# الفصل السادس

# ذرة الهيدروجين

# The Hydrogen Atom

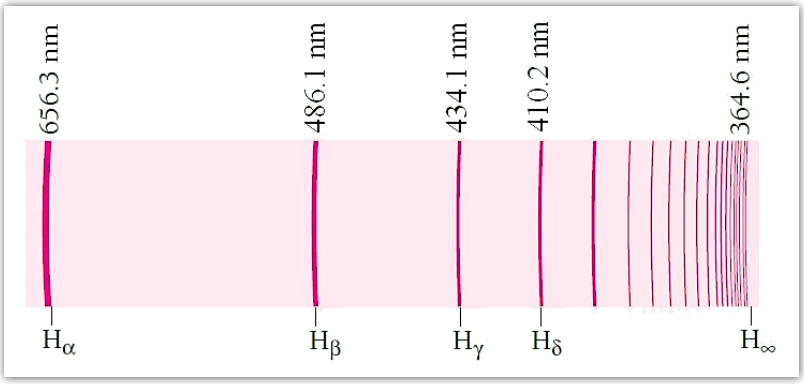
## 6-1: طيف ذرة الهيدروجين Spectrum of the Hydrogen Atom

يُعتبر الهيدروجين أبسط العناصر في الطبيعة، فنواة ذرة الهيدروجين هي عبارة عن بروتون منفرد يدور حولها إلكترون واحد فقط. وقد دُرس الهيدروجين بصورة مستفيضة نظرياً وتجريبياً، وقَدمت هذه الدراسات معلومات مهمة لفهم الذرات الأكثر تعقيداً. وفي أواخر القرن التاسع عشر أُنجزت دراسات بواسطة المطياف spectroscope للحصول على أطياف الانبعاث والامتصاص لعناصر مختلفة. وتبين أن هنالك خطوطاً طيفية معينة يتميز بها العنصر الذي يبعث أو يمتص الإشعاع. فذرة الهيدروجين يمكن أن تبعث وتمتص الإشعاع في الطيف المرئي عند أربعة أطوال موجية فقط هي: الطول الموجي $656.3\ nm$ والذي يُرمز له بالرمز $H_\alpha$ وهو في المنطقة الحمراء، و $486.1\ nm$ ورمزه $H_\beta$ وهو في المنطقة الزرقاء، والطولان $434.1\ nm$ ورمزه $H_\gamma$ و $410.2\ nm$ ورمزه $H_\delta$ في المنطقة البنفسجية، وتقع هذه الأطوال الموجية ضمن ما يُعرف بسلسلة بالمر Balmer series. ويمكن حساب الأطوال الموجية لهذه الخطوط بمعادلة لبالمر (سنة 1885) طورها ريدبيرگ Rydberg (سنة 1889) بالشكل التالي:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 3,4,5,.... \qquad .....6.1$$

حيث $R_H$: ثابت يُدعى ثابت ريدبيرگ للهيدروجين تبلغ قيمته $(1.097 \times 10^7\ m^{-1})$، والقيم الصحيحة لـ $n$ من 3 إلى 6 تمثل الخطوط المرئية الأربعة من $656.3\ nm$ إلى $410.2\ nm$. وتقترب هذه الخطوط من بعض وتضعف شدتها كلما نقص الطول الموجي حتى يصل حد السلسلة إلى $364.6\ nm$ عند $(n \to \infty)$، وبعد ذلك لا توجد خطوط منفصلة أخرى، ولكن يوجد فقط طيف مستمر باهت كما في الشكل 6-1. ومن الجدير بالذكر أن خط الطيف الذي يظهر في الشكل 6-1 ما هو في الحقيقة إلا صورة لفتحة المطياف، ولكل طول موجي صورة مختلفة.

وتوجد سلاسل أخرى للخطوط الطيفية للهيدروجين في المنطقتين فوق البنفسجية وتحت الحمراء. وهذه الخطوط لا ترى بالعين بل بالصور التي يمكن أن تتحسس هذه الأطوال الموجية التي لا تبصرها العين البشرية.




الشكل 6-1: سلسلة بالمر لخطوط طيف ذرة الهيدروجين في المنطقتين المرئية وفوق البنفسجية القريبة. ويمثل $H_\infty$ الموقع النظري لحد السلسلة.

ويقع في المنطقة فوق البنفسجية ما يُعرف بسلسلة لايمان Lyman التي تحتوي على الأطوال الموجية التي تعطى بالصيغة:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 2,3,4,\ldots. \qquad \ldots\ldots 6.2 \qquad \text{Lyman series} \triangleleft$$

وفي المنطقة تحت الحمراء وُجدت ثلاث سلاسل طيفية تتحدد أطوالها الموجية بالعلاقات التالية:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 4,5,6,\ldots. \qquad \ldots\ldots 6.3 \qquad \text{Paschen series} \triangleleft$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 5,6,7,\ldots. \qquad \ldots\ldots 6.4 \qquad \text{Brackett series} \triangleleft$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 6,7,8,\ldots. \qquad \ldots\ldots 6.5 \qquad \text{Pfund series} \triangleleft$$

لا يوجد أساس نظري لهذه المعادلات، وإنما هي معادلات تجريبية استُخلصت من النتائج العملية. ويمكن ترتيب هذه السلاسل بالجدول التالي:

الجدول 6-1: بعض السلاسل الطيفية لذرة الهيدروجين

| اسم السلسلة ومنطقة الطيف | مستوى الحالة النهائية | مستوى الحالة الابتدائية |
|---|---|---|
| Lyman series (uv) | $n_f = 1$ | $\boldsymbol{n_i = 2, 3, 4, \ldots}$ |
| Balmer series (vis-uv) | $n_f = 2$ | $\boldsymbol{n_i = 3, 4, 5, \ldots}$ |
| Paschen series (IR) | $n_f = 3$ | $\boldsymbol{n_i = 4, 5, 6, \ldots}$ |
| Brackett series (IR) | $n_f = 4$ | $\boldsymbol{n_i = 5, 6, 7, \ldots}$ |
| Pfund series (IR) | $n_f = 5$ | $\boldsymbol{n_i = 6, 7, 8, \ldots}$ |

## 6-2: نموذج بور لذرة الهيدروجين 6-2: Bohr's Model of the Hydrogen Atom

تكلمنا في الفصل الثالث عن النماذج الأولى التي اقتُرحت كي تمثل الذرة. وهنا نتكلم عن نموذج مهم آخر ضمن هذه النماذج التاريخية وهو نموذج بور.

بحلول أوائل القرن العشرين أدرك علماء الفيزياء أن المادة تتشكل من أجزاء صغيرة سُميت بالذرات وأن ذرة الهيدروجين تحتوي على شحنة موجبة في مركزها (لم يكونوا يعرفون ماهيّتها) وشحنة سالبة (إلكترون) خارج ذلك المركز. ومع ذلك، لم يكونوا يعرفون لماذا لم يؤدِّ الجذب

الكهربائي بين الإلكترون والشحنة الموجبة إلى انهيار الاثنين معاً. وثبت أيضاً - كما ذكرنا - أن ذرة الهيدروجين يمكن أن تبعث وتمتص أربعة أطوال موجية فقط في الطيف المرئي، ولا تبعث جميع الأطوال الموجية كما في إشعاع الجسم الأسود مثلاً. وفي عام 1913 طرح نيلز بور نظرية تفسر الأطوال الموجية المرئية الأربعة وعدم انهيار الذرة. ومع أن هذا النموذج قد عفا عليه الزمن وتم استبداله بالكامل بنظرية الميكانيك الكمي الاحتمالي probabilistic quantum-mechanical theory فإنه مهم تاريخياً لأنه يُعتبر بداية للتفسير الكمي للذرات. وقد جمع بور أفكاراً من النظرية الكمية لبلانك ومفهوم آينشتاين عن الفوتون ونموذج رذرفورد للذرة وميكانيك نيوتن للوصول إلى نموذج شبه تقليدي قائم على بعض الأفكار الثورية.

من أجل بناء نموذجه افترض بور ما يلي:

1- يدور الإلكترون حول نواة ثابتة في مركز الذرة بمدارات دائرية تحت تأثير قوة الجذب الكهربائية كما في الشكل 6-2.

2- إن بعض المدارات الإلكترونية مستقرة. وعندما يكون الإلكترون في إحدى هذه الحالات المستقرة stationary states لن يبعث طاقة بشكل إشعاع رغم تعجيله (أي تعجيل هذا؟). ولهذا تبقى الطاقة الكلية للذرة ثابتة، ويمكن حينئذ استعمال الميكانيك التقليدي لوصف حركة الإلكترون الذي سوف لن يهوي بشكل حلزوني نحو النواة كما تتنبأ الفيزياء التقليدية في نموذج رذرفورد (لاحظ الشكل 6-3).

3- تبعث الذرة الإشعاع عندما ينتقل الإلكترون من حالة ذات طاقة أكبر إلى حالة ذات طاقة أصغر. ولا يمكن تصور هذا الانتقال أو معالجته بشكل تقليدي. ويمكن حساب تردد الإشعاع المنبعث $f$ وفق مبدأ حفظ الطاقة كما يلي:

$$E_i - E_f = hf \qquad \ldots\ldots 6.6$$

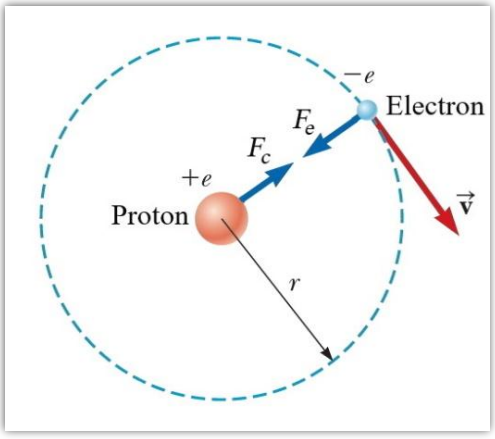
حيث $E_i$ : طاقة الحالة الابتدائية و $E_f$ : طاقة الحالة النهائية و $(E_i > E_f)$. ولكي ينتقل الإلكترون من حالة ذات طاقة أصغر إلى حالة ذات طاقة أكبر $(E_i < E_f)$ فإن الذرة تمتص الإشعاع.

