقَـب. وقد نتج من النظرية النسبية ميكانيك جديد هو الميكانيك النسبي الـذي يختص بالسـرع القريبـة مـن سـرعة الضوء ويعتمد علاقة تربط بين المكان والزمان وبين الكتلة والطاقة.

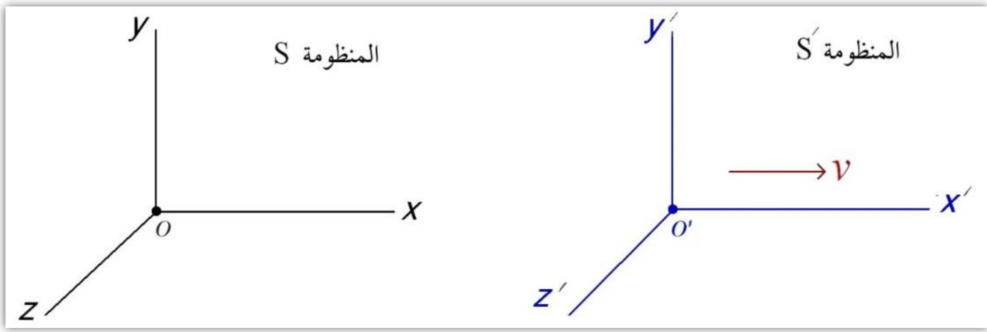
١-٣: أُطّر الإسناد القصورية 1-3: Inertial Reference Frames

لأجل فهم النظرية النسبية الخاصة لا بدّ من فهم أطر الإسناد القصورية. ولهذا سنعرِّف أولاً القصور الذاتي inertia، وهو ميل الجسم لمقاومة أي محاولة لتغيير سرعته سواء كانت صفراً أو لا. ويتناسب القصور الذاتي طردياً مع كتلة الجسم لأنها مقياس لقصور الجسم. بل إن القصور الذاتي هو أحد تعريفين للكتلة[١].

يمكن تحديد موضع الجسم في الفضاء من خلال محاور للإحداثيات تسمى "أُطُر الإسناد" أو "محاور الإسناد" التي تشتمل على المحاور x, y, z والزمن الذي يُحدَّد بمقارنة حركة الأجسام في الفضاء. ولهذا يوصف الحدث في أي موضع في الكون بأربعة متغيرات، الأبعاد المكانية الثلاثة x, y, z والزمن t. ويسمى الإطار الذي يصف إحداثيات المكان والزمان معاً إطار الإسناد frame of reference.

ويمكن تصنيف أطر الإسناد المتحركة إلى صنفين أحدهما يتحرك بسرعة ثابتة نسبة إلى إطار إسناد ثابت ويسمى "الإطار القصوري" والصنف الآخر يتحرك بتعجيل ويوصف بأنه إطار غير قصوري. ولهذا فالإطار القصوري في الفيزياء التقليدية هو إطار إسناد تكون الأجسام المنسوبة له إما ساكنة أو متحركة بسرعة ثابتة بخط مستقيم، وتكون محصلة القوى المؤثرة على هذه الأجسام مساوية للصفر. لذا يمكن تطبيق قانوني نيوتن الأول والثاني عليه. كما إن أي إطار إسناد يتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لإطار الإسناد القصوري هو أيضاً إطار إسناد قصوري.

وفي هذا الفصل نأخذ القياسات نسبة إلى منظومتين من المحاور الإسنادية، إحداهما نعتبرها ساكنة وهي $oxyz$ ونسميها المنظومة S، والأخرى $o'x'y'z'$ تتحرك بسرعة منتظمة مقدارها v بالنسبة للمحاور الساكنة ونسميها المنظومة S'. ولتيسير المعالجات الرياضية سنفترض أن المحورين x و x' يتجهان باتجاه الحركة وأن المحور y يوازي المحور y' وأن المحور z يوازي المحور z' كما في الشكل ١-١، أي إن المتغير الوحيد هو إحداثيات المحور x'.



الشكل ١-١: إطار الإسناد S' يتحرك بسرعة ثابتة v بالاتجاه الموجب لمحور x نسبة للإطار الآخر S.

---

١) ما هو التعريف الآخر للكتلة؟

١-٤: قوانين نيوتن للحركة 1-4: Newton's Laws of Motion

هي ثلاثة قوانين فيزيائية وَضعت معاً أساس الميكانيك التقليدي classical mechanics. وهي تصف العلاقة بين الجسم والقوى المؤثرة عليه، وكذلك حركته تبعاً لتأثير هذه القوى. وهي:

القانون الأول: يُسمى هذا القانون أحياناً مبدأ غاليليو أو قانون القصور الذاتي، وينص على أنه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على الجسم تساوي صفراً فإن سرعة الجسم تكون ثابتة (سواءً كانت صفراً أو ذات قيمة). وبناءً على هذا فإن الجسم الساكن يبقى ساكناً ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تحركه، والجسم المتحرك بسرعة ثابتة في خط مستقيم يبقى على هذه الحالة ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير الحالة الحركية له. ونظام الاحداثيات الذي يعمل عليه هكذا قانون يُدعى نظام إحداثيات غاليليو أو نظام الإسناد القصوري[١]. ويمكن التعبير عن القانون رياضياً بالصيغة:

$$\sum \vec{F} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \qquad \ldots\ldots 1.1$$

القانون الثاني: يصح هذا القانون للأنظمة ثابتة الكتلة فقط. ويمكن التعبير عنه بدلالة تعجيل الجسم المتحرك، فيُقال: إن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم تساوي حاصل ضرب كتلته في تعجيله:

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad \ldots\ldots 1.2$$

القانون الثالث: لكل فعل وتأثير من جسم على آخر يوجد رد للفعل من الجسم الآخر على الجسم الأول يساويه بالمقدار ويعاكسه بالاتجاه.

١-٥: تحويلات غاليليو 1-5: Galilean Transformations

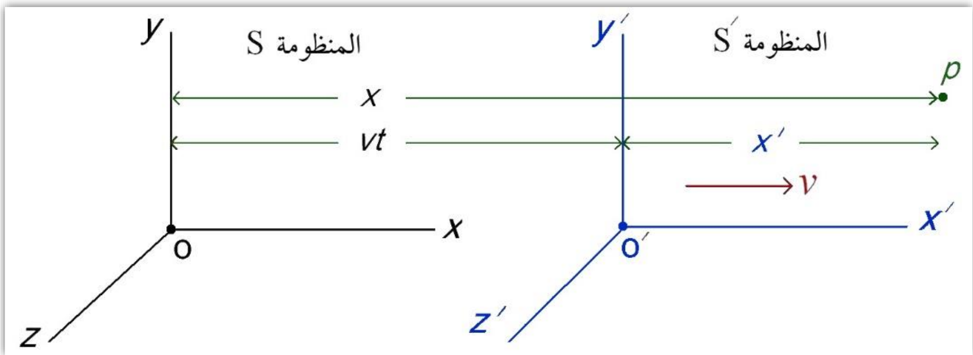
يُستخدم تحويل غاليليو في الفيزياء لتحويل إحداثيات نظام إسناد إلى آخر، أي قياس حدث ما بواسطة مراقب ضمن منظومة ما (إطار إسناد) بدلالة إحداثيات منظومة أخرى غير التي يتواجد فيها المراقب. ويختلف النظامان في كون أحدهما يتحرك بسرعة مستقيمة منتظمة بالنسبة للآخر الثابت. أي إن كلا النظامين قصوريان. وقد قام نيوتن بتطبيقها عندما قام بدراسة حركة الأجسام وحركة الكواكب.

لفهم هذه التحويلات نفترض وجود منظومتي محاور إسناد يوجد في كل منهما مراقب، وتتحرك المنظومة الثانية S' بسرعة منتظمة مقدارها v لا تعجيل فيها $(a = 0)$ بالاتجاه الموجب لمحور x بينما تكون المنظومة الأولى S ساكنة. ولنفترض وقوع حدث في موضع مثل p في الشكل ١-٢ يلاحظه المراقب المتواجد ضمن أبعاد المنظومة S ويقيس إحداثياته x, y, z في الزمن t، بينما يقيس المراقب في

---

١) لماذا يُسمى بالقصوري؟

المنظومة S' نفس الحدث في الزمن t' بالإحداثيات x', y', z'. وفي بداية الحركة كانت المنظومتان منطبقتين على بعض، أي إن نقطة الأصل o' كانت منطبقة على نقطة الأصل o في الزمن $(t = t' = 0)$. وعندما تتحرك المنظومة S' يبدأ حساب الزمن. وبعد مرور زمن t تكون المحاور $o'x'y'z'$ قد قطعت مسافة vt.



الشكل ١-٢: وقوع حدث يُقاس نسبة لإطار إسناد متحرك S' وآخر ثابت S.

وعند قياس احداثيات الموضع p من قبل مراقب في المنظومة S' بدلالة احداثيات المنظومة S ينتج:

$$x' = x - vt\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = t \quad \} \qquad \ldots\ldots 1.3$$

وتُعرف هذه المعادلة بتحويلات غاليليو للمكان والزمان. ونلاحظ فيها أن المحورين y و z لا تتغير قيمتاهما لأننا افترضنا أن الحركة هي باتجاه محور x فقط، وأن العلاقة $(t' = t)$ تفترض أن الزمن كمية مطلقة، أي إن الزمن لن يتغير في كلا المنظومتين وفق الحركة النسبية. فلو افترضنا أن كل مراقب كانت معه ساعة إيقاف وبدأ بحساب الزمن بمجرد الحركة فإنه عند وقوع حدث في إحدى المنظومتين سيكون للزمن قيمة واحدة عند كلا المراقبين. وهذا يعني أن الزمن مطلق ولا يعتمد على حركة المراقب[١]، وهذا غير صحيح.

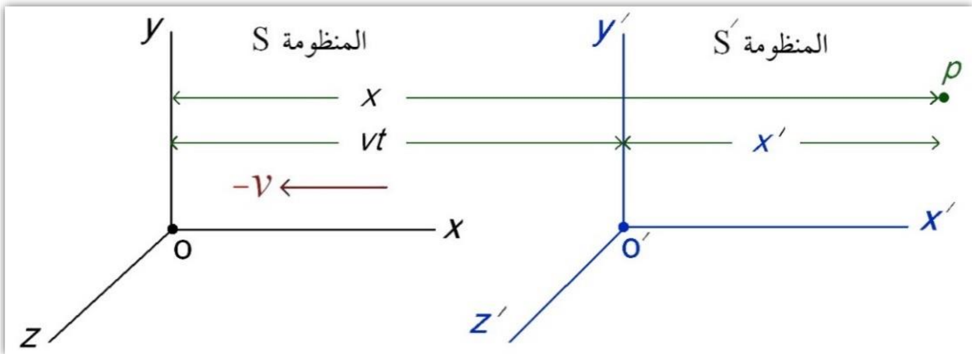
وفي حال كانت المنظومة S' ثابتة نسبياً والمنظومة S هي المتحركة بالنسبة لها بسرعة ثابتة مقدارها $(-v)$ كما في الشكل ١-٣، أي كانت حركة المنظومة S بالاتجاه السالب لمحور x، فيمكن كتابة المعادلة 1.3 بالشكل التالي:

$$x = x' + vt\,, \qquad y = y'\,, \qquad z = z'\,, \qquad t = t' \quad \} \qquad \ldots\ldots 1.4$$

* ولمعرفة تحويلات غاليليو للسرعة نأخذ بنظر الاعتبار أن $\dfrac{d}{dt'} = \dfrac{d}{dt}$

---

١) بما أن الإشارة الضوئية هي التي تنقل نتيجة الحدث إلى المراقبَين في النقطتين المتباعدتين بمسافتين مختلفتين عن موضع الحدث فوصول الإشارة لكل منهما في نفس الوقت يعني أن سرعة الضوء لا نهائية. ولكن الصحيح هو أن سرعة الضوء محددة وثابتة، لذا فلا بد أن تصل الإشارة للمراقبَين في وقتين مختلفين.



الشكل ١-٣: المنظومة S تتحرك بالاتجاه $(-x)$ نسبة للمنظومة S'.

وباشتقاق المعادلة 1.3 بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\left.\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx}{dt}-v\,,\quad \frac{dy'}{dt'}=\frac{dy}{dt}\,,\quad \frac{dz'}{dt'}=\frac{dz}{dt}\right\} \quad \ldots\ldots 1.5$$

⁕ أما تحويلات غاليليو للتعجيل فتُعرف بأخذ المشتقة الثانية بالنسبة للزمن، وكما يلي:

$$\left.\frac{d^2x'}{dt'^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\,,\quad \frac{d^2y'}{dt'^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\,,\quad \frac{d^2z'}{dt'^2}=\frac{d^2z}{dt^2}\right\} \quad \ldots\ldots 1.6$$

سؤال ١: قذف لاعبٌ كرةً بسرعة $60\ km/h$ عندما كان واقفاً داخل قطار متحرك بسرعة $100\ km/h$. وكان اتجاه الكرة بنفس اتجاه حركة القطار. فإذا طبقنا معادلة تحويل غاليليو للسرعة فما هي سرعة الكرة بالنسبة للأرض؟

$(a) 60\ km/h,\quad (b) 100\ km/h,\quad (c) 40\ km/h,\quad (d) 160\ km/h,\quad (e)$ غير قابلة للتحديد

١-٦: مبدأ نسبية نيوتن — 1-6: Principle of Newtonian Relativity

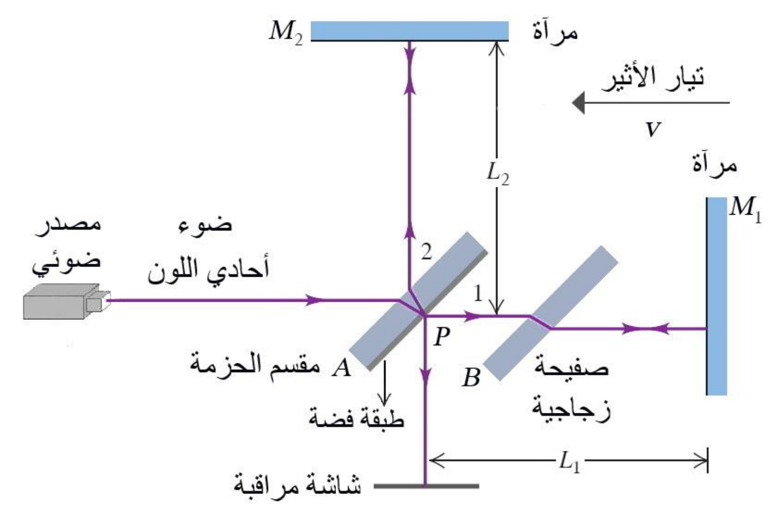
ينص هذا المبدأ على إن قوانين نيوتن في الحركة لا تتغير في المحاور القصورية المتحركة بسرعة منتظمة بالنسبة لبعضها البعض. وفي الواقع فإن جميع قوانين الميكانيك التقليدي لا تتغير باستخدام تحويلات غاليليو، فيمكن مثلاً برهنة أن قانوني حفظ الزخم الخطي وحفظ الطاقة الحركية لا يتغيران في المنظومتين S و S'. أما قوانين الكهرومغناطيسية فإنها تتغير عند استخدام تحويلات غاليليو، ولهذا لا يصح تطبيق هذه التحويلات عليها.

١-٧: تجربة مايكلسون- مورلي — 1-7: Michelson-Morley Experiment

إن اكتشاف ماكسويل للنظرية الكهرومغناطيسية للضوء سنة 1864 وإثباتها العملي من قبل هيرتز سنة 1887 قد جرّد الأثير ether من معظم صفاته. ومع هذا لم يكن علماء ذلك الوقت مستعدين للتخلي عن فكرة الأثير الذي اعتبروه إطاراً إسنادياً كونياً ووسطاً تام المرونة يملأ الفضاء وينتشر الضوء خلاله. ولأجل دراسة حركة الأرض وسرعتها خلال الأثير المفترض استخدم مايكلسون ومورلي سنة 1887 جهاز مقياس

تداخل مايكلسون بعد أن افترضا أن الأثير ساكن وأن الاشارات الضوئية تنتقل بسرعة نسبية هي سرعة الضوء المطلقة c بالنسبة للأثير وتعتمد على حركة الأرض خلال الأثير. وهكذا اعتقدا أنه يمكن قياس سرعة الأرض بالنسبة للأثير باستعمال الاشارات الضوئية وجهاز حساس.

يوضح الشكل ١-٤ المكونات الرئيسية لمقياس تداخل مايكلسون، حيث يسقط ضوء أحادي اللون monochromatic light من مصدر ضوئي على مقسم الحزمة A المائل بزاوية 45^o، وهو لوح زجاجي ذو طبقة رقيقة من الفضة على جانبه الأيمن. ويمر جزء من الضوء (شعاع 1) عبر السطح المطلي بالفضة والصفيحة الزجاجية B وينعكس من المرآة M_1، ثم يعود من خلال الصفيحة B، ويكون مساره حينئذ ضمن محور اتجاه حركة الأرض عبر الفضاء وموازياً لتيار الأثير المفترض. ثم ينعكس من السطح الفضي (عند النقطة P) إلى شاشة المراقبة. والغرض من وضع الصفيحة الزجاجية B هو ضمان مرور الشعاعين 1 و 2 عبر نفس سماكة الزجاج، ويتم قطع الصفيحة B من نفس قطعة زجاج الصفيحة A.



الشكل ١-٤: مخطط لمقياس تداخل مايكلسون.

إن حركة الأرض عبر الأثير بسرعة v تعادل تَدفُّق الأثير عبر الأرض في الاتجاه المعاكس بسرعة v. وتؤدي هذه الريح الأثيرية المزعومة التي تهب في الاتجاه المعاكس لاتجاه حركة الأرض إلى أن تكون سرعة الضوء المقاسة في إطار الأرض $(c - v)$ عندما يتجه الضوء نحو المرآة M_1، وتكون $(c + v)$ بعد أن ينعكس عنها.

