Mechanics

Physics

The First Stage
First Semester

Vectors

Dr. Hanaa Al-Taay

The branches of physics are divided into:

1−Classical Physics

Such as mechanics, heat, sound and optics

2-Modern Physics

Like quantum mechanics and atomism

Units and Dimensions

1− Units

النظام المعتمد للوحدات هو النظام العالمي (SI) وقد اتفق عليه في المؤتمر الحادي عشر للاوزان والمقاييس في باريس عام (1960) ويعرف بنظام (MkgSA)

Length	الطول	(Meter)
Mass	الكتلة	(kilo gram)
Time	الزمن	(Second)
Current	التيار	(Amper)

• Derived Units

- السرعة = $\frac{\text{ازاحة}}{\text{زمن}}$ = $\frac{M}{S}$ = Ms^{-1}
- التعجيل = $\frac{\text{متغير السرعة}}{\text{زمن}}$ = $\frac{Ms^{-1}}{s}$ = Ms^{-2}
- الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$ = $\frac{Kgm}{M^3}$ = $Kgm\ .\ M^{-3}$
- القوة = الكتلة × التعجيل = $Kgm\ .\ M\ .\ S^{-2}$
- الشغل = القوة × الازاحة = $Kgm\ .\ M.\ S^{-2}\ .\ M \Leftarrow Kgm.\ M^2.\ S^{-2}$
- القدرة = $\frac{\text{الشغل}}{\text{الزمن}}$ = $\frac{KgM^{-2}S^{-2}}{S}$ = KgM^2S^{-3}

Vector

تصنف الكميات الاساسية المقاسة في الفيزياء الى صنفين رئيسين هما:

1. الكميات غير المتجهة (العددية) **non-vector quantities:**

They are the quantities that define a whole designation by saying only their quantity, i.e., they have no direction. Examples include length, temperature, mass, density, charge, and volume, each of which only has a quantity and no direction

2. الكميات المتجهة **vector quantities :**

They are the quantities that define a whole designation by mentioning their magnitude and direction, such as displacement, velocity, and force, each of which can be shown by an arrow whose length is a vector and whose direction is the vector's direction

يرمز للكمية المتجهة بحرف عليه سهم مثلاً $\vec{A}$ اما مقدار المتجه فيمثل فقط A

متجه الوحدة Unit vector

هو متجه مقداره وحدة واحدة ويمكن التعبير عن المتجه $\vec{A}$ الذي يوازي متجه الوحدة U بالشكل الآتي:

$$\vec{A} = {}_{U} A$$

خصائص المتجهات

1. يتساوى اي متجهين اذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه مثلاً $\vec{A} = \vec{B}$
2. اذا كان المتجهان متعاكسان فإن $\vec{A} = \overrightarrow{-B}$
3. تخضع الكميات المتجهة لقانون التبادل في الجمع اي ان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{B}$

مركبات المتجه Components of Vector

ان اي متجه يمكن اعتباره مجموع متجهين او اكثر. بمعنى اخر ان للمتجه مركبات عندما تجتمع تنتج هذا المتجه. فمركبة المتجه يمثل مسقط المتجه على المحاور الاساسية. اذ تم اعتماد نظام الاحداثيات المتعامدة او الاحداثيات الديكارتية وكما يأتي:

مثلا في المستوى XY يعني استعمال

المحاور Y , X   X – axis , Y – axis

يتحلل المتجه $\vec{A}$ الى مركبتين الاولى باتجاه المحور X والآخر باتجاه المحور Y ويمثلان $\overrightarrow{Ax}$. $\overrightarrow{Ay}$ على التتالي .