4- إن قيمة الزخم الزاوي $L$ للإلكترون في مداره مكمّمة ومقيّدة بالقيم:

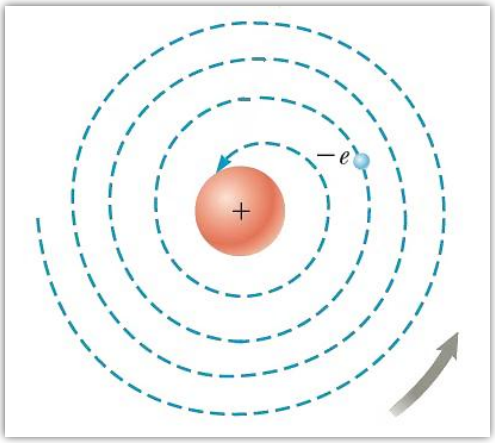
$$L = n\hbar \ , \quad n = 1,2,3, \ldots \qquad \ldots\ldots 6.7$$

حيث $(\hbar = h/2\pi)$ و $n$ : عدد كمّي موجب صحيح يمثل رقم المدار الذي يتواجد فيه الإلكترون، ويُسمى العدد الكمي الأساسي the principal quantum number .

ومن الجدير بالذكر أن المعادلة 6.7 لا تعطي قيم الزخم الزاوي بشكل صحيح، فمثلاً هي لا تتضمن القيمة $(L = 0)$، ولكن مع هذا سوف نتبع فرضيات بور للحصول على معادلة للطاقات الكميّة لذرة الهيدروجين رغم أن الإلكترون ليس مجرد جسيم في مدار دائري (ماذا هو إذن؟).




الشكل 6-2: مخطط يمثل نموذج بور لذرة الهيدروجين وتوازن القوة فيها. وهنا يُسمح للإلكترون الذي يدور في المدار أن يكون فقط في مدارات محددة غير متصلة مع بعض. ⊲




الشكل 6-3: النموذج التقليدي للذرة يتنبأ بتحلل وانهيار الذرة لأن الإلكترون المتعجل يشع طاقة فيقل حجم المدار إلى أن يسقط الإلكترون في النواة.

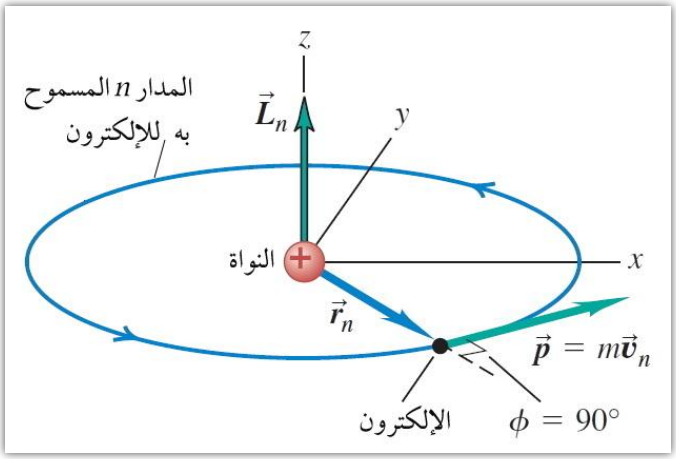
في الشكل 6-3 يكون الإلكترون في حركة دائرية منتظمة، ولهذا فإن القوة الكهربائية المؤثرة على الإلكترون والتي هي قوة كولوم ($F_e = ke^2/r^2$) يجب أن تساوي قوة الطرد المركزي centripetal force $F_c$، والتي تمثل حاصل ضرب كتلة الإلكترون $m_e$ بالتعجيل المركزي $v^2/r$. ولهذا فإن شرط استقرار المدار ديناميكياً هو:

$$F_e = F_c$$

$$k\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{ke^2}{m_e r} \qquad \ldots\ldots 6.8$$

$$\text{or} \qquad v_n = e\sqrt{\frac{k}{m_e r_n}} \qquad \ldots\ldots 6.8'$$

حيث $k$ : ثابت كولوم ($k = 1/4\pi\epsilon_0$)، و $e$ : شحنة الإلكترون، و $m_e$ : كتلة الإلكترون، و $r_n$ : نصف قطر المدار $n$، و $v_n$ : سرعة الإلكترون في المدار $n$.




الشكل 6-4: حساب الزخم الزاوي لإلكترون في مدار دائري حول نواة الذرة. ويُلاحظ أن الزخم الزاوي $\vec{L}_n$ للإلكترون المداري عمودي على مستوى المدار (وهنا جعلنا النواة كنقطة أصل). ⊲

نعود الآن للزخم الزاوي، والذي هو كمية اتجاهية (لاحظ الشكل 6-4)، ويساوي:

$$\vec{L}_n = \vec{r}_n \times \vec{p} = \vec{r}_n \times m_e\vec{v}_n$$

ولأن ($\phi = 90°$)، وهي الزاوية بين $\vec{r}_n$ و $\vec{v}_n$ فإن مقدار الزخم الزاوي لإلكترون في المدار $n$ سيكون:

$$L_n = r_n m_e v_n \sin\phi = r_n m_e v_n \sin 90 = r_n m_e v_n$$

وباستعمال فرضية بور في المعادلة 6.7:

$$L_n = r_n m_e v_n = n\hbar \qquad \ldots\ldots 6.9$$

$$v_n = \frac{n\hbar}{r_n m_e}$$

وبتربيع قيمة $v_n$ هذه وتعويضها في المعادلة 6.8 ينتج:

$$\frac{n^2\hbar^2}{r_n{}^2 m_e^2} = \frac{ke^2}{m_e r_n}$$

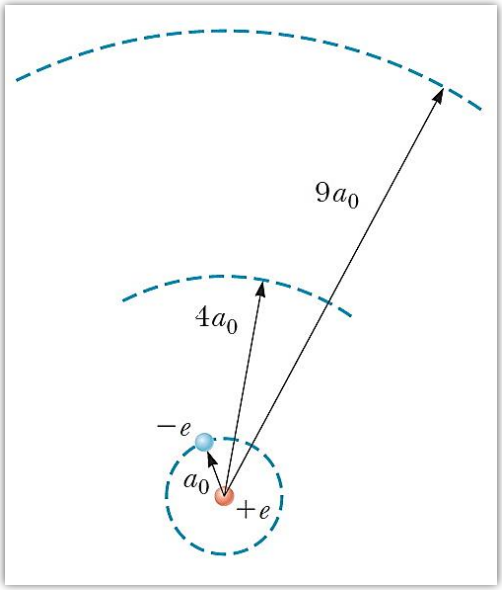
$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{m_e k e^2} \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad \ldots\ldots 6.10$$

تبين المعادلة 6.10 أن أنصاف أقطار المدارات المسموح تواجد الإلكترون فيها تمتلك قيماً منفصلة (غير متصلة) discrete values، أي إنها مُكمّمة quantized. وهذه النتيجة مستندة إلى افتراض أن الإلكترون يمكن أن يتواجد فقط في مدارات مسموحة محسوبة بواسطة العدد الصحيح $n$ ومضاعفاته. ويتبين أيضاً أن المدار ذا نصف القطر الأصغر والذي يُسمى نصف قطر بور $a_0$ Bohr radius يتوافق مع $(n = 1)$ ويمتلك القيمة:

$$r_1 = a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = 0.0529\, nm = 5.29 \times 10^{-11}\, m \qquad \ldots\ldots 6.11$$

$$\approx 5.3 \times 10^{-11}\, m = 53\, pm$$

هذا يعني أن قطر الذرّة يقارب $(10^{-10}\, m = 0.1\, nm)$، وهو يتوافق مع الأبعاد الذرية المقدرة بطرق أخرى. وتُعد هذه النتيجة انتصاراً كبيراً لنظرية بور. ويبين الشكل 6-5 مدارات بور الثلاثة الأولى لذرة الهيدروجين.




الشكل 6-5: المدارات الدائرية الثلاثة الأولى لذرة الهيدروجين حسب نموذج بور. وهنا يظهر الإلكترون في المدار الأقل طاقة، ولكن يمكن أن يكون في أي من المدارات المسموح بها. ⊲

بتعويض المعادلة 6.11 في المعادلة 6.10 تنتج صيغة عامة لنصف القطر لأي مدار في ذرة الهيدروجين:

$$r_n = n^2 a_0 = n^2(53\, pm) \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad \ldots\ldots 6.12$$

ويتبين مما سبق أنه لا يمكن للإلكترون وفق نموذج بور أن يقترب من النواة بأقل من $a_0$، وهذا يُعلِّل عدم انهيار الذرة بالتجاذب بين الإلكترون والنواة حسب ما فرضه بور.

## 6-3: The Total Energy of Hydrogen Atom **3-6: الطاقة الكلية لذرة الهيدروجين**

نحاول الآن إيجاد مقدار طاقة ذرة الهيدروجين وفق نموذج بور. حيث يمتلك الإلكترون طاقة حركية $E_k$ تساوي وفق المفهوم التقليدي $(0.5\ m_e v^2)$، ويمتلك نظام الإلكترون - النواة الموضح في الشكل 6-2 طاقة كهربائية كامنة $U$:

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r} = k\frac{(-e)(+e)}{r} = -k\frac{e^2}{r} \qquad \ldots\ldots 6.14$$

والإشارة السالبة هي بسبب الشحنة السالبة $(-e)$ للإلكترون. ولهذا فإن الطاقة الكلية للذرة والتي تتألف من الطاقة الحركية للإلكترون والطاقة الكامنة للنظام ستكون:

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{ke^2}{r} \qquad \ldots\ldots 6.15$$

وبالتعويض عن قيمة $v^2$ من المعادلة 6.8 :

$$E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}m_e \frac{ke^2}{m_e r} = \frac{ke^2}{2r}$$

وبتعويض قيمة $E_k$ هذه في المعادلة 6.15 ستنتج الصيغة التالية للطاقة الكلية للذرة:

$$E = \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r} \qquad \ldots\ldots 6.16$$

وبما أن النواة ثابتة حسب ما تم افتراضه فإن هذه المعادلة تمثل الطاقة الكلية للذرة (باستثناء الطاقة السكونية لكل من النواة والإلكترون). ويتبين أيضاً أنه عند اقتراب $r$ من الما لا نهاية فإن الطاقة تقترب من الصفر، أي إن مستوى الطاقة الصفري هو طاقة الذرة المتأينة. وتشير الإشارة السالبة للطاقة الكلية إلى نظام إلكترون- بروتون مقيّد (ذرة غير متأينة). ولهذا فإن إضافة طاقة مقدارها $(ke^2/2r)$ إلى ذرة الهيدروجين ستؤدي إلى إزالة الإلكترون منها وجعل الطاقة الكلية للنظام مساوية للصفر.