ينعكس جزء آخر (الشعاع 2) من الضوء الساقط من المصدر الضوئي عن السطح الفضي متجهاً إلى المرآة M_2 ويكون مساره عمودياً على تيار الأثير ويعود من خلال مقسم الحزمة إلى شاشة المراقبة.

تم تركيب الجهاز في الشكل ١-٤ على إطار صلب جداً. ونُظمت التجربة بحيث يكون الإشعاعان الواصلان إلى المراقب قد قطعا نفس المسافة عبر الهواء ونفس السُمك عبر الزجاج، وكانت المرآتان M_1 و M_2 في زاويتين قائمتين تماماً، لذا $(L_2 = L_1)$. وعليه فإنْ كان الزمنان اللازمان لانتقال حزمتي الضوء الواصلتين إلى المراقب متساويين فإن الحزمتين ستصلان للشاشة بنفس الطور وتتداخلان تداخلاً بناءً يؤدي إلى إضاءة الشاشة. وبما أن تيار الأثير سيكون بموجب حركة الأرض موازياً لإحدى الحزمتين كما ذكرنا فإنه سيُسبب فرقاً في زمن وصول هذه الحزمة الأفقية عن الحزمة الأخرى العمودية، وسيكون التداخل

إتلافياً بين الموجتين الواصلتين إلى الشاشة، وهذه الفكرة تمثل جوهر التجربة. وكان الجهاز حساساً بما فيه الكفاية لتحسس الفروقات في الإزاحة التي يمكن أن تحدث في أهداب التداخل، لكنه لم يكشف عن أية إزاحة بالرغم من تكرار التجربة في مناطق مختلفة وفي فصول مختلفة من السنة وفي أوقات مختلفة من اليوم. ولهذا استُنتج أن حركة الأرض بالنسبة للأثير لا يمكن رصدها.

وبعد هذا أمكن استنتاج ما يلي من تجربة مايكلسون- مورلي:

١- إن الأثير ليس موجوداً، وكل حركة ستكون نسبة لإطار إسناد محدد وليست لإطار مطلق كوني كالأثير المزعوم.

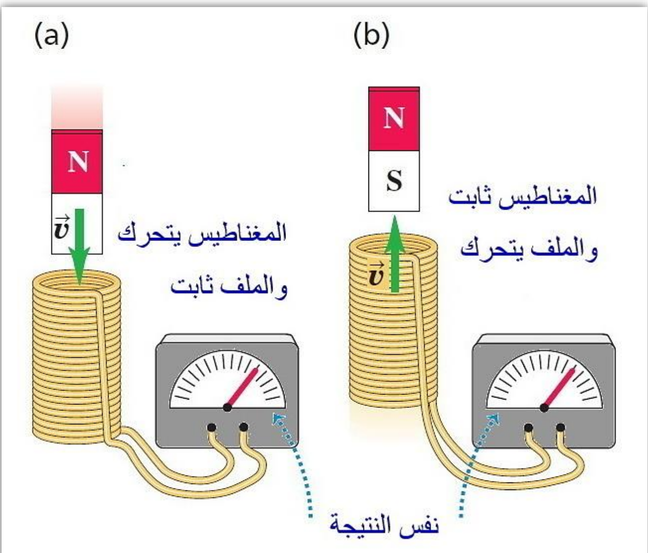
٢- إن سرعة الضوء هي نفسها لكل المراقبين بغض النظر عن حركة المصدر أو المراقب، وأن الموجات الكهرومغناطيسية لا تحتاج لوسط مادي كي تنتقل.

١-٨: فرضيات النظرية النسبية الخاصة 1-8: Postulates of Special Theory of Relativity

إثر فشل معادلة غاليليو لتحويل السرعة في حالة السرع القريبة من سرعة الضوء وعدم اثبات وجود الأثير قدَّم آينشتاين نظريته كحل جريء لهذه المشكلة. وقد افترض آينشتاين مَبدئين قامت على أساسهما النظرية النسبية الخاصة، وهما:

١- **مبدأ النسبية**: إن قوانين الفيزياء هي نفسها في جميع أُطُر الإسناد القصورية.

تعني هذه الفرضية أن قوانين الفيزياء -كقوانين الميكانيك والبصريات والحرارة والكهرومغناطيسية وغيرها- مطلقة وصحيحة لمختلف أرجاء الكون، وتعبِّر عن عدم وجود إطار إسناد كوني متميز كالأثير. إذ لو أخَذت قوانين الفيزياء أشكالاً مختلفة حسب إطار الإسناد لتمكنّا - بسبب اختلاف هذه الصيغ- أن نميِّز إطارَ إسناد واحداً عن غيره بأن يكون هو الثابت في الفضاء والبقية متحركة، أو أن نجعل القوانين في أحد الأطر أصح مما في غيره. وإن عدم وجود إطار إسناد كوني متميز يعني أنه لا يمكن أن يكون هناك أي تباين واختلاف ما بين الأُطُر المختلفة.



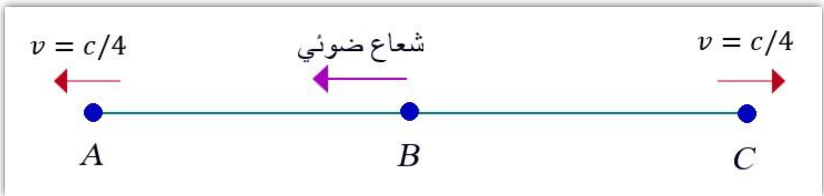
الشكل ١-٥: يتم إحداث نفس القوة الدافعة الكهربائية في الملف سواء إذا: (a) تحرك المغناطيس بالنسبة للملف أو (b) تحرك الملف بالنسبة للمغناطيس.

وكمثال على هذا هو القوة الدافعة الكهربائية emf المتولدة بالحث في ملف من

الأسلاك بواسطة مغناطيس دائم متحرك قريب. ففي إطار الإسناد الذي يكون الملف فيه ثابتاً (الشكل ١-٥-a) يتسبب المغناطيس المتحرك في حدوث تغيير في الفيض المغناطيسي عبر الملف، وهذا يؤدي إلى توليد emf. وفي إطار إسناد مختلف يكون فيه المغناطيس ثابتاً (الشكل ١-٥-b) تتولد emf بسبب حركة الملف خلال مجال مغناطيسي. ووفقاً لمبدأ النسبية فإن كلا الإطارين صالحان بشكل متساوٍ. ومن ثَم يجب إحداث نفس emf في كلتا الحالتين الموضحتين في الشكل ١-٥. لذا فإن قانون فاراداي Faraday يتوافق مع مبدأ النسبية. بل إن جميع قوانين الكهرومغناطيسية تبقى نفسها في كل إطار إسناد قصوري.

٢- ثبات سرعة الضوء: إن سرعة الضوء في الفراغ لها نفس القيمة c في كل أُطُر الإسناد القصورية، ولا تعتمد على حركة المصدر الباعث للضوء ولا حركة المراقب.

من الصعب قبول هذه الفرضية التي تتعارض مع تحويلات غاليليو وما نألفه في تجاربنا اليومية. ولفهم الفرضية أكثر نفترض وجود ثلاثة مراقبين A و B و C على محور واحد. وكان المراقب B في حالة سكون، بينما يتحرك كل من A و C بعيداً عن B في اتجاهين متعاكسين بسرعة ثابتة $c/4$ لكل منهما. وأطلق B شعاعاً ضوئياً في اتجاه A. فوفق تحويلات غاليليو، إذا كان B يقيس السرعة c لشعاع الضوء فإن المراقب A يقيس السرعة $(c - c/4 = 3c/4)$، بينما المراقب C يقيس السرعة $(c + c/4 = 5c/4)$.



ولكن فرضية آينشتاين الثانية تتطلب أن يقيس كل المراقبين الثلاثة نفس السرعة c لشعاع الضوء.

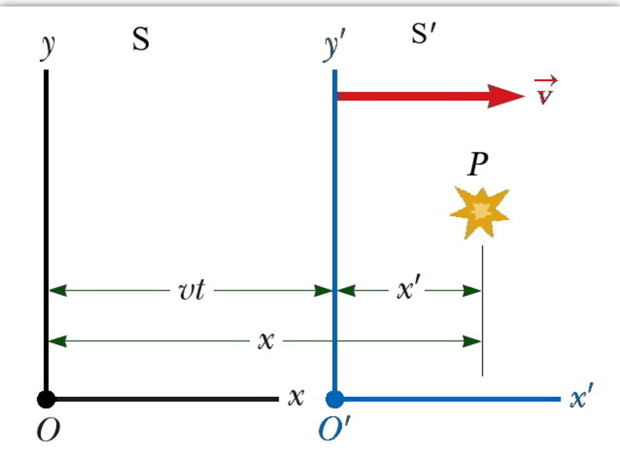
وافترض آينشتاين أيضاً ضمن فرضيات النظرية النسبية الخاصة أنه لا يمكن لأي كيان يحمل طاقة أو معلومات أن يتجاوز سرعة الضوء، ولا يمكن لأي جسيم له كتلة أن يصل إلى سرعة الضوء.

١-٩: تحويلات لورنتز — 1-9: Lorentz Transformations

تبيّن سابقاً أن تحويلات غاليليو ليست صحيحة عندما تقترب السرعة v من سرعة الضوء. ولهذا سوف يتم هنا اشتقاق معادلات تحويل السرعة والإحداثيات التي تنطبق على جميع السرع ضمن المدى $(0 \le v < c)$. وهذه التحويلات اشتُقت بصعوبة من قبل لورنتز عام 1890 وجعلت معادلات ماكسويل ذات معنى آخر. وقد تعرف آينشتاين على الأهمية الفيزيائية لهذه التحويلات واستفاد منها في نظريته النسبية الخاصة. ولهذا يُطلق البعض عليها اسم تحويلات آينشتاين-لورنتز.

ولفهم هذه التحويلات نفترض وقوع حدث عند النقطة P كما في الشكل ١-٦، وقد تم رصده من قبل مراقبَين اثنين كان أحدهما في حالة سكون في إطار الإسناد القصوري S يشاهد

الحدث وفق الاحداثيات x, y, z في الزمن t، والآخر كان ساكناً أيضاً في الإطار S' يشاهد الحدث وفق الاحداثيات x', y', z' في الزمن t'. وكانت المنظومة S' تتحرك باتجاه $(+x)$ بسرعة ثابتة مقدارها v بالنسبة إلى المنظومة S، وتتطابق نقطتا الأصل للمنظومتين عند الزمن $(t = t' = 0)$. وما نعنيه بحالة السكون في الإطار هو أن المراقب يكون ثابتاً بالنسبة لنقطة أصل الإطار.



الشكل ١-٦: وقوع حدث عند النقطة P يرصده مراقبان في إطارين قصوريين.

ويمكن صياغة معادلة اعتماد x' على x و t بالشكل:

$$x' = B(x - vt) \qquad \dots\dots 1.7$$

وهنا B هو عامل factor ليس له وحدات ولا يعتمد على x أو t، ولكنه يمثل دالة لـ (v/c) بحيث أن $(B = 1)$ عندما يقترب المقدار (v/c) من الصفر. كما إن شكل المعادلة 1.7 قد اقتُرح تبعاً لشكل معادلة تحويل غاليليو (المعادلة 1.3) التي تكون صحيحة عندما يكون المقدار (v/c) صغيراً، أي للسرع الاعتيادية غير النسبية. وبعد افتراض صحة المعادلة 1.7 يمكن كتابة تحويلات احداثيات لورنتز العكسية لـ x بدلالة x' و t' بالصيغة:

$$x = B(x' + vt') \qquad \dots\dots 1.8$$

وهذه المعادلة تنسجم مع فرضية آينشتاين الأولى للنسبية (مبدأ النسبية)، والتي تتطلب أن تكون قوانين الفيزياء هي نفسها في كلا المنظومتين S و S'. وقد غُيرت إشارة السرعة v لمراعاة الفرق في اتجاه حركة المنظومتين، حيث اعتُبرت المنظومة S هي التي تتحرك بسرعة منتظمة $(-v)$ بالنسبة للمنظومة S'. وفي الواقع فإن هذه التقنية للحصول على تحويلات لورنتز العكسية يمكن اتباعها كقاعدة عامة، أي للحصول على تحويل لورنتز عكسي من أي كمية نبادل بين المتغيرات المعلَّمة بالرمز $'$ وغير المعلَّمة ونعكس إشارة سرعة المنظومة.

وبالعودة لاشتقاقنا لتحويلات لورنتز سنأخذ مشتقة x' و t' ونستنتج علاقة تربط بين السرعة $(u'_x = dx'/dt')$ المقاسة لجسم من قبل مراقب في المنظومة S' وبين السرعة $(u_x = dx/dt)$ المقاسة لنفس الجسم من قبل مراقب في المنظومة S. وبعد هذا يمكن تحديد قيمة B بافتراض أن السرعة u'_x في المنظومة S' يجب أن تساوي سرعة الضوء c في حالة أن السرعة u_x في المنظومة S كانت مساوية

لـ c أيضاً وفقاً لفرضية آينشتاين الثانية للنسبية (ثبات سرعة الضوء)[1]. وبعد تحديد B يمكن بهذا الترتيب الجبري البسيط أن نجد تحويلات لورنتز للسرعة وللإحداثيات. وبتعويض المعادلة 1.7 في المعادلة 1.8 واستخراج الحل لـ t' نجد:

$$t' = B\left[t + (\frac{1}{B^2} - 1)\frac{x}{v}\right] \qquad \dots\dots 1.9 \qquad how? \ \dots(H.W.)$$

وبأخذ تفاضل المعادلتين 1.7 و 1.9 ينتج:

$$dx' = B(dx - vdt) \qquad \dots\dots 1.10$$

$$dt' = B\left[dt + (\frac{1}{B^2} - 1)\frac{dx}{v}\right] \qquad \dots\dots 1.11$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{B(dx - vdt)}{B\left[dt + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{dx}{v}\right]} \left.\begin{matrix} \div dt \\ \div dt \end{matrix}\right. \quad \rightarrow \quad u'_x = \frac{\frac{dx}{dt} - \frac{vdt}{dt}}{\frac{dt}{dt} + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{dx}{vdt}}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{u_x}{v}} \qquad \dots\dots 1.12\,, \qquad \text{where } \ u_x = dx/dt$$

وبما أن الفرضية الثانية للنظرية النسبية تتطلب أن تكون سرعة الضوء مساوية لـ c لأي مراقب، أي عند الحالة $(u_x = c)$ يجب أن يكون لدينا أيضاً $(u'_x = c)$، فإنه بتطبيق هذا في المعادلة 1.12 ينتج:

$$c = \frac{c - v}{1 + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{c}{v}} \qquad \dots\dots 1.13$$

ولاستخراج قيمة B نعيد ترتيب المعادلة 1.13:

$$c + \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{c^2}{v} = c - v\,, \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{B^2} - 1\right)\frac{c^2}{v} = -v$$

$$\left.\frac{c^2}{B^2} - c^2 = -v^2\right\} \div c^2, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{B^2} - 1 = -\frac{v^2}{c^2}\,, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{B^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$B^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)}\,, \quad \rightarrow \quad B \equiv K = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad \dots\dots 1.14$$

ولذلك سيكون التحويل المباشر للإحداثيات (م 1.7) بالصيغة التالية: $\{x' = K(x - vt)\}$، والتحويل العكسي (م 1.8): $\{x = K(x' + vt')\}$.

وللحصول على تحويل الزمن (t' كدالة لـ t و x)، نستبدل B بـ K في المعادلة 1.9 ونعوض فيها قيمة K من المعادلة 1.14 لينتج:

---

١) هل يمكن أن ينطبق هذا الفرض على جسم ما وفق مفاهيم النسبية؟

$$t' = K\left[t + (\frac{1}{K^2} - 1)\frac{x}{v}\right] = K\left[t + (1 - \frac{v^2}{c^2} - 1)\frac{x}{v}\right] = K\left[t - \frac{v^2}{c^2}\frac{x}{v}\right]$$

$$t' = K\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

وبهذا فقد توصلنا إلى التحويلات المكانية والزمانية لحدث يوصف بدلالة الإحداثيات (x, y, z, t) في المنظومة S والإحداثيات (x', y', z', t') في المنظومة S' كما يلي:

$$x' = K(x - vt)\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = K\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \Big\} \qquad \ldots\ldots 1.15$$

$$\text{where} \quad K = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

ويُسمى المقدار K مُعامِل لورنتز Lorentz factor ويُرمز له في بعض المصادر بالرمز الإغريقي گاما γ، و v: سرعة أحد إطاري إسناد قصوريين نسبة للآخر و c: سرعة الضوء في الفراغ.