ويكون حاصل جمعهما المتجه $\vec{A}$

$$\vec{A} = \overrightarrow{Ax} + \overrightarrow{Ay}$$

عند التعبير عن المتجه $\vec{A}$ بدلالة متجهان الوحدة باتجاه المحاور يكون كالآتي:

$\vec{A}$ = Ux Ax + Uy Ay

لقد تم الاتفاق عالمياً ان متجهان الوحدة للمحاور الاساسية المتعامدة تكون كالآتي:

وحدة المتجه باتجاه المحور X –

وحدة المتجه باتجاه المحور y –

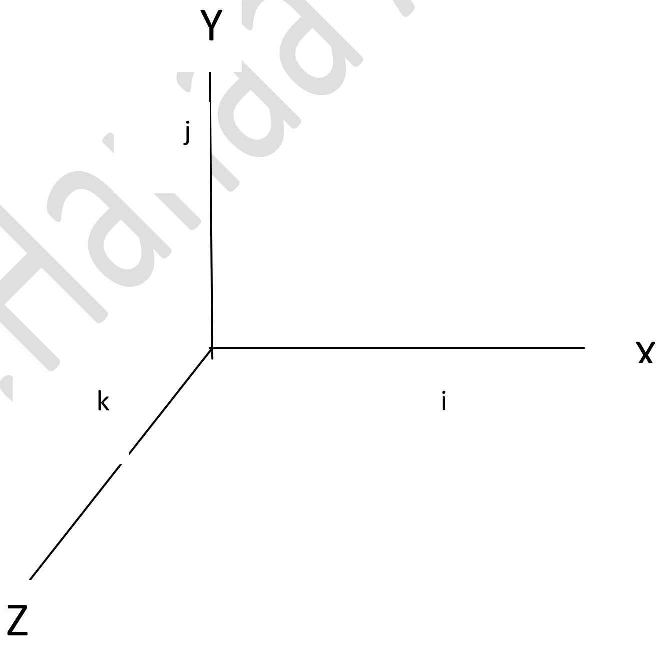
وحدة المتجه باتجاه المحور Z –

$$\vec{A} = \overrightarrow{iAx} + \overrightarrow{jAy}$$

اذا كانت θ هي الزاوية المحصورة بين المتجه $\vec{A}$ والاحداثي X – axis لذا يمكن ايجاد مركبات المتجه Ax , Ay وكما يأتي:

Ax = A cos θ

Ay = A sin θ



Magnitude of Vector

يرمز المقدار المتجه $\underset{A}{\rightarrow}$ بالرمز A او $\left|\underset{A}{\rightarrow}\right|$ ويعطى بالعلاقة:

$$A = \left|\underset{A}{\rightarrow}\right| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Az^2}$$

حيث: A_x , A_y , A_z مركبات المتجه على المحاور الاساسية Z,Y,X على التالي:

اما اتجاه المتجه فيعطي بالعلاقة الاتية ووفقاً للرسم اعلاه

$$\text{Tan } \theta = \frac{Ay}{Ax} \Longrightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{Ay}{Ax}$$

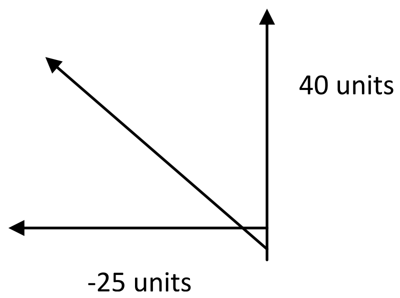
حيث θ هي الزاوية المحصورة بين المتجه A والاحداثي X–axis

Ex 1/ What is the serious axis and the direction of a vector whose components are in the (−25 units) (x−axis) x− and whose components in the (40 units) (y−axis) y−axis directions?