وفق النظرية التقليدية فإن الذرة حينما تشع طاقة سيتناقص نصف قطر مسار الإلكترون باستمرار، وهذا يؤدي إلى زيادة مستمرة في تردده الميكانيكي، وبالتالي إلى زيادة مستمرة في تردد الإشعاع المنبعث، ولهذا يجب أن يكون الطيف مستمراً. ولكن النتائج التجريبية لم تثمر عن طيف مستمر بل عن خطوط طيف حادة لذرة الهيدروجين. وهذا ما عالجه بور بافتراضه أن الزخم الزاوي للإلكترون في مداره هو ذو قيمة مكمّمة (المعادلة 6.7) وأن أنصاف الأقطار هي مكممة أيضاً (المعادلة 6.10)، وهذا يؤدي إلى إن الطاقة ستكون مكممة كذلك. ويتبين هذا بتعويض قيمة $r_n$ من المعادلة 6.12 في المعادلة 6.16 :

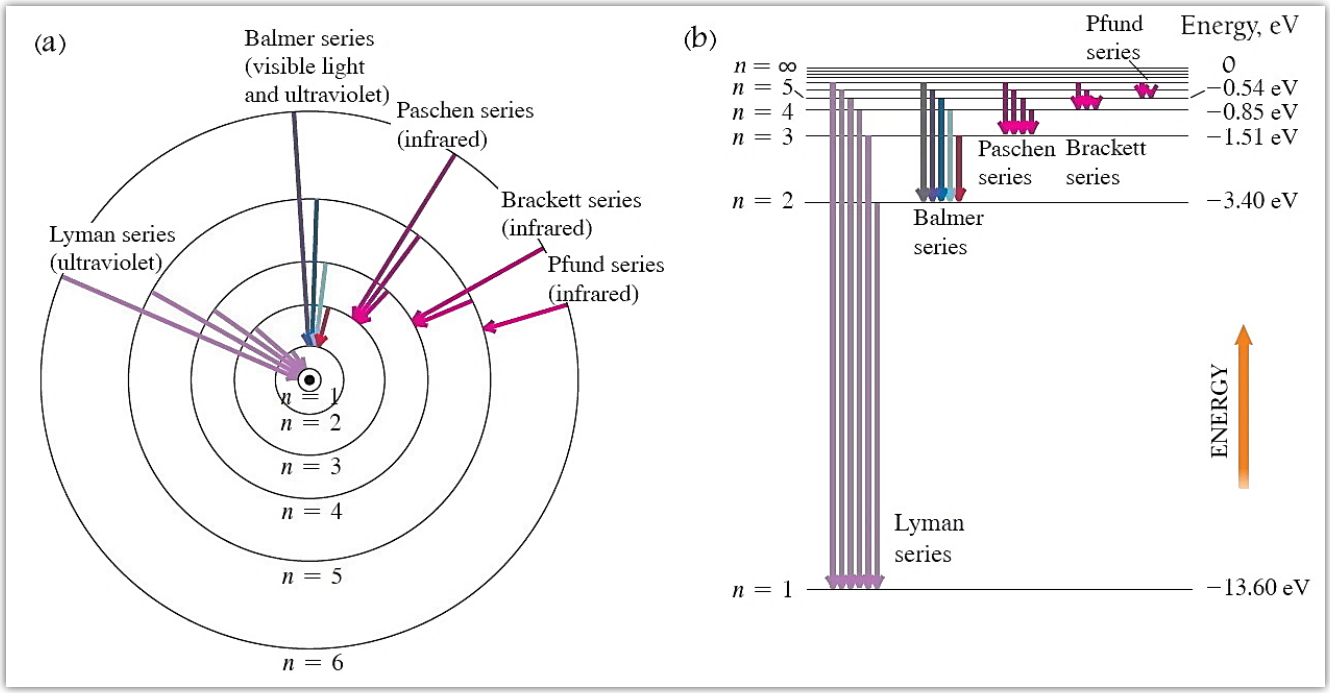
$$E_n = -\frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{ke^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{E_1}{n^2} \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad \ldots\ldots 6.17$$

ويشير الرمز المنخفض $n$ في $E_n$ إلى تكميم الطاقة. وعند إدخال القيم العددية للثوابت الموجودة في المعادلة 6.17 ينتج:

$$E_n \approx -\frac{13.6\ eV}{n^2} \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad \ldots\ldots 6.18$$

واستطاع بور من هذه المعادلة أن يحسب الأطوال الموجية المرئية المنبعثة والممتصة لذرة الهيدروجين. وتكون الطاقات المسموحة هي فقط تلك التي تُحقق هذه المعادلة، فالمستوى الأدنى للطاقة المسموح بها، أي الحالة الأرضية ground state، سيكون له $(n = 1)$ وطاقة $(E_1 \approx -13.6\ eV)$. والمستوى التالي له أي المستوى الثاني الذي يمثل الحالة المتهيجة الأولى first excited state له $(n = 2)$ وطاقة $(E_2 = E_1/2^2 \approx -3.4\ eV)$، وهكذا. ويبين الشكل 6-6 طاقات الحالات المنفصلة والأعداد الكمية $n$ المرافقة لها. ويمثل المستوى الأعلى في المخطط الحالة $(n = \infty)$ أو $(r = \infty)$ والطاقة الصفرية $(E = 0)$. ويُلاحظ أن طاقات ذرة الهيدروجين (المعادلة 6.18) تتناسب عكسياً مع مربع $n$، لذا يصبح الفرق في الطاقة أصغر مع زيادة $n$. ويقترب الفاصل بين مستويات الطاقة من الصفر عندما تقترب $n$ من اللا نهاية وتقترب الطاقة من الصفر.

تمثل الطاقة الصفرية $(E = 0)$ الحد الفاصل بين نظام مقيَّد بإلكترون ونواة وبين نظام غير مقيَّد، أي نظام متأين فاقد للإلكترون. وإذا تم رفع طاقة الذرة من طاقة الحالة الأرضية إلى أي طاقة أكبر من الصفر فإن الذرة ستتأين. وتسمى أقل طاقة لازمة لتأيين الذرة عندما تكون في حالتها الأرضية طاقة التأين. وكما يتبين من الشكل 6-6 فإن طاقة التأين للهيدروجين في الحالة الأرضية - بناءً على حسابات بور- هي $13.6\ eV$ . وقد شكلت هذه النتيجة إنجازاً كبيراً لنظرية بور لأن طاقة التأين للهيدروجين قد تم قياسها بالفعل وكانت $13.6\ eV$ .




الشكل 6-6:

(a) مدارات الإلكترون المسموح بها في نموذج بور لذرة الهيدروجين (ليست على مقياس رسم مضبوط)، (b ) مخطط مستوى الطاقة لذرة الهيدروجين، حيث تمثل الأسهم العمودية انتقالات موافقة لسلاسل طيفية مختلفة من مستويات طاقة أعلى إلى أدنى مما يسبب انبعاث فوتونات. والأرقام الكمية $n$ معطاة على اليسار، والطاقات (بالإلكترون فولت) على اليمين.

ولحساب تردد الفوتون المنبعث عندما ينتقل الإلكترون من مدار خارجي في الذرة إلى مدار داخلي يمكن استعمال المعادلتين 6.6 و 6.17:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{ke^2}{2a_0 h}\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) = -\frac{E_1}{h}\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) \qquad \ldots\ldots 6.19$$

ولأن الكمية المقاسة تجريبياً هي الطول الموجي فسنستعمل العلاقة $(c = f\lambda)$ لكتابة المعادلة 6.19 بدلالة الطول الموجي:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{ke^2}{2a_0hc}\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) \qquad \dots\dots 6.20$$

ومن اللافت للنظر أن هذه الصيغة النظرية مطابقة للشكل العام للعلاقات التجريبية التي اكتشفها بالمر وريدبيرگ (من العلاقة 6.1 إلى 6.5):

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) \qquad \dots\dots 6.21$$

وتعني المعادلة 6.21 أن الثابت $(ke^2/2a_0hc)$ في المعادلة 6.20 يساوي ثابت ريدبيرگ $R_H$ المحسوب تجريبياً. وبعد فترة وجيزة أظهر بور أن هٰذين المقدارَين (النظري والتجريبي) يتفقان مع بعض بما يقرب من 1%، وهذا يمثل نقطة قوة في نظرية بور الكمية لذرة الهيدروجين. كما أظهر بور أن كل السلاسل الطيفية للهيدروجين لها تفسير طبيعي في نظريته.

يمكن تطبيق نموذج بور لذرة الهيدروجين على بعض الذرات التي يكون لكل منها إلكترون منفرد يدور حول نواة ثابتة شحنتها $(+Ze)$ مثل بعض العناصر المتأينة كالهيليوم $He^+$ والليثيوم $Li^{+2}$ والبريليوم $Be^{+3}$. وحينئذ ستعطي نظرية بور النتيجة التالية لنصف القطر بعد وضع $Z$ في مقام الطرف الأيمن للمعادلة 6.12 لتكون بالشكل التالي:

$$r_n = n^2\frac{a_0}{Z} \qquad \dots\dots 6.22$$

أما الطاقة فستكون:

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0}\left(\frac{Z^2}{n^2}\right) = -13.6\ eV\left(\frac{Z^2}{n^2}\right) \qquad n = 1,2,3,\dots \qquad \dots\dots 6.23$$

حيث $Z$ : العدد الذري للعنصر، ويمثل عدد البروتونات في نواة الذرة.

**مثال 6-1**: جد أطول طول موجي موجود في سلسلة بالمر للهيدروجين والذي يكون متوافقاً مع الخط $H_\alpha$.

الحل: في سلسلة بالمر يكون العدد الكمي للحالة النهائية $(n_f = 2)$. وأطول طول موجي في هذه السلسلة يقابل أصغر فرق في الطاقة بين مستويات الطاقة، وهذا يوافق الحالة الأولية $(n_i = 3)$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 0.1389\ R_H$$

$$\lambda = \frac{1}{0.1389\ R_H} = \frac{1}{0.1389(1.097 \times 10^7\ m^{-1})} = 6.563 \times 10^{-7}\ m = 656.3\ nm$$

ويقع هذا الطول الموجي بالقرب من النهاية الحمراء للطيف المرئي.

**مثال 6-2**: اصطدم إلكترون بذرة هيدروجين في حالتها الأرضية فتهيجت إلى الحالة $(n = 3)$. ما مقدار الطاقة التي اكتسبتها الذرة في هذا التصادم غير المرن (الطاقة الحركية غير محفوظة)؟

الحل: من المعادلتين 6.17 و 6.18 يمكن حساب تغير طاقة ذرة الهيدروجين التي تنتقل من حالة أولية ذات عدد كمي $n_i$ إلى حالة نهائية ذات عدد كمي $n_f$ :

$$\Delta E = E_f - E_i = E_1\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right)$$

وهنا $(n_i = 1)$ و $(n_f = 3)$ و $(E_1 = -13.6\ eV)$، ولهذا:

$$\Delta E = -13.6\ eV\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 12.1\ eV$$

## 6-4: اخفاقات نظرية بور 6-4: Failures of Bohr's Theory

رغم موافقة نموذج بور لبعض النتائج التجريبية في حساب طاقة التأين وللميزات العامة لِطَيف الهيدروجين إلا أنه عانى من بعض الصعوبات مثل ما يلي:

1- لم يستطع تفسير أطياف ذرات أكثر تعقيداً من ذرة الهيدروجين.