ولو أردنا تحويل إحداثيات الحدث في الإطار S' للإحداثيات في الإطار S فإننا نعكس إشارة السرعة، أي نبدل (v) بـ $(-v)$ ونبادل بين المتغيرات المعلَّمة بالرمز $'$ وغير المعلَّمة في معادلات 1.15. وحينئذ ستكون التحويلات العكسية كما يلي:

$$x = K(x' + vt'), \qquad y = y'\,, \qquad z = z'\,, \qquad t = K\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \Big\} \qquad \ldots\ldots 1.16$$

مما يُلاحظ في تحويلات لورنتز أن t تعتمد على t' و x' كليهما، وأيضاً فإن t' يعتمد على كلا المتغيرين t و x. وهذا بخلاف حالة تحويلات غاليليو، والتي فيها $(t' = t)$. وعندما $(v \ll c)$ فإن تحويلات لورنتز ستؤول إلى تحويلات غاليليو. وهذا يعني أن تحويلات غاليليو هي حالة خاصة من تحويلات لورنتز. وللتحقق من هذا يلاحظ أنه عندما تقترب v من الصفر فإن $(v/c \ll 1)$ وتقترب K من 1، وستُختزل المعادلات 1.15 إلى معادلات تحويلات المكان والزمان لغاليليو (م 1.3):

$$x' = x - vt\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = t \qquad \ldots\ldots 1.3$$

وإذا أردنا أن نعرف الفرق في الإحداثيات المكانية والزمانية بين حدثين كما يرصدهما المراقبان O و O' فيمكن من معادلات 1.15 و 1.16 التعبير عن الفرق بين المتغيرات الأربعة $(x, x', t\,, t')$ بالصيغ التالية:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta x' = K(\Delta x - v\Delta t) & \ldots\ldots 1.17a \\ \Delta t' = K\left(\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x\right) & \ldots\ldots 1.17b \end{array}\right\} \; S \rightarrow S'$$

$$\Delta x = K(\Delta x' + v\Delta t') \qquad \ldots\ldots 1.18a$$
$$\Delta t = K\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \qquad \ldots\ldots 1.18b$$
$$\left.\right\} \mathrm{S}' \rightarrow \mathrm{S}$$

حيث أن المقدارَين $(\Delta x' = x_2' - x_1')$ و $(\Delta t' = t_2' - t_1')$ يمثلان الفرق المقاس بواسطة المراقب O'، والمقدارَين $(\Delta x = x_2 - x_1)$ و $(\Delta t = t_2 - t_1)$ يمثلان الفرق المقاس بواسطة المراقب O. ولم نضع الإحداثيين y و z في هذه الصيغ لأن قياسهما لا يتغير بالحركة على امتداد محور x.

مثال ١-١: حدث حدثان في النقطة x_0' في الزمنين t_1' و t_2' في الإطار S' الذي يتحرك في الاتجاه $(+x)$ بسرعة v نسبة للإطار S. (أ) ما هو الفاصل المكاني للحدثين Δx في الإطار S ؟ (ب) ما هو الفاصل الزمني للحدثين Δt في الإطار S ؟

الحل: (أ) يُعطى الموضع x_1 في الإطار S بواسطة تحويل لورنتز العكسي كما يلي:

$$x_1 = K(x_0' + vt_1') \qquad \text{where} \quad x_1' = x_2' = x_0'$$

وبنفس الطريقة يُعطى الموضع x_2 في الإطار S:

$$x_2 = K(x_0' + vt_2')$$

وسيكون الفاصل المكاني Δx للحدثين:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = K(x_0' + vt_2') - K(x_0' + vt_1')$$
$$= Kvt_2' - Kvt_1' = Kv(t_2' - t_1') = \frac{v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

أو (باستخدام المعادلة 1.18a) :

$$\Delta x = K(\Delta x' + v\Delta t') = Kv\Delta t' = \frac{v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

(ب) وفق تحويل لورنتز العكسي للزمن حيث يحدث الحدثان في نفس الموضع بالنسبة للإطار S':

$$\Delta t = t_2 - t_1 = K\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) = K\Delta t' = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \qquad (\text{where } \Delta x' = 0)$$

١-١٠: نتائج تحويلات لورنتز — 1-10: Results of Lorentz Transformations

١-١٠-١: نسبية الطول — 1-10-1: Relativity of Length

نفترض وجود جسم ساكن في المنظومة S' على طول المحور x' كما في الشكل ١-٧، وكان إحداثيا نهايتي الجسم هما x_1' و x_2'. ولهذا فإن طول الجسم هو $(L_o = x_2' - x_1')$ بالنسبة للمراقب O'، وهو نفس الطول الذي يراه المراقب O عندما تكون المنظومة S' ساكنة بالنسبة للمنظومة S. وعندما تتحرك المنظومة S' بالاتجاه الموجب لمحور x بسرعة منتظمة مقدارها v بالنسبة للمنظومة S فإن المراقب O' يرى طول الجسم مساوياً لـ L_o أيضاً لأن الجسم يُعتبر ساكناً بالنسبة إليه، بينما يراه المراقب O مساوياً لـ

L حيث $(L = x_2 - x_1)$، و $(x_1$ و $x_2)$ هما إحداثيا نهايتي الجسم وفق ما يراه المراقب O في المنظومة S. وباستخدام معادلات تحويلات لورنتز (م 1.15) يمكن إيجاد العلاقة بين L و L_o على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= K(x_1 - vt_1) \\ x_2' &= K(x_2 - vt_2) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots 1.19$$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية نحصل على:

$$x_2' - x_1' = K(x_2 - x_1) - vK(t_2 - t_1) \qquad \ldots\ldots 1.20 \quad (\equiv \text{Eq. } 1.17a)$$

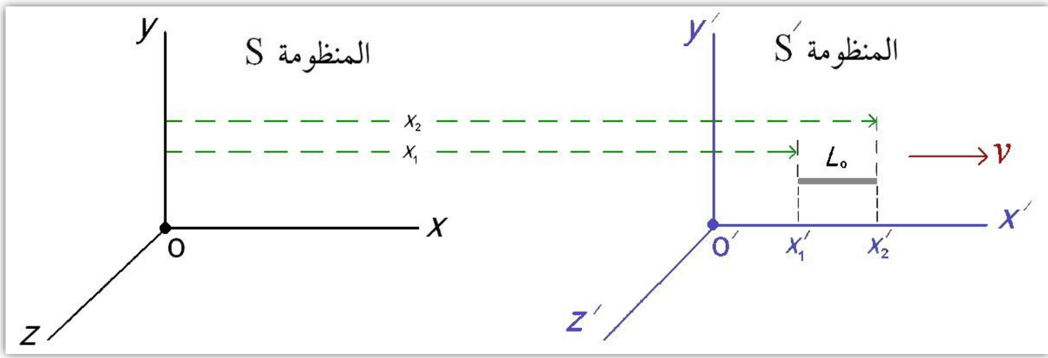
$$\text{or} \quad L_o = KL - vK(t_2 - t_1) \qquad \ldots\ldots 1.20'$$

where $L_o = x_2' - x_1'$ and $L = x_2 - x_1$.

وعندما يقيس المراقب O نهايتي الجسم في وقت واحد فإن $(t_2 = t_1)$، وتصبح المعادلة $1.20'$:

$$L_o = KL = \frac{L}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \qquad \text{where} \quad K = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$L = L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \ldots\ldots 1.21$$



الشكل ١-٧: جسم يتحرك بموازاة طوله الذي يقاس من قبل مراقبَين اثنين في إطارين قصوريين.

نستنتج من المعادلة 1.21 ما يلي:

أولاً: $(L = L_o)$ عندما تكون السرعة اعتيادية غير نسبية $(v \ll c)$. أي لا يلاحَظ تغيّر في الطول.

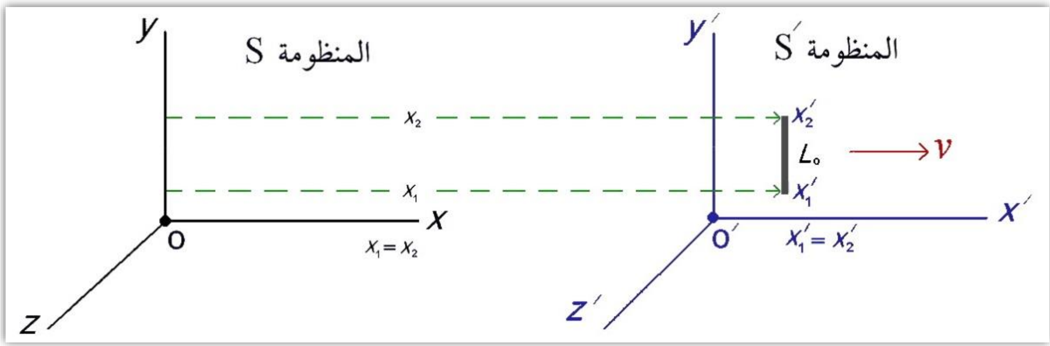
ثانياً: $(L < L_o)$ عندما تقترب v من c، أي عند السرع النسبية، لأن قيمة الجذر $\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)$ ستصبح أقل من واحد. وهذا يعني أن طول الجسم الذي يتحرك بموازاة طوله مبتعداً بسرعة نسبية بالنسبة لمراقب ساكن نسبياً[١] ستكون أقل من قيمته عندما يكون ساكناً بالنسبة لهذا المراقب. وتُسمى هذه الظاهرة بالانكماش الطولي length contraction. ومعنى الانكماش الطولي فيزيائياً هو أنه ما دام المراقب O في

١) ما المقصود من كلمة "نسبياً" هنا؟

المنظومة S يقيس نهايتي الجسم في وقت واحد فإن إشارة[1] الطرف الثاني للجسم الذي يقع في النقطة الأبعد x_2' لن تصل بنفس وقت وصول إشارة الطرف الأول (النقطة الأقرب x_1') إلى المراقب O لأن الجسم يبتعد بسرعة هائلة نسبة للمنظومة S. والحال هو عندما تصل إشارة الطرف الأول فإن الواصل من إشارة الطرف الثاني حينها هو عندما كان هذا الطرف في موقع أقرب من موقعه الفعلي، ولهذا يبدو الجسم أقصر. وكلما زادت سرعة الجسم قل طوله بالنسبة للمراقب O إلى أن يصل إلى الحالة في الفقرة الثالثة. أما بالنسبة للمراقب O' في المنظومة S' فلن يلاحظ أي تغيير في طول الجسم لأنه يُعتبر ثابتاً بالنسبة له وتصل إشارتا طرفي الجسم إليه بنفس الوقت.

ثالثاً: $(L = 0)$ عندما $(v = c)$. أي عندما يسير الجسم مبتعداً بسرعة الضوء فإن طوله يساوي صفراً بالنسبة للمراقب O في المنظومة S. ورغم أن النظرية النسبية الخاصة تفترض استحالة وصول أي جسم في الكون لسرعة الضوء، لكننا نفترض هذا لأجل فهم أوسع للنظرية. وتعني هذه الحالة أنه حين وصول إشارة الطرف الأول x_1' للمراقب O فإن إشارة الطرف الثاني x_2' الواصلة هي عندما كان أقرب بحد أنه كان في الموضع x_1'. أي إن كلا الإشارتين الواصلتين للمراقب O من طرفي الجسم تبدوان له أنهما صادرتان من نقطة واحدة هي x_1'، وطول الجسم سيبدو له حينئذ مساوياً للصفر لأن $(x_1' - x_1' = 0)$.

ما سبق من الكلام كان عن جسم يتحرك بحيث كان طوله موازياً لمحور x، أما إذا كان يتحرك باتجاه عمودي على طوله كما في الشكل ١-٨ فإنه لا يظهر أي تغيير في طول الجسم لأن إشارتي طرفي الجسم ستصلان بنفس الوقت للمراقب O.



الشكل ١-٨: جسم يتحرك باتجاه عمودي على طوله الذي يقاس من قبل مراقبَين اثنين في إطارين قصوريين.

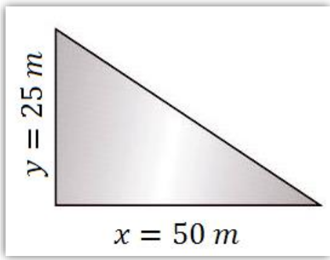
مثال ١-٢: صاروخ طوله على الأرض $20\ m$، وأثناء طيرانه ينقص طوله بمقدار $0.4\ m$ بالنسبة لمراقب على الأرض. جد سرعة الصاروخ.

---

١) الإشارة الواصلة للمراقب O من الجسم هي موجة كهرومغناطيسية تسير بسرعة الضوء سواء كانت ضوءاً أو موجة راديوية أو غيرها من الموجات الكهرومغناطيسية.

الحل: طول الصاروخ على الأرض بالنسبة للمراقب هو $(L_o = 20\ m)$، وطول الصاروخ أثناء الطيران بالنسبة للمراقب على الأرض هو $(L = 20 - 0.4 = 19.6\ m)$. ومن تحويلات لورنتز لدينا:

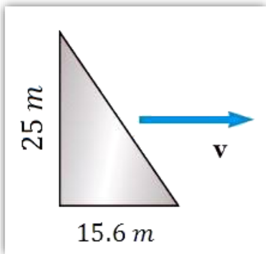
$$L = L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \rightarrow \quad 19.6 = 20\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \rightarrow \quad v \approx 0.2c$$



مثال ١-٣: سفينة فضاء بشكل مثلث (لاحظ الشكل المرفق). أبعادها وهي ساكنة بالنسبة لمراقب هي: $(x = 50\ m)$ و $(y = 25\ m)$. ما هو شكل السفينة بالنسبة لمراقب يرصد السفينة وهي مبتعدة عنه بسرعة $0.95c$ باتجاه محور x؟

الحل: يتقلص الطول الأفقي x للسفينة بالنسبة للمراقب إلى:

$$L = L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 50\sqrt{1 - \frac{(0.95c)^2}{c^2}} = 15.6\ m$$



أما ارتفاع السفينة y البالغ 25 متراً فلا يتغير لأنه متعامد مع اتجاه الحركة النسبية بين المراقب وسفينة الفضاء. والشكل المجاور يمثل شكل السفينة كما يراه المراقب الذي يرصد السفينة وهي متحركة.

سؤال ٢: افترض أنك تستعد لرحلة إلى نظام شمسي آخر بمركبة فضائية تتحرك بسرعة مقدارها $0.99c$ وفكّرتَ في ما إذا كنت بحاجة لشراء ملابس جديدة بحجم أصغر لأنك ربما ستكون أنحف خلال الرحلة بسبب ظاهرة الانكماش الطولي، وفكّرت أيضاً بتوفير بعض النقود عن طريق حجز غرفة أصغر في المركبة الفضائية لتنام بها لأنك ربما ستكون أقصر عندما تستلقي فيها. فهل عليك والحال هذه أن:

(أ) تشتري ملابس أصغر، (ب) تحجز غرفة أصغر، (ج) لا تقوم بشيء مما سبق، (د) تقوم بالأمرين معاً؟

١-١٠-٢: نسبية الزمن — 1-10-2: Relativity of Time

لنفترض وقوع حدثين لحظيين في الموضع x_o في المنظومة S، الأول في الزمن t_1 والثاني في الزمن t_2، أو أن حدثاً واحداً وقع في الموضع x_o في المنظومة S في الزمن t_1 واستمر إلى الزمن t_2 كما في الشكل ١-٩، فعندئذ تكون الفترة الزمنية بين الحدثين اللحظيين أو الفترة الزمنية للحدث الممتد بالنسبة لمراقب ساكن في نفس المنظومة هي: $\Delta t = t_2 - t_1$

والفترة الزمنية التي يقيسها مراقب ساكن في المنظومة S' التي تتحرك بسرعة منتظمة v بالنسبة للمنظومة S بالإتجاه الموجب لمحور x هي: $\Delta t' = t_2' - t_1'$

وباستخدام تحويلات لورنتز (معادلات 1.15) يمكن إيجاد العلاقة بين $\Delta t'$ و Δt على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} t_1' &= K\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) \\ t_2' &= K\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots 1.22$$

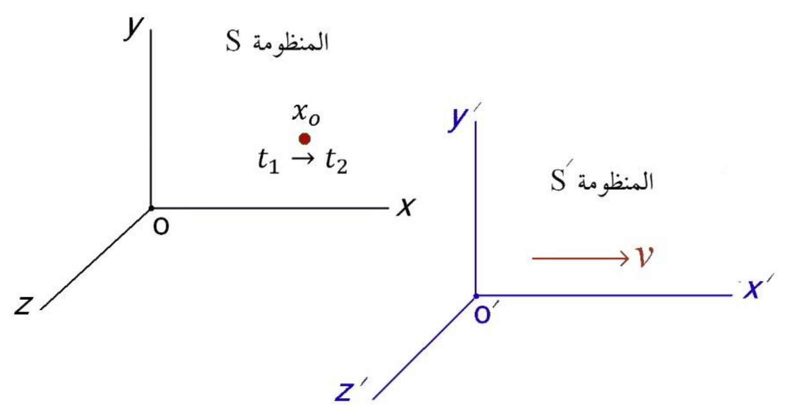
وبطرح المعادلة الأولى من الثانية نحصل على:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = K(t_2 - t_1) - K\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \qquad \ldots\ldots 1.23 \quad (\equiv \text{Eq. } 1.17\text{b})$$

وهنا $(x_2 = x_1 = x_o)$، أي إن قياس مسافة الحدث سيكون له نفس الناتج في كلا الوقتين بالنسبة للمراقب في المنظومة S. والمعادلة 1.23 ستصبح:

$$\Delta t' = K\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \qquad \ldots\ldots 1.24 \qquad \text{where} \quad K = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

حيث Δt: الفترة الزمنية المقاسة بواسطة راصد ساكن في المنظومة الثابتة S، أي الوقت الاعتيادي proper time.



الشكل ١-٩: حدث يقع في الموقع x_o في المنظومة S في الزمن t_1 ويستمر إلى الزمن t_2.

$\Delta t'$: الفترة الزمنية المقاسة بواسطة راصد ساكن في المنظومة المبتعدة S'.

v: سرعة الحركة النسبية (سرعة المنظومة S' بالنسبة للمنظومة S).