يمكن كتابة مركبات المتجه بدلالة الاحداثي y , x

$$\underset{A}{\rightarrow} = iAx + jAy$$

$$\underset{A}{\rightarrow} = -25i + 40j$$



لحساب مقدار المتجه نستعمل القانون الاتي:

$$A = \left|\underset{A}{\rightarrow}\right| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

$$A = \sqrt{(-25)^2 + (40)^2} = \sqrt{625 + 1600}$$

$$\therefore A = 47 \text{ units}$$

لإيجاد اتجاه المتجه نستعمل القانون الاتي:

$$\text{Tan } \theta = \frac{AY}{Ax} \longrightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{Ay}{Ax}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{40}{-25} \Longrightarrow \theta = \tan^{-1}(-1.6) \Longrightarrow \theta = -58^{\circ}$$

جمع المتجهات Vector Collection

The directional addition of a number of vectors of a certain type (force vectors, for example) represents the resultant of these vectors and is called the resultant vector. The vector addition process can take one of the following cases:

1. اذا كان المتجهان متوازيين وبنفس الاتجاه فمعادلة الجمع الاتجاهي لهما تعطى كالآتي:

$\underset{C}{\rightarrow} = \underset{A}{\rightarrow} + \underset{B}{\rightarrow}$ $\qquad \underset{A}{\rightarrow}$

$\longrightarrow \underset{B}{\rightarrow}$

2. اذا كان المتجهان متعاكسين فمعادلة الجمع الاتجاهي لهما تعطى كالآتي:

$\underset{C}{\rightarrow} = \underset{A}{\rightarrow} + \left(\underset{-B}{\rightarrow}\right)$ $\qquad \underset{A}{\rightarrow}$

$= \underset{A}{\rightarrow} - \underset{B}{\rightarrow}$ $\qquad \underset{B}{\rightarrow}$

$\underset{C}{\rightarrow} \longleftarrow$

تشير هذه المعادلة ايضاً الى الفرق بين المتجهين.

3. اذا كان المتجهان في بعدين اي بينهما زاوية θ فهناك طريقتان لإيجاد المحصلة المتجهة هما:

a- طريقة الرسم (طريقة متوازي الاضلاع لجمع المتجهات) .

b. الطريقة الحسابية .

في الطريقة الحسابية يتم استعمال قانون الجيب تمام (Law of cosines) لإيجاد مقدار المتجه المحصلة ويعطى:

C = $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

ولإيجاد اتجاه المحصلة يتم ذلك من خلال ايجاد قيمة الزاوية المحصورة بين المتجه المحصلة وبين اي من المتجهين $\underset{A}{\rightarrow}$, $\underset{B}{\rightarrow}$ كما في الرسم ادناه

$$\frac{C}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin B} = \frac{B}{\sin\theta}$$

تدعى هذه المعادلة بقانون الجيوب (Law of Sines)

ضرب المتجهات Vector Product

1. الضرب العددي Scalar Product

يرمز للضرب العددي بين المتجهين $\underset{B}{\rightarrow}, \underset{A}{\rightarrow}$ بالرمز $\underset{B}{\rightarrow}.\underset{A}{\rightarrow}$ ويقرأ ($\underset{B}{\rightarrow} dot \rightarrow$) كما ويعرف ايضاً بالضرب النقطي

- ناتج الضرب العددي كمية عددية يمكن الحصول عليها من ضرب مقدار المتجهين $\underset{B}{\rightarrow}, \underset{A}{\rightarrow}$ وجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما كما يأتي:

$$\underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = AB \cos\theta$$

Some properties of numerical multiplication

1. اذا كانت الزاوية بين المتجهين تساوي صفر $\theta = Zero \Rightarrow \cos\theta = 1$

عندما يكون المتجهين متساويين اي ان $\underset{A}{\rightarrow} = \underset{B}{\rightarrow}$

$$\underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = AB \Rightarrow \underset{A}{\rightarrow}.\underset{A}{\rightarrow} = A\,A = A^2 \Longrightarrow \underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = A^2$$

2. اذا كان المتجهان متعامدين اي ان $\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos\theta = zero$ عندها يكون الضرب العددي مساوياً للصفر اي ان

$$\underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = AB\cos 90 = 0$$

3. من تعريف الضرب العددي نلاحظ انه يخضع لقانون التبادل اي ان لان $\cos\theta$ متساوية في كلا الحالتين.