2- لم يكن قادراً على التنبؤ بالعديد من التفاصيل الطيفية الدقيقة للهيدروجين والذرات البسيطة الأخرى، فقد وُجد أن العديد من الخطوط في سلسلة بالمر والسلاسل الأخرى لم تكن خطوطاً مفردة، بل كان كل منها عبارة عن مجموعة من الخطوط القريبة جداً من بعضها. كما نشأت صعوبة إضافية عندما لوحظ أنه في بعض الحالات تم شطر خطوط طيفية منفردة معينة إلى ثلاثة خطوط منفصلة متقاربة عندما وضعت الذرات في مجال مغناطيسي قوي.

3- تظهر تجارب الاستطارة أن الإلكترون في ذرة الهيدروجين لا يتحرك في دائرة مستوية حول النواة لأن الذرة كروية.

4- الزخم الزاوي للحالة الأرضية يساوي صفراً وليس $\hbar$ كما افترض بور.

5- افترض أن النواة ثابتة. والصحيح هو أن كلاً من النواة والإلكترون يدور حول مركز كتلتيهما المشترك.

## 6-5: مبدأ التوافق لبور 6-5: Bohr's Correspondence Principle

تختلف فيزياء الكم اختلافاً كبيراً عن الفيزياء التقليدية في العالم المجهري microworld الذي لا تصل إليه حواسنا، ورغم هذا يجب أن تعطي نفس النتائج مثل الفيزياء التقليدية في العالم العياني macroworld الذي تُظهر التجارب أن الفيزياء التقليدية صحيحة فيه. ولقد رأينا بالفعل (في الفصل الخامس) أن هذا المطلب الأساسي صحيح بالنسبة للنظرية الموجية للأجسام المتحركة. وسنجد الآن أنه ينطبق أيضاً على نموذج بور لذرة الهيدروجين. ولذا نقول:

> تقترب الفيزياء الكمية من الفيزياء التقليدية عندما يقترب الفاصل بين المستويات المكممة في الذرة من الصفر. وهذا يحدث عند زيادة العدد الكمي $n$، أي عند زيادة الطاقة.

ويسمى هذا المبدأ الذي حدده بور لأول مرة بمبدأ التوافق أو التطابق.

وكمثال، نفترض أن إلكتروناً يدور في ذرة الهيدروجين ضمن مستوى طاقة $(n > 10000)$. وبالنسبة لهكذا قيم كبيرة من $n$ فإن اختلافات الطاقة بين المستويات المتجاورة تقترب من الصفر، ولهذا تكون المستويات متصلة تقريباً. وبالتالي فإن النموذج التقليدي دقيق بشكل معقول في وصف النظام للقيم الكبيرة لـ $n$. ووفق النظرية الكهرومغناطيسية التقليدية فإن الإلكترون المتحرك في مدار دائري يشع موجات كهرومغناطيسية يكون ترددها مساوياً لتردد دوران الإلكترون في مداره حول النواة. وتظهر الحسابات أنه عندما $(n > 10000)$ فإن هذا التردد يختلف عن ذلك الذي يتوقعه الميكانيك الكمي بأقل من 0.015%. وهذا يؤكد صحة مبدأ التطابق لبور.

تكون سرعة الإلكترون في ذرة الهيدروجين وفق المعادلة 6.8′:

$$v = e\sqrt{\frac{k}{m_e r_n}}$$

ويكون تردد الدوران $f_r$ للإلكترون:

$$f_r = \frac{\text{سرعة الإلكترون}}{\text{محيط المدار}} = \frac{v}{2\pi r_n} = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_e {r_n}^3}}$$

نصف القطر $r_n$ لمدار ثابت يُعطى بدلالة العدد الكمي $n$ من المعادلة 6.10:

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k e^2}$$

ولهذا فإن تردد الدوران سيكون:

$$f_r = \frac{ke^2}{2a_0 h}\left(\frac{2}{n^3}\right) = -\frac{E_1}{h}\left(\frac{2}{n^3}\right) \qquad \ldots\ldots 6.24$$

رغم أن نموذج بور لذرة الهيدروجين قد حلت محله نظرية الكم الحديثة، فإن حساب التردد وفق المعادلة 6.6 ومبدأ التوافق يظلان سِمَتين أساسيتين للنظرية الكمية الحديثة.

**مثال 6-3:** في فضاء ما بين النجوم لوحظت ذرات الهيدروجين المتهيجة جداً (أي يكون مستوى الطاقة فيها ذا عدد كمي كبير) والمسماة ذرات ريدبيرگ Rydberg atoms، والتي أمكن إنتاجها في المختبر أيضاً.

(أ) أوجد العدد الكمي لمدار بور في ذرة هيدروجين نصف قطرها $1.325\ mm$.

(ب) ما هي طاقة ذرة الهيدروجين في هذه الحالة؟

الحل: (أ)

$$r_n = n^2 a_0 = n^2(5.3 \times 10^{-11} m)$$

$$n = \sqrt{\frac{r_n}{a_0}} = \sqrt{\frac{1.325 \times 10^{-3} m}{5.3 \times 10^{-11} m}} = 5000$$

(ب)

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13.6\ eV}{(5000)^2} = -5.44 \times 10^{-7} eV$$

يُلاحظ هنا أن نصف قطر هذه الذرّة ($1.325\ mm$) كبير بما يكفي ليجعل الذرة ضمن المستوى العياني. ومن الواضح أن ذرات ريدبيرگ هشة للغاية ويمكن أن تتأين بسهولة، وهذا هو سبب وجودها في الطبيعة في الفراغ القريب من الفضاء فقط. وينزل مدى أطياف ذرات ريدبيرگ وصولاً إلى الترددات الراديوية، وتم إثبات وجودها من بيانات التلسكوب الراديوي.

**مثال 6-4:** (أ) جد ترددات دوران الإلكترونات في مداري بور الأول والثاني ($n = 1$ and $n = 2$).

(ب) ما هو تردد الفوتون المنبعث عندما يهبط إلكترون في المدار ($n = 2$) إلى المدار ($n = 1$)؟

(ج) يقضي الإلكترون عادةً حوالي $10^{-8}\ s$ في حالة متهيجة قبل أن يهبط إلى حالة أدنى عن طريق انبعاث فوتون. كم عدد الدورات التي يدورها إلكترون في مدار بور الثاني ($n = 2$) خلال $10^{-8}\ s$ ؟

الحل: (أ) من المعادلة 6.24:

$$f_{r1} = -\frac{E_1}{h}\left(\frac{2}{n^3}\right) = -\frac{E_1}{h}\left(\frac{2}{1^3}\right) = -\left[\frac{13.6\ eV(1.6\times10^{-19}\ J/eV)}{6.626\times10^{-34}\ J.s}\right](2)$$

$$= \left(\frac{2.18\times10^{-18}\ J}{6.626\times10^{-34}\ J.s}\right)(2) = 6.58\times10^{15}\ rev/s$$

$$f_{r2} = -\frac{E_1}{h}\left(\frac{2}{2^3}\right) = \frac{f_{r1}}{8} = 8.23\times10^{14}\ rev/s$$

(ب) من المعادلة 6.19:

$$f = -\frac{E_1}{h}\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) = \left(\frac{2.18\times10^{-18}\ J}{6.626\times10^{-34}\ J.s}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 2.88\times10^{15}\ Hz$$

هذا التردد متوسط بين $f_{r1}$ و $f_{r2}$.

(ج) عدد الدورات التي يقوم بها الإلكترون خلال $10^{-8}\ s$ هو

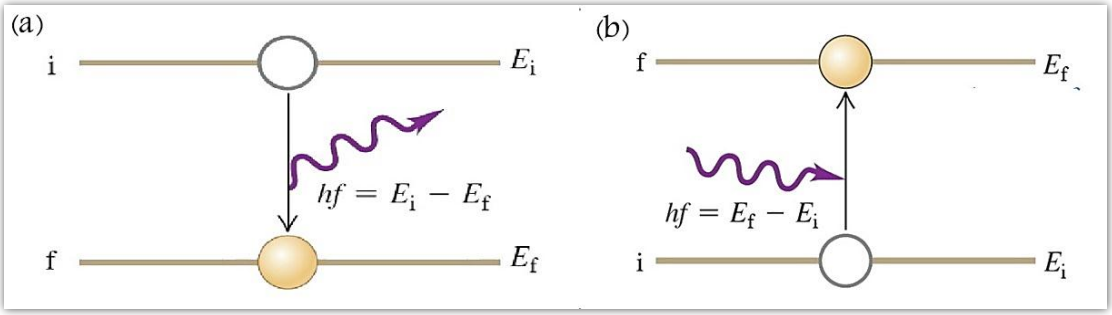
$$N = f_{r2}\Delta t = (8.23\times10^{14}\ rev/s)(10^{-8}\ s) = 8.23\times10^{6}\ rev$$

أي 8.23 مليون دورة خلال $10\ ns$. بينما تحتاج الأرض لـ 8.23 مليون سنة كي تتم نفس العدد من الدورات حول الشمس.

**سؤال:** احسب عدد دورات الإلكترون حول النواة في الثانية الواحدة عندما يكون $(n = 5000)$ كما في المثال 6-3.

## 6-6: التهيج الذرّي 6-6: Atomic Excitation

إن معنى أن تكون الذرة مستقرة هو أن كل ذرة لديها مستوى طاقة أدنى يسمى المستوى الأرضي ground level. وتسمى المستويات التي لها طاقات أكبر من المستوى الأرضي بالمستويات المتهيجة excited levels. ويمكن لذرة في مستوى متهيج، والتي تسمى ذرة متهيجة excited atom، أن تعود إلى المستوى الأرضي بعد أن تبعث فوتوناً كما في الشكل 6-7a. ولكن نظراً لعدم وجود مستويات تحت المستوى الأرضي، فلا تفقد الذرة الموجودة في المستوى الأرضي طاقة ولا تبعث فوتوناً.