نستنتج من المعادلة 1.24 ما يلي:

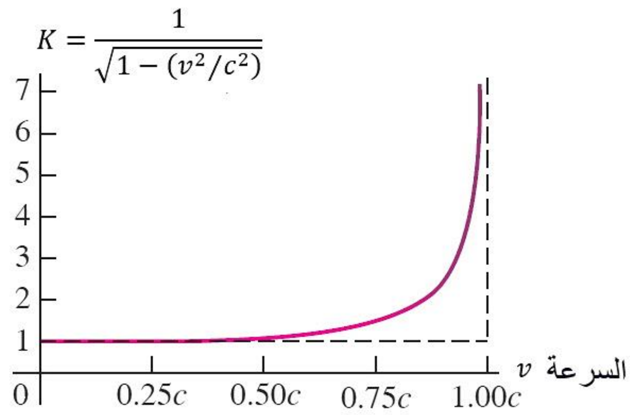
أولاً: $(\Delta t' = \Delta t)$ عندما تكون السرعة اعتيادية غير نسبية $(v \ll c)$. أي سوف لا يلاحَظ تغير في حساب الزمن.

ثانياً: $(\Delta t' > \Delta t)$ عندما تقترب v من c، أي عند السرع النسبية $(v \to c)$، وهذا يعني أن الفترة الزمنية $\Delta t'$ لحدث ما والتي يقيسها مراقب في منظومة مبتعدة بسرعة نسبية تبدو أطول من الفترة الزمنية Δt التي يقيسها مراقب في نفس المنظومة التي وقع فيها الحدث. وهذا يحدث بسبب تأخر وصول الإشارة الثانية للحدث إلى المراقب المبتعد لأنه يتحرك بسرعة هائلة. وتُعرف هذه الظاهرة بالتمدد الزمني time dilation.

ثالثاً: $(\Delta t' = \infty)$ عندما $(v = c)$ لأن مقام المعادلة 1.24 سيساوي صفراً، وهذه الحالة ممنوعة وفق فرضيات النسبية الخاصة، وقيمة K أكبر من 1 دائماً. وتعني هذه الحالة فيزيائياً أنه

ما دام المراقب في المنظومة S' مبتعداً بسرعة الضوء فإنه لن تصل إليه أي إشارة من الحدث إلا إذا كانت المنظومة S' منطبقة على المنظومة S عند بدء الحدث مما يؤدي إلى وصول الإشارة الأولى للحدث فقط، أما الإشارة الثانية للحدث فسوف لن تصل إلى المراقب O' أبداً.

إن التباطؤ والتمدد الزمنيين غير ملاحظَين في حياتنا اليومية، وهذا أمر مفهوم بملاحظة المعامل K، حيث أنه ينحرف عن 1 بقيم معتَدٍّ بها عند السرع العالية جداً كما موضح في الشكل ١-١٠ والجدول ١-١. وكمثال، فإنه لسرعة $0.1c$ تكون $(K = 1.005)$. ولهذا يوجد تأخير زمني بمقدار 0.5% فقط عندما تكون السرعة عُشر سرعة الضوء. وعند الأخذ بعين الاعتبار أن السرع التي نتعامل معها في حياتنا اليومية أقل بكثير من $0.1c$ فإننا لن نلاحظ تأخيراً زمنياً في حياتنا الاعتيادية.



الشكل ١-١٠: معامل لورنتز K كدالة للسرعة النسبية v لإطاري إسناد. ويلاحظ أنه عندما تقترب السرعة v من سرعة الضوء c فإن K تقترب من اللا نهاية.

الجدول ١-١

قيم تقريبية لـK عند سرع مختلفة

v/c	K
0	1
0.001 0	1.000 000 5
0.010	1.000 05
0.10	1.005
0.20	1.021
0.30	1.048
0.40	1.091
0.50	1.155
0.60	1.250
0.70	1.400
0.80	1.667
0.90	2.294
0.92	2.552
0.94	2.931
0.96	3.571
0.98	5.025
0.99	7.089
0.995	10.01
0.999	22.37

إن الفترة الزمنية لدقات الساعة الميكانيكية الموجودة في إطار الإسناد المبتعد بسرعة نسبية سوف تبدو للمراقب في المحور الثابت نسبياً أطول من الفترة الزمنية لدقات الساعة الموجودة عنده. ولهذا يقال إن الساعة المبتعدة بسرعة قريبة من سرعة الضوء $(v \to c)$ تكون دقاتها أبطأ من ساعة المراقب في إطار الإسناد الثابت بمقدار المُعامل K. ويمكن تعميم هذه النتيجة لكل العمليات الطبيعية بما فيها الميكانيكية والكيميائية والحياتية، حيث تبدو أبطأ للمراقب الثابت عندما تحدث في إطار إسناد مبتعد بسرعة $(v \to c)$ بالنسبة إليه. وكمثال على هذا فإن نبضات قلب رائد الفضاء المبتعد في الفضاء تكون بمعدلها الطبيعي بالنسبة لساعة داخل المركبة

الفضائية ولكنها تبدو أبطأ بالنسبة للساعة الأخرى على الأرض (رغم أن رائد الفضاء لا يشعر ببطء في حياته داخل المركبة).

مثال ١–٤: الميونات muons جسيمات أولية من صنف اللبتونات، يبلغ متوسط العمر الأصلي لها $(2.2 \times 10^{-6}\ s)$ تتحلل بعده إلى جسيمات أخرى. (أ) كم يبلغ معدل المسافة التي تقطعها في الفراغ قبل أن تتحلل في إطار إسناد قيست سرعتها فيه فكانت $0.6c$؟ (ب) قارن هذه المسافة مع المسافة التي تشهدها الميونات نفسها خلال الانتقال؟

الحل: (أ) لا بدّ أن نفترض أن الميونات تبتعد[١] عن المراقب في المختبر بسرعة $0.6c$.

$$t' = Kt \quad \rightarrow \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2.2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1-0.6^2}} = 2.75 \times 10^{-6}\ s$$

Distance $d' = vt' = 0.6ct' = 0.6 \times 3 \times 10^{8} \times 2.75 \times 10^{-6} = 495\ m$

(ب) $d = vt = 0.6ct = 0.6 \times 3 \times 10^{8} \times 2.2 \times 10^{-6} = 396\ m$

مثال ١–٥: تتحرك حزمة ميونات بسرعة $(v = 0.5c)$. ووُجد أن متوسط عمرها كما يلاحظ في المختبر هو $(2.54 \times 10^{-6}\ s)$. ما هو متوسط عمر الميونات عندما تتحلل في حالة السكون؟

الحل: هنا أيضاً نفترض أن الميونات تبتعد عن المراقب في المختبر، ولكن بسرعة $0.5c$.

$$t = \frac{t'}{K} = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2.54 \times 10^{-6}\ s \times \sqrt{1-0.5^2} = 2.2 \times 10^{-6}\ s$$

مثال ١–٦: وقع حدث على الأرض، واستمر 40 ثانية بالنسبة لمراقب على الأرض. ما هي الفترة الزمنية التي يسجلها لنفس الحدث مراقب مبتعد بسرعة منتظمة $0.6c$ بالنسبة للأرض؟ ثم علل النتيجة فيزيائياً.

الحل: $(t = 40\ sec)$ والزمن الذي تعرّض لتأثيرات النسبية هو t'. لذا ستكون الفترة الزمنية التي يسجلها المراقب المبتعد:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{40}{\sqrt{1-(0.6c/c)^2}} = 50\ sec$$

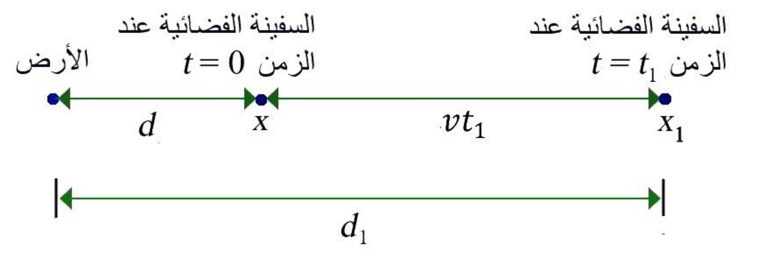
ويبدو الزمن أطول بالنسبة للمراقب المبتعد لأنه خلال فترة وقوع الحدث على الأرض (الأربعين ثانية) ابتعد المراقب مسافة كبيرة، وهذه المسافة تحتاج لزمن إضافي تستغرقه الإشارة الأخيرة للحدث كي تصل للمراقب المبتعد.

---

١) لماذا نفترض هذا؟

مثـــال ١-٧: ابتعـدت سـفينة فضـائية عـن الأرض بسـرعة $(v = 0.7c)$. وعنـدما كانـت عنـد مسـافة $(d = 5 \times 10^8\ km)$ مـن الأرض أُرسـلت لهـا إشـارة راديويـة مـن مراقـب علـى الأرض. كـم مـن الوقت تستغرق الإشارة لتصل إلى السفينة كما يقيسها المراقب الأرضي؟

الحل: لـيكن t_1 الـزمن الـذي اسـتغرقته الإشارة الراديوية لتصل إلى السفينة بعد قطعهـا مسـافة d_1 حيـث $(d_1 = ct_1)$. وعنـدما كـان $(t = 0)$ كانـت السـفينة عند المسافة d. وعند t_1 تكـون السـفينة الآن على بعد:



الشكل ١-١١: إشارة مرسلة لسفينة فضائية مبتعدة.

$$d_1 = d + vt_1 = d + 0.7ct_1$$

$$ct_1 = d + 0.7ct_1 \quad \text{where} \quad d_1 = ct_1$$

$$d = ct_1 - 0.7ct_1 = 0.3ct_1 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{d}{0.3c} = \frac{5 \times 10^{11}\ m}{0.3 \times 3 \times 10^8\ m/s} = 5556\ s$$

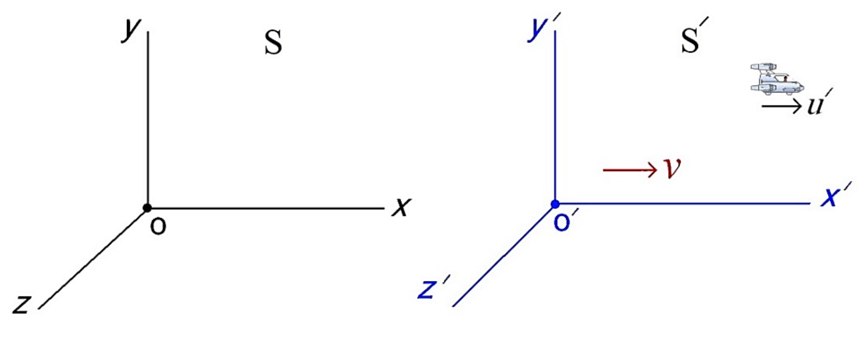
١-١٠-٣: نسبية السرعة — 1-10-3: Relativity of Velocity

لنفترض أن جسماً يتحرك بسرعة u' نسبة للمنظومة المتحركة S' بموازاة المحور x' كما في الشكل ١-١٢. فوفق نسبية نيوتن تُعطى السرعة u لهذا الجسم التي يقيسها مراقب في المنظومة الثابتة S بالمعادلة:

$$u = v + u' \qquad \dots\dots 1.25$$

حيث v تمثل سـرعة المنظومـة S' بالنسبة للمنظومة S.

ولمعرفـة السـرعة u وفـق النظرية النسبية الخاصة نسـتخدم تحـويلات لـورنتز كـي تكـون السـرعة u بدلالـة إحـداثيات المنظومـة S':



الشكل ١-١٢: جسم يتحرك نسبة لإطارَين قصوريَين.

من معادلات 1.16 لدينا:

$$x = K(x' + vt')$$

$$dx = K(dx' + vdt') \qquad \dots\dots 1.26$$

ومن معادلات 1.16 أيضاً:

$$t = K\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad \rightarrow \quad dt = K\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right) \qquad \dots\dots 1.27$$

لإيجاد السرعة u نقسم المعادلة 1.26 على المعادلة 1.27:

$$u=\frac{dx}{dt}=\frac{K(dx'+vdt')}{K\left(dt'+\frac{v}{c^2}dx'\right)}$$

وبقسمة بسط ومقام الطرف الأيمن لهذه المعادلة على dt' نحصل على:

$$u=\frac{\frac{dx'}{dt'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \quad \rightarrow \quad u=\frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}} \qquad \ldots\ldots 1.28 \qquad \text{where} \quad u'=\frac{dx'}{dt'}$$

تمثل المعادلة 1.28 الصيغة النسبية لمعادلة جمع سرعتين متوازيتين. وتُختزل إلى صيغة نيوتن (المعادلة 1.25) إذا كانت قيمتا السرعتين v و u' صغيرتين مقارنة بسرعة الضوء c، حيث يُهمل الحد (vu'/c^2) لصغره مقارنة بالعدد 1. وفي حالة خاصة[1] عندما $(u'=c)$ سينتج:

$$u=\frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c}=\left.\frac{c+v}{1+\frac{v}{c}}\right\}\times\frac{c}{c} \qquad \rightarrow \qquad u=\frac{c(c+v)}{c+v}=c$$

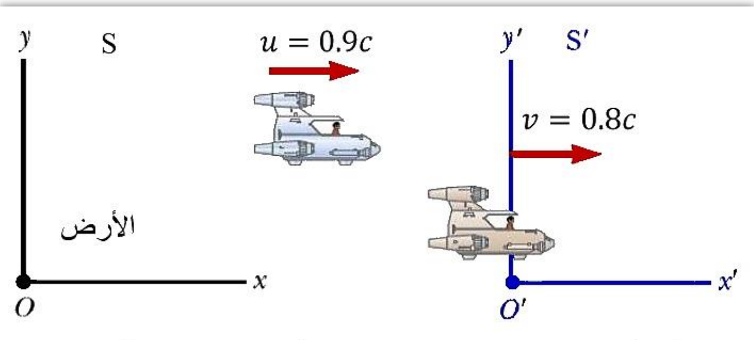
وهذا موافق للفرضية الأساسية بأن سرعة الضوء ثابتة ولا تعتمد على حركة المصدر أو المراقب. وهذه نتيجة متوقعة لأن قيمة t في معادلات 1.16 التي استنتجنا منها المعادلة 1.28 قد حُسبت بناءً على تطبيق فرضية ثبات سرعة الضوء على تحويلات لورنتز.

إن المعادلة 1.28 تمثل تحويل سرعة لورنتز العكسية من المنظومة S' إلى المنظومة S، أما تحويل سرعة لورنتز من المنظومة S إلى المنظومة S' فيعطى بالعلاقة:

$$u'=\frac{u-v}{1-\frac{vu}{c^2}} \qquad \ldots\ldots 1.28'$$

مثال ١–٨: تتحرك سفينة فضائية مبتعدة عن الأرض بسرعة $0.8c$ وتلحقها سفينة أخرى بسرعة $0.9c$ بالنسبة للأرض. احسب سرعة تجاوز السفينة اللاحقة للسفينة الأولى كما يقيسها طاقم السفينة اللاحقة؟

الحل: نفترض هنا أن الأرض تمثل إطار الإسناد الثابت S وأن السفينة الأولى تمثل إطار الإسناد S' الذي يتحرك بسرعة ثابتة v بالنسبة للأرض. ولهذا ستمثل u' سرعة السفينة اللاحقة بالنسبة للسفينة الأولى، و u سرعة السفينة اللاحقة بالنسبة للأرض.



الشكل ١-١٣: سفينتان فضائيتان تلحق إحداهما الأخرى.

---

١) متى تحدث هذه الحالة الخاصة؟ أم هو مجرد فرض لا يتحقق وتمنعه فرضيات النسبية الخاصة؟

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}} = \frac{0.9c - 0.8c}{1 - \frac{(0.8c)(0.9c)}{c^2}} = 0.357c$$

مثال ١-٩: تحرك الصاروخ A بسرعة $0.8c$ بالنسبة لقاعدة في القمر، وكان في إثره الصاروخ B الذي يراد له أن يتجاوز الصاروخ A بسرعة $0.3c$ بنفس الاتجاه. ما هي السرعة التي يجب أن يتحرك بها الصاروخ B بالنسبة للقمر؟

الحل: نفترض هنا أن القمر يمثل إطار الإسناد الثابت S وأن الصاروخ A يمثل إطار الإسناد S' الذي يتحرك بسرعة ثابتة v بالنسبة للقمر. ولهذا ستمثل u': سرعة الصاروخ B بالنسبة للصاروخ A، و u: سرعة الصاروخ B بالنسبة للقمر.

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} = \frac{0.3c + 0.8c}{1 + \frac{(0.8c)(0.3c)}{c^2}} = 0.887c$$

١-١١: الكتلة النسبية — 1-11: Relativistic Mass

تكون كتل الأجسام ثابتة وفق الميكانيك التقليدي. ولكنها تُعتبر متغيرة بالنسبة للراصد الثابت وفق النظرية النسبية الخاصة إذا كان الجسم يتحرك بسرعة قريبة من سرعة الضوء وفق العلاقة:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad \dots\dots 1.29$$

حيث m_o : كتلة الجسم السكونية، وهي الكتلة الأصلية التي تُعتبر ثابتة.

و m : كتلة الجسم الذي يتحرك بسرعة ثابتة v بالنسبة لمراقب ساكن، وتُسمى الكتلة النسبية، وهي الكتلة التي تتغير بالنسبة للراصد الثابت حسب سرعة الجسم المبتعد.

ويمكن أن يُستنتج من المعادلة 1.29 ما يلي:

أولاً: $(m = m_o)$ عندما تكون سرعة الجسم صغيرة نسبياً $(v \ll c)$.

ثانياً: $(m > m_o)$ عندما تقترب سرعة الجسم من سرعة الضوء $(v \to c)$. أي تزداد كتلته بزيادة سرعته نسبة للمراقب الثابت إلى أن تصل إلى ما لانهاية كما في الحالة التالية:

ثالثاً: $(m = \infty)$ عندما $(v = c)$، وهذا غير واقعي ولا يمكن حدوثه. ولهذا فإنه يمكن اعتبار سرعة الضوء هي السرعة التي لا يمكن لأي جسم مادي أن يصل إليها فضلاً عن أن يتجاوزها.