4. يخضع الضرب العددي لقانون التوزيع في الجمع اي ان

$$\underset{C}{\rightarrow}.\left(\underset{A}{\rightarrow} + \underset{B}{\rightarrow}\right) = \underset{C}{\rightarrow}.\underset{A}{\rightarrow} + \underset{C}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow}$$

عند التعبير عن المتجهين $\underset{A}{\rightarrow}$, $\underset{B}{\rightarrow}$ بدلالة مركباتها نحصل على ما يأتي:

$\underset{A}{\rightarrow} = i\,Ax + j\,Ay + k\,Az \qquad \underset{B}{\rightarrow} = iB\,x + jB\,y + kB\,z$

$\underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = (i\,Ax + j\,Ay + k\,Az)\ .\ (iB\,x + jB\,y + kB\,z)$

$\therefore\ \underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow}$ = AxBx + AyBy + AzBz

(i.i = j.j = k.k = 1) (i.j= i.k= j.i= j.k= k.i=k.j= 0)

يمكن استعمال الضرب العددي لإيجاد الزاوية المحصورة بين اي متجهين:

$\underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\text{AxBx} + \text{AyBy} + \text{AzBz}}{AB}$

Ex 2/ Find the angle between the two vectors

؟ $\underset{B}{\rightarrow}$ = − I + j + 2k and $\underset{A}{\rightarrow}$ = 2i + 3j − k

$\underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$

$\underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow}$ = AxBx + AyBy + AzBz

$= (2)(-1) + (3)(1) + (-1)(2)$

$\underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = -2 + 3 - 2 \Rightarrow \underset{A}{\rightarrow}.\underset{B}{\rightarrow} = -1$ unit

$A = \left|\underset{A}{\rightarrow}\right| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Az^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} =$

$\sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$ unit

$B = \left|\underset{B}{\rightarrow}\right| = \sqrt{Bx^2 + By^2 + Bz^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} =$

$\sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$ unit

$\therefore \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{-1}{(3.7416)(2.4494)} = \frac{-1}{9.1646}$

$\text{Cos}\ \theta = \frac{-1}{9.1646} \Rightarrow \cos\theta = -0.1091$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(-0.1091)$

$\Theta = 96.26$

Ex3/ If the vector $\underset{A}{\rightarrow}$ Vertical to the vector $\underset{B}{\rightarrow}$

Calculate the value of a where

$\underset{B}{\rightarrow} = 2ai + aj - 4k$

$\underset{A}{\rightarrow} = ai - 2j + k$

$\underset{A}{\rightarrow} \cdot \underset{B}{\rightarrow} = AxBx + AyBy + AzBz$

$= (a)(2a) + (-2)(a) + (-4)$

$= 2a^2 - 2a - 4$

$|A| = \sqrt{a^2 + 4 + 1} = \sqrt{a^2 + 5}$

$|B| = \sqrt{4a^2 + a^2 + 16} = \sqrt{5a^2 + 16}$

$\underset{A}{\rightarrow} \cdot \underset{B}{\rightarrow} = |A||B| \text{ Cos } 90$

$2a^2 - 2a - 4 = \sqrt{a^2 + 5}\,\sqrt{5a^2 + 16} \cos 90$

$2a^2 - 2a - 4 = 0$

$(2a + 2)(a - 2) = 0 \Longrightarrow$ اما $2a + 2 = 0$

$2a = -2 \Longrightarrow a = -1$

او $a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 2$

الضرب الاتجاهي Vector Product

يرمز للضرب الاتجاهي بين المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ بالرمز $\vec{A} \times \vec{B}$ ويقرأ $\left(\vec{A}\ \ cross\ \vec{B}\right)$

ناتج الضرب الاتجاهي هو متجه (ليس كمية عددية كما في حالة الضرب العددي) عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ ويعين اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى ويعبر عنه بالمعادلة الاتية:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\ U$$