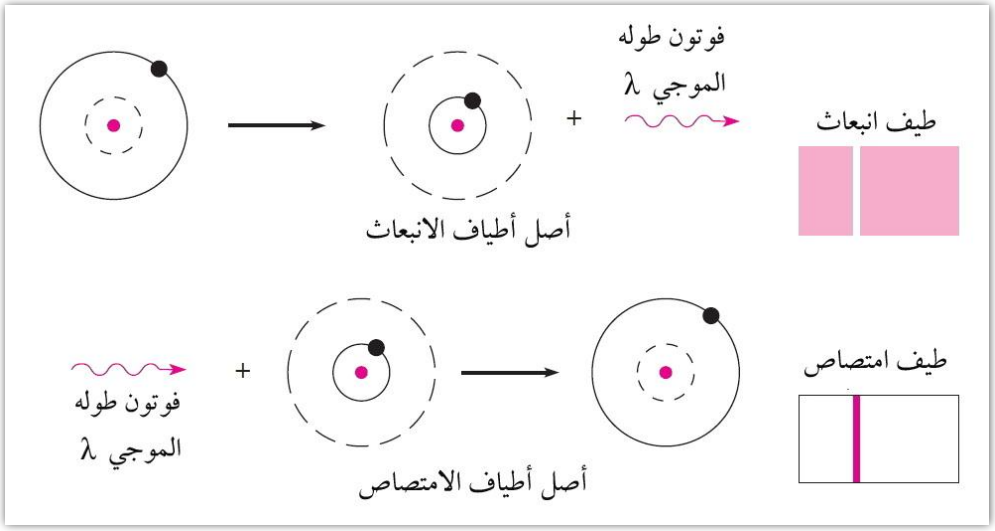

الشكل 6-7: (a) ذرة متهيجة تنخفض من مستوى ابتدائي i إلى مستوى نهائي ذي طاقة منخفضة f بسبب انبعاث فوتون طاقته $(hf = E_i - E_f)$. (b) ترتفع الذرة من مستوى ابتدائي i إلى مستوى نهائي ذي طاقة أعلى f عن طريق امتصاص فوتون طاقته تساوي $(hf = E_f - E_i)$.

هناك طريقتان رئيسيتان يمكن من خلالهما تحفيز الذرة إلى طاقة أعلى من حالتها الأرضية فتصبح قادرة على بث الإشعاع. إحداهما الاصطدام بجسيم آخر، مما يؤدي إلى أن تتهيج الذرة بسبب امتصاصها لجزء من الطاقة الحركية المشتركة للجسيم والذرة. والطريقة الأخرى لتحفيز الذرة هي عندما تمتص الذرة فوتوناً تكون قيمة طاقته مناسبة لرفع الذرة إلى مستوى طاقة أعلى.

وكمثال، فإن ذرة ليثيوم متهيجة تبعث ضوءاً أحمر بطول موجي $(\lambda = 671\ nm)$. وتكون طاقة الفوتون المقابلة له:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ J.s)(3 \times 10^{8}\ m/s)}{671 \times 10^{-9}\ m} = 2.96 \times 10^{-19}\ J = 1.85\ eV$$

ويُبعث هذا الفوتون خلال انتقال كذلك المبين في الشكل 6-11-a بين مستويين في الذرة يختلفان في الطاقة بالمقدار $(E_i - E_f = 1.85\ eV)$. ومن أجل امتصاص فوتون وتهيج الذرة من المستوى الأدنى إلى المستوى الأعلى (الشكل 6-7-b) يجب أن يمتلك الفوتون طاقة $1.85\ eV$ وطولاً موجياً $671\ nm$. وبمعنى آخر، تمتص الذرة نفس الأطوال الموجية التي تبعثها. وهذه العملية تفسر أصل أطياف الامتصاص والتطابق بين طيف خط انبعاث عنصر ما وطيف خط امتصاصه (لاحظ الشكل 6-8).



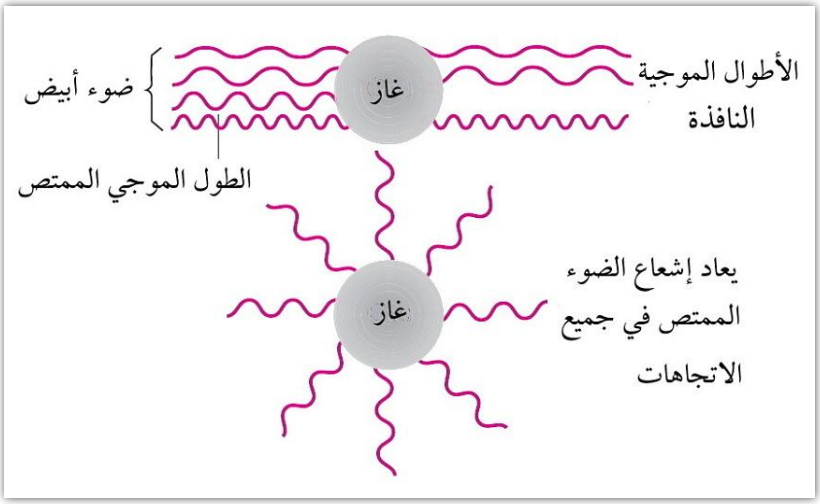

الشكل 6-8: كيفية نشوء خطوط أطياف الانبعاث والامتصاص.

تُظهر أطياف خط الانبعاث أن العديد من الأطوال الموجية المختلفة تنبعث من كل ذرة كما مرّ علينا في السلاسل الطيفية لذرة الهيدروجين. ومن ثم يجب أن يكون لكل نوع من الذرات عدد من مستويات الطاقة، مع اختلاف في مقادير فرق الطاقة بين كل مستويين متجاورين. ويتوافق كل طول موجي في الطيف مع انتقال بين مستويين محددين من الطاقة الذرية.

من الملاحَظ أن ذرة الليثيوم لا يمكنها امتصاص فوتون بطول موجي أطول قليلاً (مثلاً، $672\ nm$) أو بطول موجي أقصر قليلاً (مثلاً، $670\ nm$). وذلك لأن الفوتون الأول يمتلك طاقة أقل بمقدار قليل جداً والفوتون الثاني أكثر بقليل جداً من اللازم لرفع طاقة الذرة من مستوى إلى آخر، ولا يمكن أن يكون للذرة طاقة متوسطة بين المستويات. وهذا يفسر سبب احتواء أطياف خط الامتصاص على خطوط داكنة مميزة ، حيث يمكن للذرات أن تمتص فقط الفوتونات ذات الأطوال الموجية المحددة.

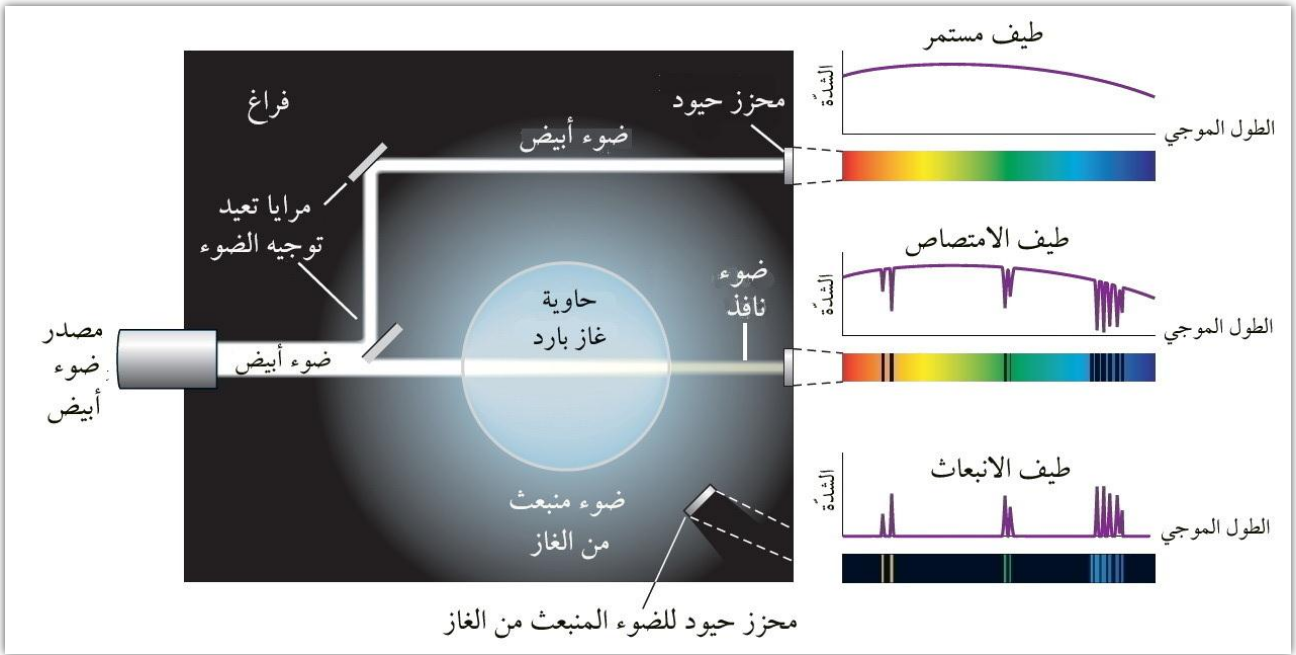
إن الذرة التي تتهيج إلى مستوى طاقة مرتفع، إما عن طريق امتصاص فوتون أو عن طريق الاصطدامات، لا تبقى هناك لفترة طويلة. وإنما سوف تبعث فوتوناً أو أكثر وتعود لمستوى أقل تهيجاً أو تعود للحالة الأرضية المستقرة خلال حوالي $10^{-8}\ s$.

عندما يمر الضوء الأبيض - الذي يحتوي على جميع الأطوال الموجية للطيف المرئي- عبر غاز الهيدروجين سوف يتم امتصاص الفوتونات التي لها أطوال موجية تتوافق مع الانتقالات بين مستويات الطاقة. وتقوم ذرات الهيدروجين التي تهيجت بعد امتصاص الفوتونات بإعادة إشعاع الطاقة التي أدّت إلى تَهيُّجها بشكل فوري تقريباً، ولكن هذه الفوتونات المنبعثة تنطلق في اتجاهات عشوائية مع وجود عدد قليل فقط منها في نفس اتجاه الحزمة الأصلية للضوء الأبيض. لذلك فإن الخطوط المظلمة في طيف الامتصاص ليست سوداء تماماً ولكنها تظهر هكذا فقط بسبب التباين مع الخلفية الساطعة. ومن المتوقع أن تتطابق الخطوط في طيف الامتصاص لأي عنصر مع تلك الموجودة في طيف الانبعاث له الذي يمثل الانتقالات إلى الحالة الأرضية، والتي تتفق مع الملاحظة.