مثال ١-١٠: ما هي السرعة التي يجب أن يسير بها جسم تبلغ كتلته النسبية ضعف كتلته السكونية بالنسبة للمراقب الثابت؟

الحل:

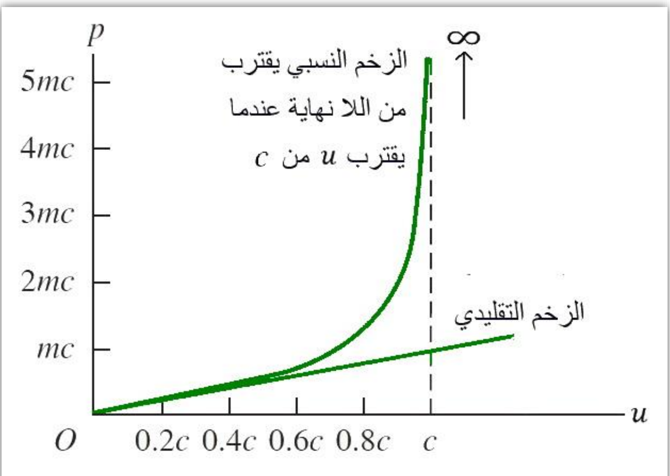
$$m = 2m_o \quad \to \quad m_o/m = 0.5$$

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_o}{m} \rightarrow 1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)=\left(\frac{m_o}{m}\right)^2=(0.5)^2=0.25$$

$$\frac{v^2}{c^2}=1-0.25=0.75 \quad \rightarrow \quad v=0.866c$$

١-١٢: الزخم النسبي 1-12: Relativistic Momentum

يُعبَّر عن الزخم الخطي وفق الميكانيك التقليدي بالصيغة $(p=m_o u)$[١]. ولكن الكتلة تكون متغيرة عند السرع القريبة من سرعة الضوء بالنسبة لمراقب ثابت، ولهذا يعطى الزخم الخطي وفق النظرية النسبية الخاصة بالصيغة التالية:



الشكل ١-١٤: الزخم النسبي والتقليدي لجسم يتحرك بسرعة u نسبة للراصد.

$$p=mu$$

$$p=\frac{m_o u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=Km_o u \qquad \ldots 1.30$$

حيث u: سرعة الجسم، و m_o: كتلته السكونية. و K معامل لورنتز.

ويُلاحظ من المعادلة 1.30 ومن الشكل ١-١٤ أنه عندما $(u \ll c)$ فإن الزخم الخطي سيؤول إلى الصيغة التقليدية لأن $(K \rightarrow 1)$ وأن سرعة الجسم لا يمكن أن تصل إلى سرعة الضوء لأن زخم الجسم سيكون لا نهائياً، وهذا أمر مستحيل. أما الزخم التقليدي $m_o u$ فإنه يصلح فقط لسرعات أصغر بكثير من سرعة الضوء.

مثال ١-١١: يتحرك إلكترون (كتلته $9.11\times10^{-31}\ kg$) بسرعة مقدارها $0.75c$. جد مقدار زخمه النسبي والتقليدي وقارن بينهما.

الحل: وفق الصيغة النسبية:

$$p=\frac{m_e u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{(9.11\times10^{-31}\ kg)(0.75\times3\times10^8\ m/s)}{\sqrt{1-(0.75c)^2/c^2}}=3.1\times10^{-22}\ kg.m/s$$

أما وفق الصيغة التقليدية (التي لا يصح استخدامها هنا لأن السرعة نسبية) فيُحسب الزخم كما يلي:

$$p_{\text{classical}}=m_e u=(9.11\times10^{-31}\ kg)(0.75\times3\times10^8\ m/s)$$
$$=2.05\times10^{-22}\ kg.m/s$$

١) هنا استخدمنا الرمز u لسرعة الجسم لأن الرمز v نستخدمه عادةً للسرعة النسبية لإطارين إسناديين.

وعليه فإن الزخم النسبي هنا يعادل 1.5 تقريباً من الزخم التقليدي.

سؤال ٣: وفقاً للميكانيك النسبي، عندما تتضاعف سرعة جسيم ما، تزداد قيمة زخمه بمقدار:

(أ) العامل 2، (ب) عامل أكبر من 2، (ج) عامل بين 1 و 2 يعتمد على كتلة الجسيم.

١-١٣: القوة النسبية 1-13: Relativistic Force

تُعرف القوة المؤثرة على جسم وفق الميكانيك التقليدي بأنها المعدل الزمني لتغير زخم الجسم:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m_o u) = m_o \frac{du}{dt} = m_o a \qquad \dots\dots 1.31$$

وتمثل هذه الصيغة قانون نيوتن الثاني. ولكنه وفق النظرية النسبية الخاصة تصبح كتلة الجسم المتحرك بسرعة قريبة من سرعة الضوء متغيرة بالنسبة لمراقب ثابت. وتُعرّف القوة المؤثرة حينئذ بأنها المعدل الزمني لتغير الزخم النسبي للجسم. وتُعطى الصيغة النسبية لقانون نيوتن الثاني بالشكل:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mu) = \frac{d}{dt}(Km_o u) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \qquad \dots\dots 1.32$$

وعندما $(u \ll c)$ فإن K ستكون مقاربة لـ 1 وتصبح F مقاربة لـ $m_o a$، وهذا موافق للميكانيك التقليدي.

لإيجاد العلاقة بين القوة $\vec{F}$ والتعجيل $\vec{a}$ لجسم كتلته السكونية m_o عندما تكون سرعته $\vec{u}$ على امتداد نفس خط القوة المؤثرة عليه نستخدم المعادلة 1.32 مع ملاحظة أن السرعة ستكون متغيرة بسبب تأثير القوة عليها.

$$F = m_o \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{m_o}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{du}{dt} + m_o u \frac{d}{dt}(1-u^2/c^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{m_o}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\frac{du}{dt} + m_o u\left[-\frac{1}{2}(1-u^2/c^2)^{-3/2}\left(\frac{-2u}{c^2}\right)\frac{du}{dt}\right]$$

$$= m_o\left[\frac{1}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{u^2/c^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}\right]\frac{du}{dt}$$

$$= m_o\left[\frac{1-u^2/c^2+u^2/c^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}\right]\frac{du}{dt} = m_o\left[\frac{1}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}\right]\frac{du}{dt}$$

$$F = \frac{m_o a}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} = K^3 m_o a\,, \qquad (\vec{F} \text{ and } \vec{u} \text{ along the same line}) \qquad \dots\dots 1.33$$

$$\text{where } K = \frac{1}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} \quad \text{and} \quad a = \frac{du}{dt}$$

وسيكون تعجيل الجسم:

$$a = \frac{F}{K^3 m_o} = \frac{F}{m_o}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} \qquad \dots\dots 1.33'$$

ونستنتج من هذه المعادلة أنه حتى لو كانت القوة ثابتة المقدار فإن تعجيل الجسم سيقل بزيادة سرعته. أي عندما $(u \to c)$ فإن $(a \to 0)$، وبالتالي فإن الجسم لا يصل أبداً لسرعة الضوء.

في المعجلات الخطية (المستخدمة في الفيزياء النووية والجسيمات الأولية) تكون القوة الكلية $\vec{F}$ والسرعة $\vec{u}$ للجسيم المتعجل على نفس الخط المستقيم. ولكن بالنسبة لمعظم المسار في أكثر المعجلات الدائرية يتحرك الجسيم في حركة دائرية منتظمة بسرعة ثابتة u، وحينئذ تكون القوة والسرعة متعامدتين، لذلك لا يمكن للقوة القيام بأي شغل على الجسيم وتبقى الطاقة الحركية والسرعة ثابتتين. ولهذا فإن المقام في المعادلة 1.32 سيكون ثابتاً، أي لا يخضع للاشتقاق، وسينتج:

$$F = \frac{m_o a}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} = K m_o a\,, \qquad (\vec{F} \text{ and } \vec{u} \text{ perpendicular}) \qquad \dots\dots 1.34$$

من المعلوم أنه إذا تحرك الجسيم في دائرة فإن محصلة القوة والتعجيل يكون اتجاههما إلى الداخل على امتداد نصف القطر r، أي يكونان متوازيين، و $(a = u^2/r)$.

١-١٤: الطاقة النسبية 1-14: Relativistic Energy

تُعتبر العلاقة بين الكتلة والطاقة أشهر العلاقات التي حصل عليها آينشتاين من النظرية النسبية الخاصة. ولأجل الحصول على هذه العلاقة نفترض جسيماً يتحرك في بُعد واحد على طول المحور x. وهنالك قوة في الاتجاه x تؤدي إلى تغير زخم الجسيم وفق المعادلة 1.31. وسنفترض أن الجسيم يتسارع من السكون إلى سرعة نهائية u. وسيكون الشغل المنجَز بواسطة القوة F على الجسيم:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx \qquad \dots\dots 1.35$$

إن الشغل الذي تقوم به قوة مؤثرة على نظام متكون من جسيم واحد يساوي التغير في الطاقة الحركية للجسيم: $(W = \Delta E_k)$. وبما أننا افترضنا أن السرعة الإبتدائية للجسيم تساوي صفراً فإن طاقته الحركية الإبتدائية تساوي صفراً أيضاً، لذا فإن $(W = E_k - E_{k1} = E_k - 0 = E_k)$. أي إن جميع الشغل المنجز عليه سيكون طاقة حركية kinetic energy. ويكون الشغل W في المعادلة 1.35 مكافئاً للطاقة الحركية E_k:

$$E_k = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{dp}{dt} dx \qquad \dots\dots 1.36$$

في الفيزياء التقليدية تُعطى الطاقة الحركية لجسم كتلته m وسرعته u بالصيغة $\left(E_k = \frac{1}{2}mu^2\right)$.
ولإيجاد صيغة الطاقة الحركية وفق النظرية النسبية سنبدأ من الصيغة النسبية لقانون نيوتن الثاني (م 1.32):

$$E_k = \int_0^x \frac{dp}{dt}dx = \int_0^x \frac{d(Km_o u)}{dt}dx = \int_0^u u\, d(Km_o u)\,, \qquad \text{where } u = \frac{dx}{dt}$$

$$E_k = \int_0^u u\, d\left(\frac{m_o u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

وبالتكامل بطريقة التجزئة:

$$\int udv = uv - \int vdu\ , \quad \text{where} \quad u = u \ \ and \ \ v = \frac{m_o u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

ينتج :

$$E_k = \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o \int_0^u \frac{u\, du}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o \frac{-2/c^2}{-2/c^2}\int_0^u u(1-u^2/c^2)^{-1/2}\, du$$

$$= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{m_o}{-2/c^2}\left[\frac{(1-u^2/c^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^u$$

$$= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + m_o c^2\left[\sqrt{1-u^2/c^2}\right]_0^u = \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + m_o c^2\left(\sqrt{1-u^2/c^2} - 1\right)$$

$$= \frac{m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + m_o c^2\sqrt{1-u^2/c^2} - m_o c^2$$

$$= \frac{m_o u^2 + m_o c^2\,(1-u^2/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o c^2 = \frac{m_o u^2 + m_o c^2 - m_o u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o c^2$$

$$E_k = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_o c^2 = Km_o c^2 - m_o c^2 = (K-1)m_o c^2 \qquad \ldots\ldots 1.37$$

$$E_k = mc^2 - m_o c^2 = (m - m_o)c^2 \qquad \ldots\ldots 1.38$$

وتنص هذه النتيجة على أن الطاقة الحركية النسبية لجسم ما ستكون مساوية للفرق بين $Km_o c^2$ و $m_o c^2$، أو إن الطاقة الحركية النسبية للجسم تساوي الزيادة في كتلته نتيجة للحركة النسبية مضروبة في مربع سرعة الضوء. وبإعادة ترتيب المعادلتين 1.37 و 1.38 ينتج:

$$mc^2 = Km_o c^2 = m_o c^2 + E_k \qquad \ldots\ldots 1.39$$

إن المقدار $Km_o c^2$ الذي يعتمد على سرعة الجسم يساوي مجموع الطاقتين الحركية والسكونية، ويُدعى بالطاقة الكلية E.

$$E = E_o + E_k \qquad \ldots\ldots 1.40$$

حيث E_o : الطاقة السكونية rest energy لجسم كتلته m_o، وهي طاقة الجسم عند السكون:

$$E_o = m_o c^2 \qquad \ldots\ldots 1.41$$

وإذا كان الجسم متحركاً ستكون طاقته الكلية:

$$E = mc^2 = Km_oc^2 = KE_o = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \ldots\ldots 1.42$$

إن هذه المعادلة تشبه المعادلة 1.29 ما عدا أن الطرفين هنا قد ضربا بـ c^2. وهذا ناتج عن مبدأ تكافؤ الكتلة والطاقة. وبما أن الكتلة والطاقة كميتان غير مستقلتين عن بعض فإن مبدئي الحفظ لهما (حفظ الكتلة وحفظ الطاقة) هما في الواقع – حسب النظرية النسبية – حالتان خاصتان لمبدأ واحد هو مبدأ حفظ الكتلة والطاقة، أي إن توليد الكتلة لا بدّ أن يقابله فناء طاقة بنفس الزمان والمكان وإن توليد الطاقة يقابله فناء كتلة بنفس الزمان والمكان.

إنّ ثابت التناسب بين وحدة الكتلة kg ووحدة الطاقة J هو c^2. أي إن كيلوغرام واحداً من المادة لو تحوّل كلّه إلى طاقة فسيكون مقدارها:

$$mc^2 = 1\ kg \times (3\times10^8\ m/s)^2 = 9\times10^{16}\ J$$

وهذا يكفي لإرسال حمولة مقدارها مليون طن إلى القمر.

يُعد مبدأ حفظ الكتلة والطاقة أساسياً في توليد الطاقة النووية. فعندما تخضع نواة اليورانيوم للانشطار في مفاعل نووي يكون مجموع الكتل السكونية للشظايا الناتجة من الانشطار أقل من الكتلة السكونية للنواة الأم، وتتحرر كمية من الطاقة تساوي فرق الكتلة مضروباً بـ c^2.

عندما تكون السرعة أصغر بكثير من سرعة الضوء $(u \ll c)$ فإن الطاقة الحركية النسبية للجسم تُختزل إلى الصيغة التقليدية $(E_k = \frac{1}{2}m_ou^2)$. ويمكن التحقق من هذا باستخدام المفكوك ذي الحدين binomial expansion:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots$$

وفي حالتنا هذه فإن $(x \ll 1)$ لأن $(x = u/c)$ و $(u/c \ll 1)$. لذا فإن القوى عالية الرتبة لـ x (من الحد الثالث وما يليه) ستُهمل في المفكوك. وبالتالي فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

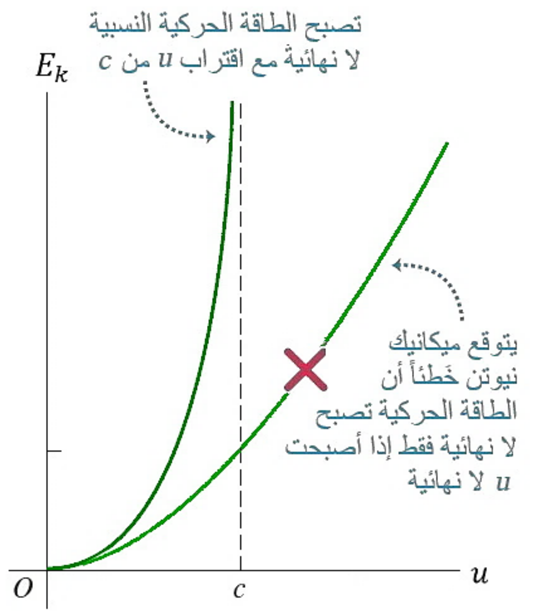
وبتعويض هذه النتيجة للمعامل K في المعادلة 1.37 سينتج:

$$E_k \approx m_o c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right)-m_o c^2$$

$$= m_o c^2 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}m_o c^2 - m_o c^2 = \frac{1}{2}m_o u^2$$

وهذا يتوافق مع النتيجة التقليدية للطاقة الحركية للجسم.

ولمعرفة الفرق بين الحالتين النسبية وغير النسبية للسرعة u كدالة للطاقة الحركية E_k يلاحَظ الشكل ١-١٥، ففي الحالة النسبية لا يمكن لسرعة الجسيم u أن تتجاوز c مهما زادت الطاقة الحركية وفق ما تم التأكد منه في تجارب معجلات الجسيمات عالية الطاقة. ويلاحظ أن المنحنَيَن في تطابق مقبول عندما $(u \ll c)$.



الشكل ١-١٥: الطاقة الحركية E_k النسبية والتقليدية لجسيم كدالة للسرعة u. ويُلاحظ أن الميكانيك التقليدي يعطي نتائج صحيحة فقط عند سرعات أقل بكثير من c.