الشكل 6-9: سقوط ضوء أبيض على غاز وانبعاث فوتونات من ذرات الغاز المتهيجة بمختلف الاتجاهات.

وللحفاظ على توهج غاز من الذرات، يجب الاستمرار بتزويد الطاقة للغاز من أجل إعادة تهييج الذرات حتى تتمكن من إصدار المزيد من الفوتونات. وإذا تم إيقاف تشغيل مصدر الطاقة (مثلاً، بإغلاق مصدر الضوء) فإن الذرات تنخفض مرة أخرى إلى مستوياتها الأرضية وتتوقف عن بعث الضوء.




الشكل 6-10: عندما يمر شعاع من الضوء الأبيض ذو طيف مستمر عبر غاز بارد يكون للضوء النافذ طيف امتصاص. وسوف تُهَيج الطاقة الضوئية الممتصة الغاز وتجعله يبعث الضوء من تلقاء نفسه، والذي يحتوي على طيف انبعاث.

**مثال 6-6**: ذرة افتراضية كما في الشكل 6-15-a، لها مستويات طاقة عند $0\ eV$ (المستوى الأرضي) و $1\ eV$ و $3\ eV$.

(أ) ما هي الترددات والأطوال الموجية للخطوط الطيفية التي يمكن أن تبعثها هذه الذرة عندما تتهيج؟

(ب) ما هي الأطوال الموجية التي يمكن أن تمتصها هذه الذرة إذا كانت في المستوى الأرضي؟

الحل: تكون الطاقة محفوظة عند انبعاث فوتون أو امتصاصه. وفي كل انتقال تكون طاقة الفوتون مساوية للفرق بين طاقتي المستويين المشاركين في الانتقال.

(أ) الطاقات الممكنة للفوتونات المنبعثة هي $1\ eV$ و $2\ eV$ و$3\ eV$. ولـ $1\ eV$ يكون تردد الفوتون المنبعث:

$$f = \frac{E}{h} = \frac{1\ eV}{4.136 \times 10^{-15}\ eV.s} = 2.42 \times 10^{14}\ Hz$$

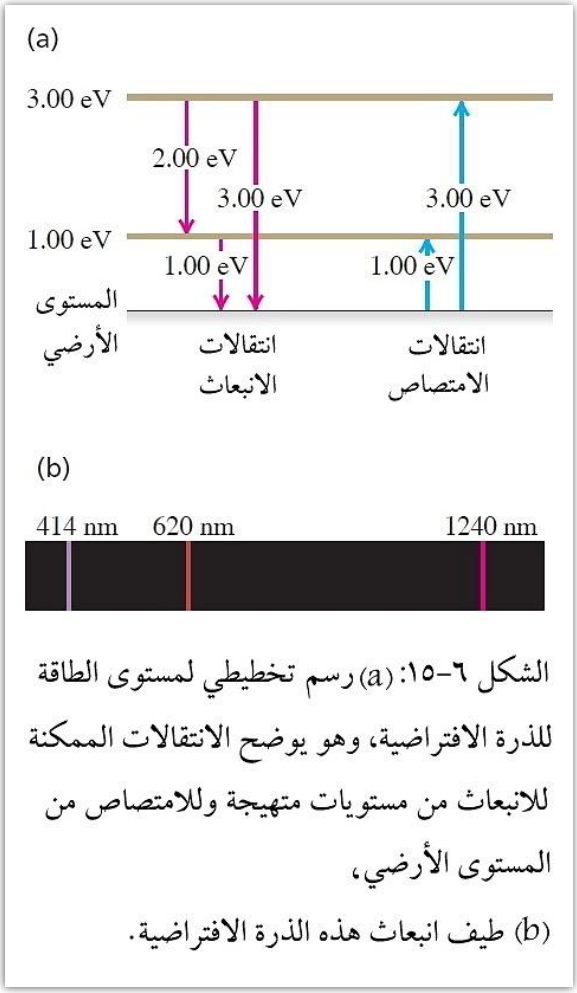
ولـ $2\ eV$ و$3\ eV$ يكون التردد $(f = 4.84 \times 10^{14}\ Hz)$ و $(f = 7.25 \times 10^{14}\ Hz)$ على التوالي. أما الطول الموجي للفوتون ذي الطاقة $1\ eV$ فسوف يكون:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^{8}\ m/s}{2.42 \times 10^{14}\ Hz} = 1.24 \times 10^{-6}\ m = 1240\ nm$$

وهذا الطول الموجي يقع في المنطقة تحت الحمراء من الطيف (الشكل 6-15-b). ولـ $2\ eV$ و$3\ eV$ فإن الطول الموجي هو $620\ nm$ (أحمر) و $414\ nm$ (بنفسجي) على التوالي.

(ب) يمكن أن تمتص الذرة من المستوى الأرضي فوتوناً ذا طاقة مقدارها $1\ eV$ أو $3\ eV$ فقط، (الشكل 6-11-a)، ولا يمكن امتصاص فوتون ذي طاقة $2\ eV$ لأن الذرة ليس لها مستوى طاقة $2\ eV$ فوق المستوى الأرضي.

إن تمرير الضوء من مادة صلبة ساخنة عبر غاز من هذه الذرات الافتراضية (التي سيكون جميعها تقريباً في المستوى الأرضي إذا كان الغاز بارداً) من شأنه أن ينتج طيفاً مستمراً بخطوط امتصاص داكنة عند $1240\ nm$ و $414\ nm$. كما إنه إذا كان غاز من هذه الذرات في درجة حرارة عالية بما فيه الكفاية فإن الاصطدامات ستُهيج عدداً من الذرات في مستوى الطاقة $1\ eV$ فتمتص فوتونات بطاقة $2\ eV$ كما يوضحه الشكل 6-11-a، وسيظهر خط امتصاص عند $620\ nm$ في الطيف. وبالتالي فإن الطيف المرصود لمادة معينة يعتمد على مستويات طاقتها ودرجة حرارتها.




الشكل ٦-١٥: (a) رسم تخطيطي لمستوى الطاقة للذرة الافتراضية، وهو يوضح الانتقالات الممكنة للانبعاث من مستويات متهيجة وللامتصاص من المستوى الأرضي،
(b) طيف انبعاث هذه الذرة الافتراضية.

## أسئلة

1- (أ) هل يمكن لذرة هيدروجين في الحالة الأرضية أن تمتص فوتوناً تقل طاقته عن $13.6\ eV$؟
(ب) وهل يمكن لهذه الذرة أن تمتص فوتوناً تزيد طاقته عن $13.6\ eV$؟

2- ما الذي يحدث عندما تبعث الذرة فوتوناً؟
(أ) سوف يترك أحد إلكتروناتها الذرة، (ب) تنتقل الذرة إلى حالة ذات طاقة أعلى، (ج) تنتقل الذرة إلى حالة طاقة أقل، (د) يصطدم أحد إلكتروناتها بجسيم آخر، (هـ) لا يحدث أي من هذه الأحداث.

3- لو كانت ذرة هيدروجين في الحالة $(n = 2)$ وسقط عليها فوتون طاقته $(1.6\ eV)$ وامتصت كل طاقته فما الذي سيحدث؟

4- (أ) في ذرة الهيدروجين، هل يمكن أن يزداد العدد الكمي $n$ بدون حدود؟
(ب) هل يمكن لتردد الخطوط المنفصلة المحتملة في طيف الهيدروجين أن يزداد دون حدود؟
(ج) هل يمكن للطول الموجي للخطوط المنفصلة المحتملة في طيف الهيدروجين أن يزداد دون حدود؟

5- عندما يصطدم إلكترون بذرة فإنه يمكن أن ينقل لها كل طاقته أو بعضها. وعليه فإذا سقطت في وقت واحد عدة إلكترونات لكل منها طاقة حركية 10.5 $eV$ على ذرة هيدروجين في حالتها الأرضية فما هي النتيجة؟
(أ) يمكن أن تتهيج الذرة لحالة طاقة مسموحة أعلى، (ب) تتأين الذرة، (ج) تخترق الإلكترونات ذرة الهيدروجين بدون تفاعل.

6- (أ) في أي منطقة من الطيف الكهرومغناطيسي تقع سلسلة بالمر لطيف ذرة الهيدروجين؟ وما هي الحالة الابتدائية والحالة النهائية لانتقال الإلكترون خلالها؟
(ب) اذكر نفس الأمر عن سلاسل لايمان وباشن وبراكيت.

7- ما هو حد سلسلة بالمر؟ احسب مقداره. وفي أي منطقة يقع هذا الخط ضمن الطيف الكهرومغناطيسي؟

8- هل الأطوال الموجية الأربعة في الطيف المرئي لذرة الهيدروجين في سلسلة بالمر تمثل خطوط انبعاث للإشعاع فقط أم هي خطوط انبعاث وامتصاص؟

9- احسب نصف قطر بور بعد تعويض قيم الثوابت في المعادلة 6.11.
(ج) كيف ينتهك نموذج بور مبدأ اللا دقة؟

10- كيف عالج بور مشكلة نموذج رذرفورد بانهيار الذرة؟

11- لا يمكن للإلكترون وفق نموذج بور لذرة الهيدروجين أن يقترب من النواة بأقل من نصف قطر بور $a_0$. على ماذا يدل هذا؟

12- ما هي المقادير التي أصبحت مكممة وفق نموذج بور؟

13- ما هي طاقة التأين؟ وما مقدارها للحالة الأرضية لذرة الهيدروجين؟

14- هل يصح نموذج بور للذرات الأثقل من ذرة الهيدروجين؟ وكيف؟

15- عَدِّد ثلاثة اخفاقات لنموذج بور لذرة الهيدروجين.

16- ما هو مبدأ التوافق لبور؟

17- هل يصح افتراض بور أن الإلكترون يدور حول نواة ثابتة؟ ولماذا؟

18- حدث انتقال في ذرة الهيدروجين من المستوى $(n = 3)$ إلى المستوى $(n = 2)$، وبعدها حدث انتقال آخر من المستوى $(n = 2)$ إلى المستوى $(n = 1)$. ما هو الانتقال الذي ينتج عنه انبعاث فوتون ذي طول موجي أطول؟
(أ) الانتقال الأول، (ب) الانتقال الثاني، (ج) الطول الموجي هو نفسه في الحالتين.

## مسائل محلولة

(1) احسب طول موجة وتردد الخط الطيفي الثاني في سلسلة بالمر للهيدروجين $H_\beta$ حسب نموذج بور.