١-١٥: العلاقة بين الطاقة والزخم 1-15: Relationship between Energy and Momentum

في العديد من الحالات يتم قياس الزخم الخطي للجسيم أو طاقته بدلاً من سرعته. ولهذا فإنه من المفيد أن تتوفر صيغة تربط بين الطاقة الكلية النسبية E والزخم الخطي النسبي p، وذلك من خلال استخدام المعادلتين $(E = Km_o c^2)$ و $(p = Km_o u)$ وتربيعهما كما يلي:

$$E = Km_o c^2 \quad \rightarrow \quad E^2 = (Km_o c^2)^2$$

$$p = Km_o u \quad \rightarrow \quad p^2 = (Km_o u)^2$$

وبضرب p^2 بـ c^2 ينتج $[p^2c^2 = (Km_o u)^2 c^2]$. وبعد الطرح من المعادلة $[E^2 = (Km_o c^2)^2]$ ينتج:

$$E^2 - p^2c^2 = (Km_o c^2)^2 - (Km_o u)^2c^2 = K^2[(m_o c^2)^2 - (m_o u)^2 c^2]$$

$$= K^2[m_o^2 c^4 - m_o^2 c^2 u^2] = m_o^2 c^4 K^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$= m_o^2 c^4\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) = m_o^2 c^4$$

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2 c^4 \qquad \ldots\ldots 1.43$$

عندما يكون الجسيم في حالة سكون فإن الطاقة الحركية تساوي صفراً وكذلك الزخم، وبالتالي فإن المعادلة 1.43 ستصبح $(E = m_o c^2)$، وهذا يعني أن الطاقة الكلية تساوي الطاقة السكونية للجسيم. وتبين

المعادلة 1.43 أيضاً أن الجسيم قد يكون لديه طاقة وزخم حتى عندما لا يكون لديه كتلة سكون ($m_o = 0$). وفي مثل هذه الحالة تصبح الطاقة الكلية:

$$E = pc \qquad \ldots\ldots 1.44$$

وهذه المعادلة هي الصيغة الدقيقة – وفق النظرية النسبية الخاصة – التي تربط بين الطاقة الكلية والزخم الخطي للفوتونات، والتي تتحرك دائماً بسرعة الضوء في الفراغ.[1]

١-١٦: الإلكترون فولت 1-16: Electronvolt

إن وحدة الطاقة المعتاد استخدامها في الفيزياء الذرية هي وحدة الكترون- فولت eV، وهي الطاقة المكتسبة بواسطة إلكترون مُعجَّل خلال فرق جهد مقداره فولت واحد، حيث ($W = qV$)،

$$1\ eV = (1.602 \times 10^{-19}\ C)(1\ V) = 1.602 \times 10^{-19}\ J$$

وكمثال، فإن الإلكترون الذي كتلته $9.11 \times 10^{-31}\ kg$ تكون طاقته السكونية بوحدة الجول هي:

$$m_e c^2 = (9.11 \times 10^{-31}\ kg)(3 \times 10^8\ m/s)^2 = 8.2 \times 10^{-14}\ J$$

ولتحويلها لوحدة إلكترون- فولت:

$$m_e c^2 = (8.2 \times 10^{-14}\ J)\left(\frac{1\ eV}{1.602 \times 10^{-19}\ J}\right) = 0.511 \times 10^6\ eV = 0.511\ MeV$$

ولأن ($m_e c^2 = 0.511\ MeV$) فإن كتلة الإلكترون ستُكتب بالصيغة ($m_e = 0.511\ MeV/c^2$).

مثال ١-١٢: تبلغ سرعة إلكترون $0.85c$. جد طاقته الكلية وطاقته الحركية بوحدة إلكترون- فولت.

الحل: بملاحظة حقيقة أن الطاقة السكونية للإلكترون هي $0.511\ MeV$ وأن ($E = K m_o c^2$) فإنه:

$$E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{0.511\ MeV}{\sqrt{1 - (0.85c)^2/c^2}} = 0.97\ MeV$$

ويتم الحصول على الطاقة الحركية بطرح الطاقة السكونية من الطاقة الكلية:

$$E_k = E - m_e c^2 = 0.97\ MeV - 0.511\ MeV = 0.459\ MeV$$

١) هل هناك جسيمات غير الفوتونات لها كتلة سكون صفرية؟

أسئلـة

١- إذا تحرك جسيم على محور y بسرعة ثابتة $0.8c$ بالنسبة لإطار إسناد يتحرك بتعجيل. فهل يمكن تطبيق قوانين النظرية النسبية الخاصة عليه من قبل مراقب في الإطار المتعجل؟ ولماذا؟

٢- إلى أي مدى تكون تحويلات غاليليو صحيحة؟ وما هي التحويلات التي عالجت هذا النقص؟

٣- لماذا تم تكرار تجربة مايكلسون- مورلي في مناطق مختلفة وفي فصول مختلفة من السنة وفي أوقات مختلفة من اليوم؟ وهل غيّر هذا من نتائج التجربة؟ ولماذا؟

٤- لو انطلق رائد فضاء بمركبته بسرعة قريبة من سرعة الضوء، هل ستكون سرعة نبضات قلبه وفق المعدل الطبيعي بالنسبة لساعة داخل المركبة الفضائية أم لا؟ ولماذا؟

٥- لماذا تم تحديد السرعة $0.1c$ بأنها الفاصلة بين السرع النسبية وغير النسبية؟ وهل هي فاصلة دقيقة أم تقريبية؟

٦- إذا كان هنالك إطار إسناد قصوري يتحرك نسبة لمحور ثابت بسرعة v وكانت قيمة معامل لورنتز K قريبة من 1 فإن السرعة v مقارنة بسرعة الضوء c ستكون:

(a) $v = c$, (b) $v > c$, (c) $v \ll c$, (d) $v \to c$.

٧- اشتق العلاقة 1.21: $\left(L = L_o\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$ بدون استعمال تحويلات لورنتز، وارسم الأشكال التوضيحية اللازمة.

٨- اشتق العلاقة 1.24: $\left(\Delta t' = \Delta t/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}\right)$ بدون استعمال تحويلات لورنتز، وارسم الأشكال التوضيحية اللازمة.

٩- مسطرة مترية تتحرك بسرعة $0.6c$ باتجاه يصنع زاوية $90°$ مع طولها. ما مقدار طولها حينئذ بالنسبة لمراقب ثابت؟

(a) $0.8\ m$, (b) $1\ m$, (c) $1.2\ m$, (d) $0\ m$.

١٠- افترض أن كتلة رائد فضاء على الأرض $75\ Kg$. وعندما انطلق في سفينة فضائية أصبحت كتلته $77\ Kg$ وفق حسابات مشاهد على الأرض، فما مقدار سرعة السفينة الفضائية؟

(a) $0.228c$, (b) $0.052c$, (c) $0.948c$, (d) $0.628c$.

١١- وقع حدث على الأرض، واستمر مدة عشرين ثانية بالنسبة لمراقب على الأرض. ما هي الفترة الزمنية التي يسجلها لنفس الحدث مراقب يتحرك مبتعداً بسرعة منتظمة مقدارها $0.7c$ بالنسبة للأرض؟

(a) $2.8\ sec$, (b) $28\ sec$, (c) $0.28\ min$, (d) $2.8\ min$.

١٢- وفق فرضيات آينشتاين في النسبية الخاصة، إذا كانت السرعة بالنسبة لمراقب في المنظومة الثابتة S مساوية لسرعة الضوء c فإنها ستساوي .... بالنسبة لمراقب في المنظومة المتحركة S'.

١٣- لا يمكن أن يكون معامل لورنتز K أصغر من ....

١٤- لو ابتعد جسم بسرعة الضوء فإن طوله سيكون .... بالنسبة للمراقب الثابت.

١٥- جسم زخمه p وكتلته m، أثبت أن سرعته هي $\left(u = c/\sqrt{1 + (mc/p)^2}\right)$.

١٦- هل لسرعة الإلكترون حد أعلى لا يمكن الوصول إليه؟

(أ) نعم، سرعة الضوء c، (ب) نعم، قيمة أخرى غير c، (ج) كلا.

١٧- هل لزخم الإلكترون حد أعلى لا يمكن الوصول إليه؟ (استفد من الشكل ١-١٤).

(أ) نعم، $m_e c$، (ب) نعم، قيمة أخرى غير $m_e c$ ، (ج) كلا.

١٨- هل للطاقة الحركية للإلكترون حد أعلى لا يمكن الوصول إليه؟ (استفد من الشكل ١-١٥).

(أ) نعم، $m_e c^2$، (ب) نعم، $\frac{1}{2} m_e c^2$، (ج) نعم، قيمة أخرى، (د) كلا.

١٩- ما الذي سيتغير إذا كنت تنظر لمرآة تحملها بين يديك وانطلقتَ بسرعة قريبة من سرعة الضوء؟ ولماذا؟

٢٠- ثلاثة جسيمات نذكر فيما يلي لكل منها طاقتَين، الأولى تمثل الطاقة السكونية والثانية تمثل الطاقة الكلية:

$1)\ E, 2E\ ;\quad 2)\ E, 3E\ ;\quad 3)\ 2E, 4E.$

رتب هذه الجسيمات من الأكبر إلى الأصغر حسب (أ) الكتلة السكونية، (ب) الطاقة الحركية، (ج) السرعة.

٢١- تتجه مركبة فضائية بسرعة v بعيداً عن مراقب أرضي. أي العبارات التالية صحيحة - وفق مفاهيم النسبية- حول السرعة المقاسة لشعاع الضوء الصادر عن الجهة الأمامية للمركبة؟ (قد يوجد أكثر من عبارة واحدة صحيحة).

(أ) يقيسها المراقب الأرضي بأنها $(c+v)$، (ب) يقيسها قائد المركبة بأنها $(c+v)$،

(ج) يقيسها المراقب الأرضي بأنها c، (د) يقيسها قائد المركبة بأنها c،

(هـ) يقيسها المراقب الأرضي بأنها $(c-v)$، (و) يقيسها قائد المركبة بأنها $(c-v)$.

٢٢- مركبة فضائية تبتعد عن الأرض بسرعة ثابتة. وخلال هذا يرصد مراقب على الأرض ساعةً ميكانيكية على المركبة الفضائية تدق بمعدل ثُلُث دقات ساعة مماثلة على الأرض. ما الذي يقيسه مراقب على المركبة الفضائية حول معدل دقات الساعة الأرضية؟

(أ) تعمل أسرع من ساعته بأكثر من ثلاث مرات، (ب) تعمل أسرع من ساعته بثلاث مرات،

(ج) تعمل بنفس معدل ساعته، (د) تعمل بمقدار ثُلث معدل ساعته،

(هـ) تعمل بأقل من ثُلث معدل ساعته.

٢٣- أي من العبارات التالية تمثل افتراضاً أساسياً في النظرية النسبية الخاصة؟ (قد يوجد أكثر من عبارة واحدة صحيحة).

(أ) يتحرك الضوء عبر مادة تسمى الأثير،

(ب) تعتمد سرعة الضوء على إطار الإسناد القصوري الذي يتم قياسها فيه،

(ج) تعتمد قوانين الفيزياء على إطار الإسناد القصوري الذي تستخدم فيه،

(د) قوانين الفيزياء هي نفسها في جميع أطر الإسناد القصورية،

(هـ) سرعة الضوء لا تعتمد على إطار الإسناد القصوري الذي تقاس فيه.

٢٤- تسافر رائدة فضاء في مركبة فضائية في الفضاء الخارجي باتجاه مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها نصف سرعة الضوء. أي من التأثيرات التالية قد تواجهها؟

(أ) ستشعر بأنها أثقل، (ب) سوف تجد صعوبة في التنفس،

(ج) سيتغير معدل ضربات قلبها، (د) ستكون بعض أبعاد مركبتها الفضائية أقصر،

(هـ) كل هذه الإجابات صحيحة. (و) كل هذه الإجابات غير صحيحة.

٢٥- (أ) يحدث في الإطار S في الشكل ١-١ حدثان: P_1 و P_2 في نفس الإحداثيات x, y, z، ولكن الحدث P_1 يقع قبل الحدث P_2. أي حدث يبدو أولاً في الإطار S' ولماذا؟

(ب) في الإطار S يقع حدثان: P_3 و P_4 في نفس الوقت t في نفس الإحداثيين y و z، ولكن الحدث P_3 يقع في إحداثي x الموجب الأقل إيجابية من الحدث P_4. أي حدث يبدو أولاً في الإطار S' ولماذا؟

مسائل محلولة

(١) لو وقع حدثان في نفس الوقت بالنسبة لمراقب على الأرض في الموضعين $(6\times10^4\ m,0,0)$ و $(9\times10^4\ m,0,0)$، فما هي الفترة الزمنية بين الحدثين التي يقيسها مراقب مبتعد عن الأرض بسرعة $0.7c$؟

الحل : من المعادلة 1.23،

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = K(t_2 - t_1) - K\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

$$\Delta t' = \left|-K\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{1-(0.7c)^2/c^2}}\frac{0.7c}{c^2}(9\times10^4 - 6\times10^4)\right|$$

$$= 9.8\times10^{-5}\ sec$$

(٢) لاحظ مراقب في المنظومة S' المبتعدة على امتداد محور xx' بسرعة منتظمة مقدارها $0.8c$ بالنسبة للمنظومة S توهجاً في الموضع (0,0,0) من منظومته S'، وبعد 24 ثانية لاحظ توهجاً في الموضع $(9\times10^8\ m,0,0)$. ما هي الفترة الزمنية بين التوهجين بالنسبة لمراقب في المنظومة S ؟

الحل :

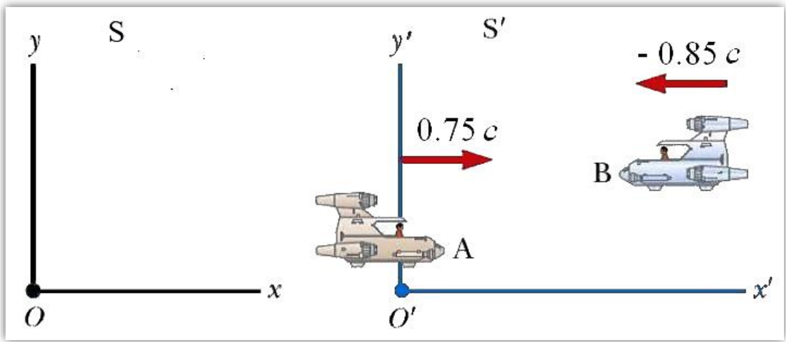
$$\Delta t' = 24\,\text{sec},\quad x_1' = 0,\quad x_2' = 9\times10^8\ m$$

من المعادلة 1.18b :

$$\Delta t = K\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(0.8\,c)^2/c^2}}\left(24\ sec + \frac{0.8c}{c^2}\times 9\times10^8\ m\right) = 44\ sec$$

(٣) مركبتان فضائيتان A و B تتحركان باتجاهين متعاكسين، وهنالك مراقب على الأرض يقيس سرعتي المركبتين الفضائيتين فيجد أن سرعة المركبة A تساوي $0.75c$ وسرعة المركبة B تساوي $0.85c$. جد مقدار سرعة المركبة B كما يقيسها ركاب المركبة A.



الحل: يمكن حل هذه المسألة بأخذ S' كإطار إسناد للمركبة A. ولهذا فإن $(v=0.75c)$ نسبة للمراقب على الأرض (محور S). ويمكن اعتبار المركبة B كجسم يتحرك باتجاه $(-x)$ بسرعة $(u=-0.85c)$ نسبة للمراقب الأرضي. ولهذا فإن سرعة B نسبة لـ A يمكن معرفتها باستخدام المعادلة $1.28'$،

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{vu}{c^2}} = \frac{-0.85c - 0.75c}{1-\frac{(0.75c)(-0.85c)}{c^2}} = -0.9771c$$

وتشير الإشارة السالبة إلى أن المركبة الفضائية B تتحرك باتجاه $(-x')$ وفق قياس ركاب المركبة A.

(٤) تتحرك المركبة الفضائية α بسرعة $0.9c$ نسبة للأرض، وأرادت المركبة الفضائية β أن تتجاوزها بسرعة نسبية مقدارها $0.5c$ بنفس الاتجاه. ماهي السرعة التي يجب أن تسير بها β بالنسبة للأرض؟

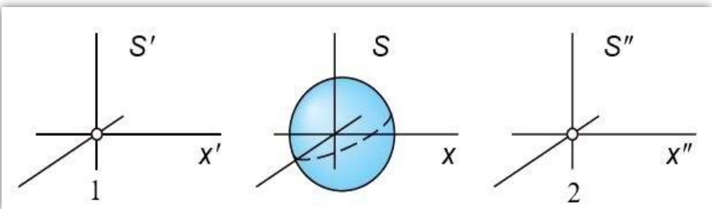
الحل: وفق تحويلات غاليليو ستحتاج β سرعة مقدارها $(0.9c + 0.5c = 1.4c)$ نسبة للأرض، وهذا مستحيل حسب مفاهيم النظرية النسبية الخاصة. لذا فوفق المعادلة 1.28 والقيمتين $(u' = 0.5c)$ و $(v = 0.9c)$ ستكون السرعة المطلوبة:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} = \frac{0.5c + 0.9c}{1 + \frac{(0.9c)(0.5c)}{c^2}} = 0.965c$$

وهذه السرعة أقل من سرعة الضوء c.

(٥) افترض أن اثنين من بروتونات الأشعة الكونية يقتربان من الأرض من اتجاهين متعاكسين كما في الشكل المرفق. وقد قيست سرعتاهما نسبة للأرض فكانتا $(v_1 = 0.6c)$ و $(v_2 = -0.8c)$. ما هي سرعة الأرض نسبة لكل بروتون؟ وما هي سرعة كل بروتون بالنسبة إلى الآخر؟

الحل: نفترض أن البروتون الأول والثاني والأرض هي أُطُر إسناد قصورية S' و S'' و S على التوالي، والمحاور السينية x لها متوازية كما في الشكل المجاور. وبهذا الترتيب سيكون $(v_1 = u_1 = 0.6c)$ و $(v_2 = u_2 = -0.8c)$. ولهذا فإن سرعة الأرض المقاسة في المحور S' (محور البروتون 1) هي $(v'_E = -0.6c)$ وتكون سرعة الأرض المقاسة في المحور S'' (محور البروتون 2) هي $(v''_E = 0.8c)$.



ولإيجاد سرعة البروتون 2 نسبة للبروتون 1 نطبق العلاقة:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}} \quad \rightarrow \quad u'_2 = \frac{u_2 - u_1}{1 - \frac{u_2 u_1}{c^2}} = \frac{(-0.8c) - (0.6c)}{1 - \frac{(-0.8c)(0.6c)}{c^2}} = -0.95c$$

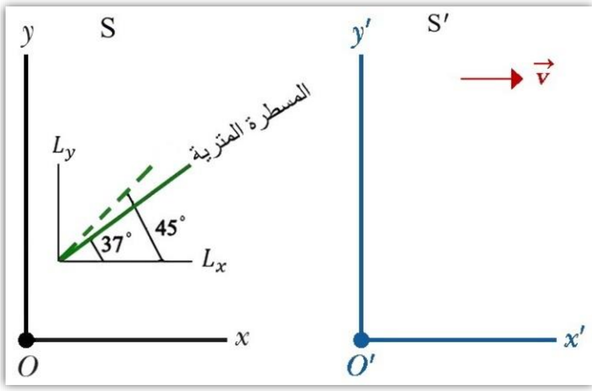
وتعني الإشارة السالبة في الناتج أن البروتون 2 يقترب بالنسبة للبروتون 1 ويتحرك بالاتجاه $(-x)$.

وستكون سرعة البروتون 1 نسبة للبروتون 2، أي كما يرصدها مراقب في المحور S'' هي $0.95c$.

ويمكن التحقق من هذا بتطبيق المعادلة السابقة كما يلي:

$$u'_1 = \frac{u_1 - u_2}{1 - \frac{u_1 u_2}{c^2}} = \frac{(0.6c) - (-0.8c)}{1 - \frac{(0.6c)(-0.8c)}{c^2}} = 0.95c$$

(٦) مسطرة مترية موجودة في المنظومة S تصنع زاوية مقدارها $37°$ مع المحور x كما في الشكل المرفق. كم يجب أن تكون سرعة مراقب في المنظومة S' وهو مبتعد بالاتجاه الموجب لمحور x كي تظهر له زاوية ميل المسطرة مساوية لـ $45°$؟ وما هو طول المسطرة الذي يقيسه هذا المراقب؟



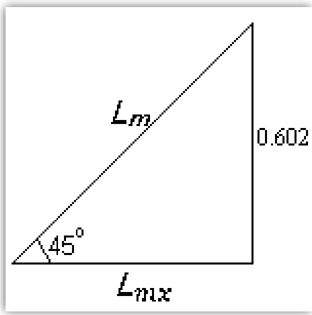
الحل: طول المسطرة في المنظومة S: $L = 1m$

الطول باتجاه x في حالة السكون:

$$L_x = 1 \cos 37 = 0.798\ m$$

الطول باتجاه y في حالة السكون: $L_y = 1\sin 37 = 0.602\ m$

الطول L_y لا يتغير لأنه عمودي على اتجاه الحركة.



$$\tan 45 = \frac{0.602}{L_{mx}} = 1 \quad \rightarrow \quad L_{mx} = 0.602\ m$$

$$L_{mx} = L_x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left(\frac{L_{mx}}{L_x}\right)^2 = \left(\frac{0.602}{0.798}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \rightarrow \quad v = 0.66c$$

طول المسطرة بالنسبة للمراقب المتحرك:

$$\sin 45 = \frac{L_y}{L_m} = \frac{0.602\ m}{L_m} \quad \rightarrow \quad L_m = \frac{0.602\ m}{0.707} = 0.851\ m$$

(٧) عصا طولها الحقيقي متر واحد تتحرك مبتعدة باتجاه طولها بسرعة v بالنسبة لك. احسب هذه السرعة إذا أصبح طول العصا $0.914\ m$ كما تقيسه أنت.

الحل :

$$L = L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \rightarrow \quad 0.914 = 1 \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \rightarrow \quad (0.914)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - 0.835 = 0.165 \quad \rightarrow \quad v^2 = 0.165c^2 \quad \rightarrow \quad v = 0.406c$$

(٨) مكعب يتحرك بسرعة نسبية منتظمة v باتجاه أحد أضلاعه. أثبت أن حجمه V وكثافته ρ تُعطى بالعلاقتين:

$$V = V_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)} \quad , \quad \rho = \rho_o/\left(1 - (v^2/c^2)\right)$$

الحل: نفترض أن طول ضلع المكعب هو L_o. لذا فإن حجمه سيكون: $(V_o = L_o^3)$

وفي حالة الحركة فإن الضلع الذي يكون باتجاه الحركة يأخذ الصيغة: $L_x = L_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$

أما الضلعان الآخران فلا يتغيران ويبقى طول كل منهما L_o. لذا فحجم المكعب المتحرك يكون:

$$V = L_x L_o^2 = L_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}\, L_o^2 = L_o^3\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = V_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

وكثافة المكعب في حالة السكون ستساوي: $(\rho_o = m_o/V_o)$، وفي حالة الحركة: $(\rho = m/V)$،

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad , \quad V = V_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

$$\rho = \left(\frac{m_o}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\right)\left(\frac{1}{V_o\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\right) = \frac{m_o}{V_o\left(1 - (v^2/c^2)\right)} = \frac{\rho_o}{1 - (v^2/c^2)}$$

(٩) صاروخ طوله على الأرض $10\ m$. جد مقدار النقص في طوله أثناء الابتعاد بسرعة $0.6c$ بالنسبة لمراقب على الأرض. ثم جد الوقت الذي يجب أن يمضي ليكون الفرق بين الزمن في الصاروخ والزمن على الأرض ثانية واحدة.

الحل :

$$L = L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10\sqrt{1 - \frac{(0.6c)^2}{c^2}} = 8\ m$$

النقص في الطول : $L_o - L = 10 - 8 = 2\ m$

فرق الزمن : $\Delta t' - \Delta t = 1\ sec \quad \rightarrow \quad \Delta t' = \Delta t + 1$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \quad \text{or} \quad \Delta t = \Delta t' \sqrt{1-(v^2/c^2)}$$

$$\Delta t = (\Delta t + 1)\sqrt{1-(v^2/c^2)} = (\Delta t + 1)\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}} = (\Delta t + 1)(0.8)$$

$$\Delta t = 0.8\,\Delta t + 0.8 \quad \rightarrow \quad 0.2\,\Delta t = 0.8 \quad \rightarrow \quad \Delta t = 4\ sec$$

$$\Delta t' = 4 + 1 = 5\ sec \quad or \quad \Delta t' - \Delta t = 5 - 4 = 1\ sec$$

(١٠) ما هو طول المسطرة المترية الذي يقيسه مراقب ساكن أثناء ابتعادها عنه باتجاه طولها بسرعة منتظمة بحيث تكون كتلتها مساوية لضعف كتلتها السكونية حسب ما يقيسه المراقب الساكن؟

الحل :

$$m = 2m_o = \frac{m_o}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \quad \rightarrow \quad 1 - v^2/c^2 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad v^2/c^2 = 0.75$$

$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1\ m\sqrt{1-0.75} = 0.5\ m$$

(١١) إلكترون طاقته الحركية $100\ MeV$ يتحرك على امتداد محور أنبوب مُفرّغ طوله $4\ m$ مثبت في مختبر. (أ) ما هو طول الأنبوب وفق ما يقيسه مراقب يتحرك مع الإلكترون؟ (ب) ما هي سرعة الإلكترون المبتعد بالنسبة لراصد ساكن خارج الأنبوب؟ (ج) ما هو الزمن الذي يستغرقه الإلكترون بين حافتي الأنبوب؟ (الطاقة السكونية للإلكترون $0.51\ MeV$).

الحل : (أ)

$$E = E_o + E_k = 0.51 + 100 = 100.51\ MeV$$

$$E = mc^2 = Km_oc^2 = KE_o \quad \rightarrow \quad K = \frac{E}{E_o} = \frac{100.51}{0.51} = 197$$

$$L = \frac{L_o}{K} = \frac{4\ m}{197} \approx 0.02\ m = 2\ cm$$

$$\Delta t' = K\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

(ب)

$$K = 197 = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \quad \rightarrow \quad 38809 = \frac{1}{1-(v^2/c^2)}$$

$$1-(v^2/c^2) = \frac{1}{38809} = 2.576 \times 10^{-5}$$

$$v^2/c^2 = 1 - 2.576 \times 10^{-5} = 0.99997424 \quad \rightarrow \quad v = 0.999987119c$$

(١٢) أثبت أن مشتقة الطاقة الكلية بالنسبة للزخم تساوي السرعة النسبية ($dE/dp = u$).

الحل :

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

بأخذ مشتقة طرفي المعادلة:

$$2EdE = 2c^2pdp + 0 \quad \rightarrow \quad 2E\frac{dE}{dp} = 2c^2p \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dp} = \frac{c^2p}{E}$$

$$E = mc^2 \quad \text{and} \quad p = mu \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dp} = \frac{c^2mu}{mc^2} = u$$

(١٣) احسب فرق الجهد المطلوب لتعجيل إلكترون من السكون إلى سرعة $0.6c$.

الحل :

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 1.25$$

الطاقة المكتسبة بواسطة الإلكترون:

$$E_k = E - E_o = mc^2 - m_oc^2 = Km_oc^2 - m_oc^2 = (K-1)m_oc^2$$

$$= (1.25 - 1) \times 0.51\ MeV = 0.1275\ MeV$$

وبما أن $1eV$ يمثل الطاقة المكتسبة عندما يتعجل إلكترون من السكون خلال فرق جهد مقداره فولت واحد، فلهذا يكون فرق الجهد المطلوب في السؤال هو $0.1275\ MV$ أو $127.5\ kV$.

ويمكن أيضاً معرفة الجهد من العلاقة ($E_k = qV$):

$$V = \frac{E_k}{q} = \frac{0.1275\ MeV}{e} = 0.1275\ MV$$

(١٤) (أ) جد الطاقة السكونية للإلكترون بوحدة الجول ووحدة إلكترون- فولت.

(ب) احسب سرعة الإلكترون المنبعث من الكاثود إلى الأنود عند فرق جهد $120\ kV$.

الحل: (أ) الطاقة السكونية للإلكترون

$$E_o = m_ec^2$$

$$= (9.109 \times 10^{-31}\ kg)(2.998 \times 10^8\ m/s)^2 = 8.187 \times 10^{-14}\ J$$

بما أن ($1\ eV = 1.602 \times 10^{-19}\ J$) فإنه:

$$E_o = (8.187 \times 10^{-14}\ J)\frac{1\ eV}{1.602 \times 10^{-19}\ J} = 5.11 \times 10^5\ eV = 0.511\ MeV$$

(ب)

$$E_k = qV = (1.6 \times 10^{-19}\ C)(120000\ V) = 1.92 \times 10^{-14}\ J$$

$$= (1.92 \times 10^{-14}\ J)\left(\frac{1\ eV}{1.602 \times 10^{-19}\ J}\right) = 1.2 \times 10^5\ eV = 0.12\ MeV$$

$$E = E_o + E_k = m_oc^2 + E_k = 0.511\ MeV + 0.12\ MeV = 0.631\ MeV$$

$$E = mc^2 = Km_oc^2 = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{0.511\ MeV}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 0.631\ MeV$$

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{0.511\ MeV}{0.631\ MeV}\right)^2 = 0.656 \quad \rightarrow \quad \frac{u^2}{c^2} = 1 - 0.656 = 0.344 \quad \rightarrow \quad u = 0.58c$$

(١٥) يبلغ متوسط عمر الميونات عند السكون $(2.2 \times 10^{-6}\ s)$. أما متوسط عمرها المقاس في المختبر فيبلغ $(6.6 \times 10^{-6}\ s)$. جد: (أ) كتلتها النسبية عند هذه السرعة في المختبر إذا علمت أن كتلتها السكونية تبلغ $207m_e$، (ب) طاقتها الحركية بوحدة eV، (ج) زخمها.

الحل: (أ)

$$m = Km_o$$

$$\Delta t' = K\Delta t \quad \rightarrow \quad K = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{6.6 \times 10^{-6}\ s}{2.2 \times 10^{-6}\ s} = 3$$

$$m = 3 \times 207m_e = 621m_e$$

(ب)

$$E_k = Km_oc^2 - m_oc^2 = (K-1)m_oc^2$$

$$= (3-1)(207 \times 0.511\ MeV/c^2)c^2 = 211.5\ MeV$$

(ج) لغرض إيجاد الزخم نحتاج معرفة الطاقة الكلية E

$$E = mc^2 = 621m_ec^2 = 621(0.511\ MeV/c^2)c^2 = 317.3\ MeV$$

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

$$(317.3\ MeV)^2 = p^2c^2 + (207 \times 0.511\ MeV/c^2)^2c^4 = p^2c^2 + (105.7\ MeV)^2$$

$$p^2c^2 = (317.3\ MeV)^2 - (105.7\ MeV)^2 = 89506.8\ (MeV)^2$$

$$P \approx 299\ MeV/c$$

(١٦) (أ) كم تنقص كتلة جزيئة ماء عن مجموع كتل ذرتي هيدروجين وذرة أوكسجين؟ علماً أن طاقة الترابط للماء هي حوالي $3\ eV$، (ب) جد نسبة نقصان الكتلة لكل غرام من الماء المتشكل، (ج) جد الطاقة الكلية المتحررة عندما يتشكل غرام واحد من الماء.

الحل : (أ)

$$\Delta m = (m_H + m_H + m_O) - M_{H_2O} = \frac{E_B}{c^2} = \frac{3\ eV}{c^2}$$

$$= \frac{(3\ eV)(1.6 \times 10^{-19}\ J/eV)}{(3 \times 10^8\ m/s)^2} = 5.3 \times 10^{-36}\ kg$$

(ب) لإيجاد النقص الجزئي للكتلة لكل جزيئة نقسم Δm على كتلة جزيئة الماء،

$$M_{H_2O} = 18\ \text{u} = 3 \times 10^{-26}\ kg, \quad \text{where u is atomic mass unit} = 1.6605 \times 10^{-27}\ kg$$

$$\frac{\Delta m}{M_{H_2O}} = \frac{5.3 \times 10^{-36}\ kg}{3 \times 10^{-26}\ kg} = 1.8 \times 10^{-10}$$

سيتم فقدان $1.8 \times 10^{-10}\ g$ من الكتلة لكل غرام من الماء المتشكل، لأن نسبة نقص الكتلة لكل جزيئة هو نفس نسبة النقص لكل غرام من الماء المتشكل.

(ج) إن الطاقة المتحررة عندما يتشكل غرام واحد من الماء هي مقدار النقص في الكتلة مضروباً بـ c^2:

$$E = \Delta mc^2 = (1.8 \times 10^{-13}\ kg)(3 \times 10^8\ m/s)^2 = 16200\ J = 16.2\ kJ$$

(١٧) تبلغ الطاقة الكلية لبروتون ثلاث مرات بقدر طاقته السكونية.

(أ) جد طاقة البروتون السكونية بوحدة إلكترون- فولت.

الحل:

$$E_o = m_pc^2 = (1.67 \times 10^{-27}\ kg)(3 \times 10^8\ m/s)^2 = 1.5 \times 10^{-10}\ J$$

$$= (1.5 \times 10^{-10}\ J)\left(\frac{1\ eV}{1.6 \times 10^{-19}\ J}\right) = 938\ MeV$$

(ب) ما هي سرعة البروتون؟

الحل: بسبب أن الطاقة الكلية لهذا البروتون تعادل طاقته السكونية ثلاث مرات فإنه: $E = 3m_pc^2$

$$E = Km_pc^2 \quad \rightarrow \quad K = 3 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 3$$

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{9} \quad \text{or} \quad \frac{u^2}{c^2} = \frac{8}{9} \quad \rightarrow \quad u = \frac{\sqrt{8}}{3}c = 0.943c = 2.83 \times 10^8\ m/s$$

(ج) احسب الطاقة الحركية للبروتون بوحدة إلكترون- فولت.

الحل:

$$E_k = E - m_pc^2 = 3m_pc^2 - m_pc^2 = 2m_pc^2$$

$$E_k = 2 \times 938\ MeV = 1876\ MeV = 1.876\ GeV \qquad \text{where} \quad m_pc^2 = 938\ MeV$$

(د) احسب زخم البروتون.

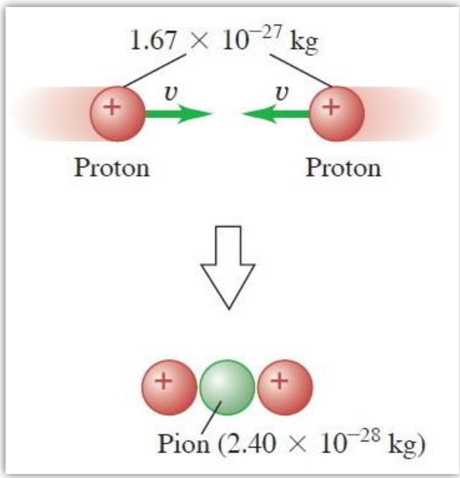
الحل: يمكن استخدام المعادلة 1.43 لحساب الزخم مع $(E = 3m_pc^2)$:

$$E^2 = (3m_pc^2)^2 = p^2c^2 + m_p^2c^4$$

$$p^2c^2 = 9(m_pc^2)^2 - (m_pc^2)^2 = 8(m_pc^2)^2 \quad \rightarrow \quad pc = \sqrt{8}\, m_pc^2$$

$$p = \sqrt{8}\ m_pc^2/c = \sqrt{8}(938\ MeV)/c = 2653\ MeV/c = 2.653\ GeV/c$$

(١٨) تحرك بروتونان (كتلة كل منهما: $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$) بسرعتين نسبيتين متساويتين في اتجاهين متعاكسين حتى تصادما رأساً برأس ولم يفنيا بل بقيا، ونتج عن التصادم بايون pion متعادل كتلته $(m_\pi = 2.4 \times 10^{-28}\ kg)$ كما في الشكل المجاور، وكانت الجسيمات الثلاثة في حالة سكون بعد التصادم والطاقة محفوظة خلاله. (أ) جد السرعة الابتدائية لكل بروتون، (ب) أثبت أن الطاقة الحركية للبروتونين قد تحولت كلها إلى كتلة سكونية للبايون الوليد.