الحل: في سلسلة بالمر يكون العدد الكمي للحالة النهائية $(n_f = 2)$. ولهذا فالخط $H_\beta$ يتولد عند انتقال الإلكترون من $(n_i = 4)$ إلى $(n_f = 2)$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) = (1.097 \times 10^7\ m^{-1})\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 2056875\ m^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{2056875\ m^{-1}} = 4.861 \times 10^{-7}\ m = 486.1\ nm$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{4.861 \times 10^{-7}\ m} = 6.17 \times 10^{14}\ Hz$$

(2) انتقل إلكترون في ذرة الهيدروجين من مستوى الطاقة $(n = 5)$ إلى المستوى $(n = 3)$. ما هو طول موجة الفوتون الذي تبعثه الذرة في هذه العملية؟ ثم اذكر لأي سلسلة ينتمي هذا الخط وفي أي منطقة يقع ضمن الطيف الكهرومغناطيسي.

الحل :
$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) = (1.097 \times 10^7\ m^{-1})\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) = 7.8 \times 10^5\ m^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{7.8 \times 10^5\ m^{-1}} = 1.28 \times 10^{-6}\ m = 1.28\ \mu m$$

ينتمي هذا الخط لسلسة باشن ضمن المنطقة تحت الحمراء لأن نهاية الانتقال $n_f$ كانت في المستوى 3.

(3) (أ) رَتِّب الانتقالات التالية في ذرة الهيدروجين من الانتقال ذي الربح الأكبر في الطاقة إلى ذي الخسارة الأكبر:

$(1)\ n_i = 2;\ n_f = 5,\ \ (2)\ n_i = 5;\ n_f = 3,\ \ (3)\ n_i = 7;\ n_f = 4,\ \ (4)\ n_i = 4;\ n_f = 7.$

(ب) رتِّب نفس الانتقالات وفقاً لطول موجة الفوتون الممتص أو المنبعث بواسطة ذرة معزولة أخرى من أكبر طول موجي إلى الأصغر.

الحل: يمكن حساب الفرق في طاقة الفوتون وفق العلاقة:

$$\Delta E = E_1\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right)$$

حيث $(E_1 \approx -13.6\ eV)$، وإذا كان $(\Delta E > 0)$ فإنه سيتم اكتساب طاقة عن طريق امتصاص فوتون كي يحدث انتقال الإلكترون من مستوى طاقة أدنى إلى مستوى طاقة أعلى، وإذا كان $(\Delta E < 0)$ فستفقد الذرة طاقة بأن ينبعث منها فوتون كي يهبط الإلكترون من مستوى طاقة أعلى إلى مستوى أدنى.

ويُحسب الطول الموجي بدلالة $\Delta E$ وفق العلاقة:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1.24 \times 10^{-6}\ eV.m}{\Delta E}$$

$(1)\ n_i = 2;\ n_f = 5,\quad \Delta E = 2.856\ eV\ \ (\text{امتصاص})\quad \lambda = 434\ nm$

$(2)\ n_i = 5;\ n_f = 3,\quad \Delta E = -0.967\ eV\ \ (\text{انبعاث})\quad \lambda = 1282\ nm$

$(3)\ n_i = 7;\ n_f = 4,\quad \Delta E = -0.572\ eV\ \ (\text{انبعاث})\quad \lambda = 2166\ nm$

$(4)\ n_i = 4;\ n_f = 7,\quad \Delta E = 0.572\ eV\ \ (\text{امتصاص})\quad \lambda = 2166\ nm$

وعليه سيكون الجواب:

(أ) $2 > 3 > 4 > 1$ ، (ب) $1 > 2 > 4 = 3$.

(4) تبعث ذرة معزولة لعنصر معين فوتوناً طوله الموجي $520\ nm$ عندما تهبط من حالتها المتهيجة الخامسة إلى الحالة المتهيجة الثانية. وتبعث الذرة فوتوناً يبلغ طوله الموجي $410\ nm$ عندما تهبط من حالتها المتهيجة السادسة إلى الحالة المتهيجة الثانية. جد طول موجة الفوتون المنبعث عندما تنتقل الذرة من حالتها المتهيجة السادسة إلى الحالة المتهيجة الخامسة.

الحل: يجب أن تكون طاقة الحالة المتهيجة الخامسة فوق طاقة الحالة المتهيجة الثانية بالمقدار:

$$E_{52} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\, J.s)(3 \times 10^{8}\, m/s)}{520 \times 10^{-9} m} = 3.82 \times 10^{-19} J$$

وطاقة الحالة المتهيجة السادسة يجب أن تزيد عن الثانية بالمقدار:

$$E_{62} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\, J.s)(3 \times 10^{8}\, m/s)}{410 \times 10^{-9} m} = 4.85 \times 10^{-19} J$$

إذن سوف تكون طاقة الحالة المتهيجة السادسة أكبر من طاقة الحالة المتهيجة الخامسة بالمقدار:

$$4.85 \times 10^{-19} J - 3.82 \times 10^{-19} J = 1.03 \times 10^{-19} J$$

وحينئذ سوف تبعث الذرة فوتوناً بطول موجي:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{65}} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\, J.s)(3 \times 10^{8}\, m/s)}{1.03 \times 10^{-19} J} = 1.93 \times 10^{-6}\, m = 1.93\, \mu m$$

(5) (أ) ما هي قيمة العدد الكمي $n_i$ المقترن بالخط الطيفي $94.96\, nm$ في سلسلة لايمان للهيدروجين؟ (ب) هل يمكن أن يقترن هذا الطول الموجي بسلسلة باشن؟
(ج) هل يمكن أن يقترن هذا الطول الموجي بسلسلة بالمر؟

الحل : (أ)

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\lambda R_H} = \frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}$$

$$n_i = \left( \frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{\lambda R_H} \right)^{-1/2} = \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(94.96 \times 10^{-9} m)(1.097 \times 10^{7}\, m^{-1})} \right)^{-1/2} = 5$$

وهذا يعني أن الإلكترون ينتقل من مستوى الطاقة الخامس إلى الحالة الأرضية ليبعث فوتوناً في هذا الخط الطيفي ضمن سلسلة لايمان.

(ب) و (ج): إن الأطوال الموجية لسلسلة لايمان (ومنها الخط $94.96\, nm$) تقع ضمن طيف الأشعة فوق البنفسجية، أما الأطوال الموجية في سلسلة بالمر وباشن فهي أطول من هذا الخط لأن موجات سلسلة بالمر تقع في المنطقة المرئية والمنطقة فوق البنفسجية القريبة من المرئية بحيث لا يتجاوز حد سلسلة بالمر الخط $364.6\, nm$ الذي هو أطول بكثير من الخط $94.96\, nm$ المفترض في السؤال. أما سلسلة باشن فتقع في المنطقة تحت الحمراء. ولهذا لا يمكن أن يكون هذا الطول الموجي ضمن سلسلة بالمر ولا سلسلة باشن.

(6) (أ) انتقل إلكترون في ذرة الهيدروجين من المستوى $(n = 2)$ إلى المستوى الأرضي $(n = 1)$. جد طول موجة الفوتون المنبعث وتردده. ثم اذكر لأي سلسلة ينتمي هذا الخط وفي أي منطقة يقع ضمن الطيف الكهرومغناطيسي.

الحل :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2} \right) = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R_H$$

$$\lambda = \frac{4}{3R_H} = \frac{4}{3(1.097 \times 10^{7}\, m^{-1})} = 1.215 \times 10^{-7}\, m = 121.5\, nm$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{1.215 \times 10^{-7}\ m} = 2.47 \times 10^{15}\ Hz$$

ينتمي هذا الخط لسلسة لايمان ضمن المنطقة فوق البنفسجية لأن الانتقال كان إلى المستوى الأرضي $(n_f = 1)$.

(ب) في فضاء ما بين النجوم لوحظت ذرات الهيدروجين المتهيجة جداً المسماة ذرات ريدبيرگ. جد الطول الموجي الذي يتعين على الفلكيين الراديويين ضبطه ليكتشفوا إشارات الإلكترونات التي تهبط من المستوى $(n = 273)$ إلى $(n = 272)$.

الحل :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) = R_H\left(\frac{1}{272^2} - \frac{1}{273^2}\right) = 1.084\ m^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{1.084\ m^{-1}} = 0.922\ m$$

(ج) ما هو نصف قطر مدار الإلكترون في ذرة ريدبيرگ عندما $(n = 273)$؟

الحل :

$$r_n = n^2 a_0$$

$$r_{273} = 273^2(53\ pm) = 3.95 \times 10^{-6}\ m = 3.95\ \mu m$$

ويُلاحظ أن نصف القطر هذا كبير بما يكفي ليجعل الذرة على وشك أن تكون عيانية macroscopic.

**(د)** ما هي سرعة الإلكترون الذي يتحرك في ذرة ريدبيرگ عندما $(n = 273)$؟

الحل: من المعادلة 6.8:

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{m_e r}} = \sqrt{\frac{(9 \times 10^9\ N.m^2/C^2)(1.6 \times 10^{-19}\ C)^2}{(9.1 \times 10^{-31} kg)(3.95 \times 10^{-6}\ m)}} \approx 8000\ m/s$$

**(هـ)** لو تم التعامل مع الإشعاع المنبعث من ذرة ريدبيرگ في الفرع (ب) بشكل تقليدي، فما هو الطول الموجي للإشعاع المنبعث من الذرة في المستوى $(n = 273)$؟

الجواب: من الناحية التقليدية، فإن تردد الإشعاع المنبعث هو دوران الإلكترون حول النواة. ولحساب هذا التردد نستعمل العلاقة:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$$

حيث $T$ : مدة الدورة الواحدة للإلكترون حول النواة. وبتعويض قيمة نصف القطر والسرعة من الفرعين (ج) و (د):

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{8000\ m/s}{2\pi(3.95 \times 10^{-6}\ m)} = 3.22 \times 10^8\ Hz$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{3.22 \times 10^8\ Hz} = 0.93\ m$$

وهذه القيمة تختلف بحوالي 0.8% ( 8 بالألف) فقط عن الطول الموجي المحسوب في الفرع (ب). وكما تبين في مناقشة مبدأ التوافق لبور فإن هذا التقارب هو بسبب القيمة الكبيرة لـ $n$، والتي كلما زادت قل الفرق لأن الأطوال الموجية أصبحت كبيرة جداً مقارنة مع قطر الذرة، فقلَّ تأثير الحسابات الكمية وتقاربت الفيزياء الكمية مع الفيزياء التقليدية.

(7) أثبت أن سرعة الإلكترون في المدار $n$ في ذرة بور يُعطى بالعلاقة $(v_n = ke^2/n\hbar)$.