الحل: (أ) بما أن الطاقة الكلية النسبية في التصادم محفوظة فيمكن مساواة الطاقة الكلية (غير المعروفة) للبروتونين قبل التصادم بالطاقات السكونية المتجمعة للبروتونين والبايون بعد التصادم، ثم نجد سرعة كل بروتون كما يلي:

$$2(Km_pc^2) = 2(m_pc^2) + m_\pi c^2$$

حيث Km_pc^2 هي الطاقة الكلية لكل بروتون قبل التصادم. وبعد تقسيم طرفي المعادلة على $2m_pc^2$ ينتج:

$$K = 1 + \frac{m_\pi}{2m_p} = 1 + \frac{2.4 \times 10^{-28}\ kg}{2(1.67 \times 10^{-27}\ kg)} = 1.072$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad \rightarrow \quad v = c\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2}\right)} = c\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1.072^2}\right)} = 0.36c$$

(ب) الطاقة السكونية للبروتون تبلغ $938\ MeV$، لذا فالطاقة الحركية الابتدائية لكل بروتون ستكون وفق المعادلة 1.37:

$$E_k = (K - 1)m_pc^2 = 0.072m_pc^2 = (0.072)(938\ MeV) = 67.5\ MeV$$

أي إن الطاقة الحركية لكلا البروتونين قبل التصادم تساوي ($2 \times 67.5\ MeV = 135\ MeV$). وبسبب تحول كل الطاقة الحركية للبروتونين في هذا التصادم المرن إلى طاقة سكونية للبايون، أي تحول الطاقة إلى كتلة هي البايون، فيجب أن تساوي الطاقة السكونية للبايون $135\ MeV$ أيضاً،

$$E_\pi = m_\pi c^2 = (2.4 \times 10^{-28}\ kg)(3 \times 10^8\ m/s)^2 = 2.16 \times 10^{-11}\ J$$

$$E_\pi = (2.16 \times 10^{-11}\ J)\frac{1\ eV}{1.6 \times 10^{-19}\ J} = 135\ MeV$$

(١٩) لو تم إرسال مسبار كوكبي كتلته خمسون طناً نحو بلوتو بسرعة $0.8c$، فما هو زخمه المقاس من قبل وحدة مراقبة البعثة على الأرض؟ ولو تم تخفيض سرعة المسبار إلى $0.4c$ لغرض التمهيد للهبوط على بلوتو، فإلى أي مدى سيتغير زخمه مقارنة بالزخم الأول؟

الحل: بافتراض أن المسبار يسير بخط مستقيم نحو بلوتو، فإن زخمه على امتداد هذا الاتجاه عندما يسير بسرعة $0.8c$ يُعطى بالعلاقة:

$$p = mu = \frac{m_o u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{(50000\ kg)(0.8)(3 \times 10^8\ m/s)}{\sqrt{1 - (0.8\ c)^2/c^2}} = 2 \times 10^{13}\ kg.m/s$$

وسيكون زخمه عندما تنخفض سرعته إلى $0.4c$:

$$p = \frac{(50000\ kg)(0.4)(3 \times 10^8\ m/s)}{\sqrt{1 - (0.4\ c)^2/c^2}} = 6.546 \times 10^{12}\ kg.m/s$$

$$\frac{p_{0.8c}}{p_{0.4c}} = \frac{2 \times 10^{13}\ kg.m/s}{6.546 \times 10^{12}\ kg.m/s} \approx 3$$

وهذا يعني أنه عندما انخفضت السرعة بمقدار النصف فإن الزخم الخطي النسبي قد انخفض ثلاث مرات.

(٢٠) قيست الطاقة الكلية لإلكترون مُنتَج في تفاعل نووي معين فكانت $2.4\ MeV$. جد زخم وسرعة الإلكترون في إطار إسناد المختبر.

(الكتلة السكونية للإلكترون: ($9.11 \times 10^{-31}\ kg$) وطاقته السكونية: $0.511\ MeV$).

الحل:

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

$$pc = \sqrt{E^2 - (m_oc^2)^2} = \sqrt{(2.4\ MeV)^2 - (0.511\ MeV)^2} = 2.34\ MeV$$

$$p = 2.34\ MeV/c = 2.34 \times \frac{1.6 \times 10^{-13}\ J}{3 \times 10^8\ m/s} = 1.25 \times 10^{-21}\ kg.m/s$$

ويمكن استخراج سرعة الجسيم بقسمة المعادلة ($p = Km_o u$) على المعادلة ($E = Km_oc^2$) فينتج:

$$\frac{p}{E} = \frac{u}{c^2} \quad \rightarrow \quad \frac{u}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{2.34\ MeV}{2.4\ MeV} = 0.975 \quad \rightarrow \quad u = 0.975c$$

(٢١) إلكترون كتلته $0.511\ MeV/c^2$ وفوتون كتلته صفر، وكان لكل منهما زخم مقداره $2\ MeV/c$. جد الطاقة الكلية لكل منهما.

الحل: تُحسب طاقة الإلكترون الكلية من المعادلة 1.43 كما يلي:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} = \sqrt{(2\ MeV/c)^2c^2 + (0.511\ MeV/c^2)^2c^4}$$

$$E = \sqrt{(2\ MeV)^2 + (0.511\ MeV)^2} = 2.064\ MeV$$

وتُحسب طاقة الفوتون الكلية من المعادلة 1.44 كما يلي:

$$E = pc = (2\ MeV/c)c = 2\ MeV$$

(٢٢) تصل طاقة الشمس إلى الأرض بمعدل يقارب $1.4\ kW$ لكل متر مربع من سطح عمودي على اتجاه الشمس. ما مقدار نقصان كتلة الشمس في الثانية الواحدة بسبب فقدان الطاقة هذا؟ مع العلم أن معدل نصف قطر مدار الأرض حول الشمس هو $(1.5 \times 10^{11}\ m)$.

الحل: المساحة السطحية لكرة نصف قطرها r هي: $(A = 4\pi r^2)$. والقدرة الكلية التي تشعّها الشمس، والتي تساوي القدرة التي تتلقاها كرة نصف قطرها بقدر نصف قطر مدار الأرض حول الشمس، ستساوي:

$$P = \frac{P}{A}A = \frac{P}{A}(4\pi r^2) = (1.4 \times 10^3\ W/m^2)(4\pi)(1.5 \times 10^{11}\ m)^2 = 3.96 \times 10^{26}\ W$$

ولهذا فإن الشمس تفقد $(3.96 \times 10^{26}\ J)$ من طاقتها السكونية في كل ثانية. وهذا يعني أن كتلة السكون للشمس تقل بالمقدار التالي في كل ثانية:

$$m_o = \frac{E_o}{c^2} = \frac{3.96 \times 10^{26}\ J}{(3 \times 10^8\ m/s)^2} = 4.4 \times 10^9\ kg$$

وبما أن كتلة الشمس تبلغ $(2 \times 10^{30}\ kg)$ فلا تنفد كتلة الشمس لمليارات السنين وفق هذا المعدل[1].

(٢٣) انشطر جسم ساكن إلى شظيتين كتلة كل منهما $0.1\ kg$، وانطلقتا بعيداً بسرعة $0.6c$ لكل منهما بالنسبة للجسم الأصلي. جد كتلة الجسم الأصلي.

الحل: يجب أن تساوي الطاقة السكونية للجسم الأصلي مجموع الطاقة الكلية لكلا الشظيتين. ولهذا:

$$E_o = m_o c^2 = K m_1 c^2 + K m_2 c^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}}$$

حيث m_o: كتلة الجسم الأصلي، و E_o: طاقته السكونية، و m_1: الكتلة السكونية للشظية الأولى، و m_2: الكتلة السكونية للشظية الثانية. وبقسمة المعادلة السابقة على c^2:

$$m_o = \frac{E_o}{c^2} = \frac{m_1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} = \frac{0.1\ kg}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} + \frac{0.1\ kg}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 0.25\ kg$$

سؤال ٤: هل ستتجه الشظيتان بنفس الاتجاه أم كيف؟ ولماذا؟

(٢٤) جسيم غير مستقر في حالة سكون ينشطر تلقائياً إلى شظيتين مختلفتي الكتلة، تبلغ كتلة أولاهما $(2.5 \times 10^{-28}\ kg)$ والثانية $(1.67 \times 10^{-27}\ kg)$. وكانت سرعة الشظية الأخف $0.893c$ بعد الانشطار، فما هي سرعة الشظية الأثقل؟

الحل: يجب أن يكون الزخم النسبي للشظايا محفوظاً وفق مبدأ حفظ الزخم الخطي. ولكي يكون فرق الزخم الكلي صفراً قبل وبعد التشظي يجب أن يكون: $(p_2 = p_1)$، حيث p_1: زخم الشظية الأخف و p_2: زخم الشظية الأثقل،

$$K_1 m_1 u_1 = K_2 m_2 u_2$$

---

١) ما مقدار ما تفقده الشمس من كتلة كل سنة؟ وما مقدار ما فقدته منذ ولادتها قبل خمسة مليارات سنة إلى اليوم؟

$$p_1 = K_1 m_1 u_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(0.893)^2}}(2.5\times10^{-28}\ kg)(0.893c) = (4.96\times10^{-28}\ kg)c$$

ولأن $(p_2 = p_1)$ فإن $\{p_2 = (4.96\times10^{-28}\ kg)c\}$ أيضاً:

$$p_2 = K_2 m_2 u_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(u_2/c)^2}}(1.67\times10^{-27}\ kg)u_2 = (4.96\times10^{-28}\ kg)c$$

$$1-\left(\frac{u_2}{c}\right)^2 = \left(\frac{1.67\times10^{-27}\ u_2}{4.96\times10^{-28}\ c}\right)^2 = 11.33\left(\frac{u_2}{c}\right)^2$$

$$1 = 11.33\left(\frac{u_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{c}\right)^2 = 12.33\left(\frac{u_2}{c}\right)^2 \quad \rightarrow \quad u_2 = 0.285c$$

(٢٥) انشطر جسيم غير مستقر إلى شظيتين; انطلقت إحداهما بالاتجاه الموجب لمحور x بكتلة $1\ MeV/c^2$ وزخم $1.75\ MeV/c$، والأخرى بالاتجاه الموجب لمحور y بكتلة $1.5\ MeV/c^2$ وزخم $2\ MeV/c$. جد (أ) كتلة الجسم الأصلي، (ب) سرعته.

الحل: (أ) تُعطى طاقة الشظية الأولى بالعلاقة:

$$E_1^2 = p_1^2c^2 + (m_1c^2)^2 = (1.75\ MeV)^2 + (1\ MeV)^2$$

$$E_1 = 2.015\ MeV$$

وللشظية الثانية:

$$E_2^2 = (2\ MeV)^2 + (1.5\ MeV)^2$$

$$E_2 = 2.5\ MeV$$

بما أن الطاقة محفوظة فإن طاقة الجسم الأصلي هي:

$$E = E_1 + E_2 = 2.015\ MeV + 2.5\ MeV = 4.515\ MeV$$

كما إن كل مركبة من مركبات الزخم محفوظة، لذا فإنه:

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = (1.75\ MeV/c)^2 + (2\ MeV/c)^2 = 7.0625\ (MeV/c)^2$$

ولهذا نستعمل المعادلة 1.43 كي نجد كتلة الجسم الأصلي m_o:

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

$$(4.515\ MeV)^2 = 7.0625\ (MeV)^2 + m_o^2c^4 \quad \rightarrow \quad m_o = 3.65\ MeV/c^2$$

(ب) من معادلة الطاقة الكلية النسبية:

$$E = Km_oc^2$$

$$4.515\ MeV = \frac{3.65\ MeV}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad 1-\frac{u^2}{c^2} = 0.653 \quad \rightarrow \quad u = 0.589c$$

(٢٦) تتعجل البروتونات في أحد المعجلات إلى طاقة كلية تبلغ 400 ضعف طاقتها السكونية m_pc^2.

(أ) ما سرعة هذه البروتونات بدلالة c؟ (ب) ما هي طاقتها الحركية بوحدة MeV؟

الحل: (أ)

$$E = Km_pc^2 = 400m_pc^2$$

$$K = 400 = \frac{1}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} \quad \rightarrow \quad 1-\frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{160000}$$

$$\frac{u^2}{c^2} = 1-\frac{1}{160000} = 0.99999375 \quad \rightarrow \quad u = 0.999996875c$$

(ب) نجد الطاقة السكونية للبروتون أولاً:

$$E_o = m_p c^2 = (1.672 \times 10^{-27}\ kg)(3 \times 10^8\ m/s)^2 = 1.054 \times 10^{-10}\ J$$
$$= (1.054 \times 10^{-10}\ J)\left(\frac{1\ eV}{1.602 \times 10^{-19}\ J}\right) \approx 939\ MeV$$

ثم نحسب الطاقة الحركية له:

$$E_k = (K-1) m_p c^2$$
$$= 399(939\ MeV) = 3.74 \times 10^5\ MeV = 374\ GeV$$

(٢٧) يتحرك إلكترون عكس مجال كهربائي مقداره $(E = 5 \times 10^5\ N/C)$، وتُهمل جميع القوى الأخرى مقارنة بقوة المجال الكهربائي. (أ) جد الزخم والتعجيل عندما تكون $(v = 0.01c)$ و $(0.90c)$ و $(0.99c)$. (ب) جد التعجيل المقابل إذا كانت محصلة قوة بنفس المقدار متعامدة على السرعة. ثم ناقش النتائج.

الحـــل: (أ) عنـــدما $(v = 0.01c)$ و $(0.90c)$ و $(0.99c)$ لـــدينا $\left(K = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)} = 1\right)$ و (2.29) و (7.09) على التوالي. وبما أن مقدار الزخم هو $(p = Km_o u)$ فإنه:

$$p_1 = (1)(9.11 \times 10^{-31}\ kg)(0.01)(3 \times 10^8\ m/s)$$
$$= 2.7 \times 10^{-24}\ kg.m/s \quad \text{at} \quad (v_1 = 0.01c)$$
$$p_2 = (2.29)(9.11 \times 10^{-31}\ kg)(0.90)(3 \times 10^8\ m/s)$$
$$= 5.6 \times 10^{-22}\ kg.m/s \quad \text{at} \quad (v_2 = 0.90c)$$
$$p_3 = (7.09)(9.11 \times 10^{-31}\ kg)(0.99)(3 \times 10^8\ m/s)$$
$$= 1.9 \times 10^{-21}\ kg.m/s \quad \text{at} \quad (v_3 = 0.99c)$$

مقدار القوة على الإلكترون:

$$F = |q|E = (1.6 \times 10^{-19}\ C)(5 \times 10^5\ N/C) = 8 \times 10^{-14}\ N$$

من المعادلة $1.33'$، $(a = F/K^3 m_o)$. وعندما $(v = 0.01c)$ و $(K = 1)$ سيكون التعجيل:

$$a_1 = \frac{8 \times 10^{-14}\ N}{(1)^3 (9.11 \times 10^{-31}\ kg)} = 8.8 \times 10^{16}\ m/s^2$$

يكون التعجيل عند السرعتين الأعلى أصغر مما للسرعة غير النسبية بمقدار المعاملَين $(K^3 = 12)$ و (356) على التوالي:

$$a_2 = 7.3 \times 10^{15}\ m/s^2 \quad , \quad a_3 = 2.5 \times 10^{14}\ m/s^2$$

(ب) من المعادلة 1.34، $(a = F/Km_o)$ إذا كانت $\vec{F}$ متعامدة مع $\vec{v}$.

وعندما $(v = 0.01c)$ و $(K = 1)$ سيكون التعجيل:

$$a_1 = \frac{8 \times 10^{-14}\ N}{(1)(9.11 \times 10^{-31}\ kg)} = 8.8 \times 10^{16}\ m/s^2$$

والآن سيكون التعجيل عند السرعتين الأعلى أصغر بمقدار المعاملَين $(K = 2.29)$ و (7.09) على التوالي:

$$a_2 = 3.8 \times 10^{16}\ m/s^2 \quad , \quad a_3 = 1.2 \times 10^{16}\ m/s^2$$

هذه التعجيلات أكبر من القيم المقابلة لها في الفرع (أ) بمقدار المعامل K^2. وتُظهر نتائج الفرع (أ) أنه عند السرعات العالية تختلف القيم النسبية للزخم أكثر فأكثر عن القيم غير النسبية المحسوبة من $(p = mv)$. ويكون الزخم عند السرعة $0.99c$ أكبر بأكثر من ثلاث مرات مما عند $0.90c$ بسبب الزيادة في العامل K. وتظهر النتائج أيضاً أن التعجيل ينخفض بسرعة كبيرة مع اقتراب v من c.

فهرست الفصل الأول

مصادر الفصل الأول

١- الفيزياء الذرية، د. طالب ناهي الخفاجي و د. عباس حمادي و د. هرمز موشي، 1980.

٢- مفاهيم في الفيزياء الحديثة، آرثر بايزر، ترجمة الطبعة الثانية.

3- 1000 Solved Problems in Modern Physics, A. Kamal.

4- Concepts of Modern Physics, Arthur Beiser, 6th Edition, 2003.

5- Introduction to Atomic and Nuclear Physics, Semat and Albright, 5th Edition, 1972.

6- Modern Physics, A. Serway, J. Moses and A. Moyer, 3rd Edition. 2005.

7- Modern Physics, Paul A. Tipler and Ralph A. Llewellyn, 6th Edition, 2012.

8- Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Serway and Jewett, 10th Edition. 2019.

9- University Physics with Modern Physics, Young & Freedman, 15th Edition, 2020.