الحل: وفق قانون نيوتن الثاني لمحور نصف القطر $(F = ma)$ فإن القوة الكهربائية المؤثرة على الإلكترون $ke^2/r^2$ تساوي حاصل ضرب كتلته $m_e$ بالتعجيل المركزي $v^2/r$ كما في المعادلة 6.8:

$$k\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{ke^2}{m_e r}$$

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{m_e ke^2}$$

وباستعمال المعادلة 6.10 :

$$v_n^2 = \frac{ke^2}{m_e(n^2\hbar^2/m_e ke^2)} = \frac{(ke^2)^2}{n^2\hbar^2} \quad \rightarrow \quad v_n = \frac{ke^2}{n\hbar}$$

(8) ما هي الطاقة اللازمة لتأيين ذرة الهيدروجين (أ) عندما تكون في حالتها الأرضية، (ب) عندما تكون في الحالة $(n = 3)$؟

الحل: لتأيين الذرة عندما يكون الإلكترون في المستوى $n$ تُضاف كمية من الطاقة تُعطى بالعلاقة:

$$E = -E_n = \frac{13.6\ eV}{n^2}$$

(أ) لهذا ففي الحالة الأرضية $(n = 1)$ ستكون طاقة التأين: $(E = 13.6\ eV)$.

(ب) في المستوى $(n = 3)$ ستكون طاقة التأين:

$$E = \frac{13.6\ eV}{3^2} = 1.51\ eV$$

(9) ذرة هيدروجين في حالتها الأرضية، احسب: (أ) السرعة المدارية للإلكترون، (ب) الطاقة الحركية للإلكترون، (ج) الطاقة الكامنة الكهربائية للذرة.

الحل: (أ)

$$v_1 = \sqrt{\frac{ke^2}{m_e r_1}} = \sqrt{\frac{(9\times10^9\ N.m^2/C^2)(1.6\times10^{-19}\ C)^2}{(9.1\times10^{-31}kg)(5.3\times10^{-11}\ m)}} = 2.18\times10^6\ m/s$$

طريقة ثانية للحل:

$$v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n} \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{(1)\hbar}{m_e r_1} = \frac{1.054\times10^{-34}J.s}{(9.1\times10^{-31}kg)(5.3\times10^{-11}\ m)} = 2.18\times10^6\ m/s$$

طريقة ثالثة للحل:

$$v_n = v_1 = \frac{ke^2}{n\hbar} = \frac{(9\times10^9\ N.m^2/C^2)(1.6\times10^{-19}\ C)^2}{(1)(1.054\times10^{-34}J.s)} = 2.18\times10^6\ m/s$$

(ب)

$$E_k = \frac{1}{2}m_e{v_1}^2 = \frac{1}{2}(9.1\times10^{-31}kg)(2.18\times10^6\ m/s)^2$$
$$= 2.18\times10^{-18}J = 13.6\ eV$$

(ج)

$$U_1 = -\frac{ke^2}{r_1} = -\frac{(9\times10^9\ N.m^2/C^2)(1.6\times10^{-19}\ C)^2}{5.3\times10^{-11}\ m}$$

$$= -4.35 \times 10^{-18} J = -27.17\ eV$$

(10) تصادمت ذرتا هيدروجين رأساً برأس، وآلت الطاقة الحركية لهما إلى الصفر. وعند ذلك بَعثت كل ذرة فوتوناً بطول موجي $121.6\ nm$ بانتقال من المستوى $(n = 2)$ إلى $(n = 1)$. بأي سرعة كانت الذرتان تتحركان قبل الاصطدام؟

الحل: كل ذرة تخلت عن طاقتها الحركية بانبعاث فوتون، ولهذا:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = hf = h\frac{c}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ J.s)(3 \times 10^8\ m/s)}{121.6 \times 10^{-9} m} = 1.63 \times 10^{-18} J$$

ولهذا فإن السرعة قبل التصادم كانت:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.63 \times 10^{-18} J)}{1.67 \times 10^{-27} kg}} = 4.42 \times 10^4\ m/s$$

(11) ذرة هيدروجين في حالتها المتهيجة الأولى $(n = 2)$. احسب (أ) نصف قطر المدار، (ب) الزخم الخطي للإلكترون، (ج) الزخم الزاوي للإلكترون، (د) الطاقة الحركية للإلكترون، (هـ) الطاقة الكامنة للنظام، (و) الطاقة الكلية للنظام.

الحل: لاحظنا من خلال حساباتنا السابقة أن مقدار السرعة المدارية للإلكترون هو أقل من 1% من سرعة الضوء، ولهذا فلسنا بحاجة إلى استعمال معادلات النظرية النسبية.

(أ) $r_n = n^2 a_0 \quad \rightarrow \quad r_2 = 2^2(5.3 \times 10^{-11} m) = 2.12 \times 10^{-10} m = 0.212\ nm$

(ب) من المعادلة 6.9 : $(rm_e v = n\hbar)$

$$p = m_e v = \frac{n\hbar}{r} = \frac{2(1.054 \times 10^{-34} J.s)}{2.12 \times 10^{-10} m} = 9.94 \times 10^{-25}\ kg.m/s$$

(ج) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad L = rm_e v \sin\varphi = r_2 m_e v = r_2 p$

$$L = (2.12 \times 10^{-10} m)(9.94 \times 10^{-25}\ kg.m/s) = 2.1 \times 10^{-34} kg.m^2/s$$

طريقة أخرى للحل:

$$L = n\hbar = 2(1.054 \times 10^{-34} J.s) = 2.1 \times 10^{-34} J.s = 2.1 \times 10^{-34} kg.m^2/s$$

(د) $$v = \frac{p}{m_e} = \frac{9.94 \times 10^{-25}\ kg.m/s}{9.1 \times 10^{-31}\ kg} = 1.09 \times 10^6\ m/s$$

$$E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}(9.1 \times 10^{-31}\ kg)(1.09 \times 10^6\ m/s)^2 = 5.4 \times 10^{-19} J = 3.39\ eV$$

(هـ) $$U = k\frac{q_1 q_2}{r} = -\frac{ke^2}{r}$$
$$= -\frac{(9 \times 10^9\ N.m^2/C^2)(1.6 \times 10^{-19}\ C)^2}{2.12 \times 10^{-10} m}$$

$$U = -1.08 \times 10^{-18}\ J = -6.79\ eV$$

(و) $$E = E_k + U = 3.39\ eV - 6.79\ eV = -3.4\ eV$$

(12) ذرة هيدروجين في حالتها المتهيجة الثانية $(n = 3)$، جد (أ) نصف قطر مدار بور، (ب) طول موجة دي بروي للإلكترون في هذا المدار.

الحل : (أ)

$$r_n = n^2 a_0$$

$$r_3 = 3^2(5.3 \times 10^{-11} m) = 4.77 \times 10^{-10} m = 0.477\ nm$$

(ب) لحساب طول موجة دي بروي نحسب زخم الإلكترون أولاً:

$$p = m_e v_3 = m_e \sqrt{\frac{ke^2}{m_e r_3}} = \sqrt{\frac{m_e k e^2}{r_3}}$$

$$= \sqrt{\frac{(9.1 \times 10^{-31} kg)(9 \times 10^9\ N.m^2/C^2)(1.6 \times 10^{-19}\ C)^2}{4.77 \times 10^{-10} m}} = 6.63 \times 10^{-25}\ kg.m/s$$

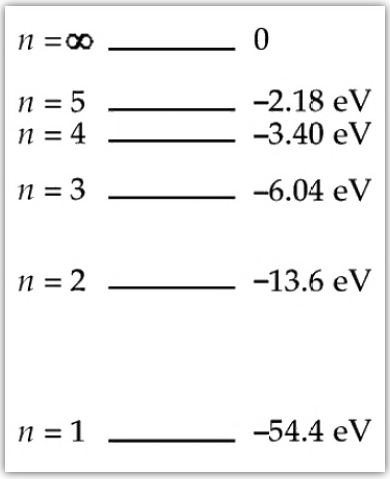
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ J.s}{6.63 \times 10^{-25} \text{kg}.m/s} = 9.99 \times 10^{-10} m = 0.999\ nm$$

(13) (أ) ارسم مخطط مستوى الطاقة لآيون الهيليوم $He^+$، والذي فيه $(Z = 2)$ باستعمال نموذج بور، (ب) ما هي طاقة التأين لآيون الهيليوم $He^+$ ؟

الحل: (أ) مستويات الطاقة لآيون يشبه الهيدروجين عدده الذري $Z$ يُعطى بالعلاقة 6.23:

$$E_n = -13.6\ eV\left(\frac{Z^2}{n^2}\right) = -13.6\ eV\left(\frac{2^2}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{54.4\ eV}{n^2} \qquad n = 1,2,3, \ldots$$




ولهذا فإن مخطط مستوى الطاقة لآيون الهيليوم حسب نموذج بور يُعطى بالشكل التالي ⊲

(ب) $(Z = 2)$ لآيون الهيليوم $He^+$، ولهذا فإن طاقة التأين التي هي الطاقة اللازمة لنقل الإلكترون من الحالة $(n = 1)$ إلى $(n = \infty)$ ستكون:

$$E = E_\infty - E_1 = 0 - \frac{-54.4\ eV}{1^2} = 54.4\ eV$$

## فهرست الفصل السادس


| الموضوع | الصفحة |
|---|---|
| 6-1: طيف ذرة الهيدروجين | 1 |
| 6-2: نموذج بور لذرة الهيدروجين | 3 |
| 6-3: الموجات الإلكترونية ونموذج بور | 6 |
| 6-4: الطاقة الكلية لذرة الهيدروجين | 9 |
| 6-5: اخفاقات نظرية بور | 13 |
| 6-6: مبدأ التوافق لبور | 13 |
| 6-7: حركة نواة الهيدروجين | 16 |
| أسئلـة | 24 |
| مسائل محلولة | 26 |


## مصادر الفصل السادس


1- أساسيات الفيزياء، ف. بوش، ترجمة طبعة سنة 1977.

2- الفيزياء الذرية، د. طالب ناهي الخفاجي و د. عباس حمادي و د. هرمز موشي.

3- مفاهيم في الفيزياء الحديثة، آرثر بايزر، ترجمة الطبعة الثانية.

4- Concepts of Modern Physics, Arthur Beiser, 6th ed. 2003.

5- Fundamentals of physics- Halliday, Resnick, Walker, 10th ed. 2014.

6- Introduction to Atomic and Nuclear Physics, Semat and Albright, 5th ed. 1972.

7- Modern Physics, A. Serway, J. Moses and A. Moyer, 3rd ed. 2005.

8- Modern Physics, Paul A. Tipler and Ralph A. Llewellyn, 5th ed. 2008.

9- Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, A. Serway and W. Jewett, 10th ed. 2019.

10- University Physics with Modern Physics, Young and Freedman, 15th ed, 2020.