حيث U هو متجه الوحدة باتجاه المتجه $\vec{C}$ الناتج عن الضرب الاتجاهي ويعطي مقدار هذا المتجه بالعلاقة: $C = \left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| AB \sin\theta$

<u>Some properties of vector multiplication</u>

1. من تعريف الضرب الاتجاهي وحسب قاعدة اليد اليمنى نستنتج بأن الضرب الاتجاهي لا يخضع لقانون التبادل اي ان:

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{A}$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{A}$$

2. اذا كان المتجهان متوازيين $(\theta = 0 \implies Sin\,\theta = 0)$ هذا يعني ان الضرب الاتجاهي يساوي صفر $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

3. الضرب الاتجاهي يخضع لقانون التوزيع في الجمع اي ان:

$$\vec{C} \times \left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B}$$

عند التعبير عن المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بدلالة مركباتها نحصل على ما يأتي:

$\vec{A} \times \vec{B} = (iA\,x + jA\,\;y + kA\,z) \times (iB\,x + jB\,y + kB\,z)$

$\therefore\ \vec{A} \times \vec{B} = (AyBz - AzBy)\mathrm{i} + (AzBx - AxBz)j + (AxBy - AyBx)\mathrm{k}$

يمكن التعبير عن المعادلة الاخيرة التي تمثل ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين بدلالة المحدد كما يأتي:

Ex4/

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\vec{A} \times \vec{B} = \big((1)(2) - (-1)(-1)\big)i + \big((-1)(1) - (2)(2)\big)j + \big((2)(-1) - (1)(1)\big)\,\mathrm{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = (2-1)\mathrm{i} + (-1-4)\mathrm{j} + (-2-1)\mathrm{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = \mathrm{i} - 5\mathrm{j} - 3\mathrm{k}$

$\therefore$ الناتج كمية متجهة يمكن ايجاد مقدارها كالآتي:

$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 25 + 9}\ \sqrt{35}$ units

Ex $5/$ Find the parallelogram's area if it's opposite sides is

$\underset{A}{\rightarrow} = 2i + 3j - k$

$\underset{B}{\rightarrow} = -i + j + 2k$

$$\underset{A}{\rightarrow} \times \underset{B}{\rightarrow} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \big((3)(2) — 1\big)(+1)i + \big((-1)(-1) - (2)(2)\big)j \quad +$$

$$\big((2)(1) - (3)(-1)\big)k$$

$= (6+1)\ i \ + \ (1-4)j \ + \ (2+3)k$

$= 7i \ - 3j \ + 5k$

ولما كانت مساحة متوازي الاضلاع هي مقدار $\underset{B}{\rightarrow} \times \underset{A}{\rightarrow}$ اذن

$$\underset{A}{\rightarrow} \times \underset{B}{\rightarrow} = \sqrt{(7)^2 + \ (-3)^2 + \ (3)^2}$$

$$= \sqrt{49 + 9 + 25} = 9.11 \ \text{units}$$

Ex6/ Find the angle positions between the two vectors defined as follows: $\vec{A} = 3i - 4j$ $\vec{B} = -2i + 3k$?

A.B= AB Cos θ

A= $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

B= $\sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3.6$

A.B= (iAx+jAy).(iBx+kBz)

$= -6$

Cos $\theta = -6/18 = -0.333$

$\theta =$ Cos $^{-1}(-0.333) = 110$

Ex7/ You have the two vectors $\vec{A} = 3i - 4j$ $\vec{B} = -2i + 3k$

Find the vector C=AXB?

C=AXB $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

C=AXB=(3i−4j)X(−2i+3k)

$= i\{(-4x3)-(0x0)\} + j\{(0x-2)-(3x2)\} + k\{(3x0)-(-4x0)\}$

$= -12i - 9j - 8k$

H.W/ Find the angle between the two vectors

$\vec{A} = 2i + 2j - k$

$\vec{B} = 6i - 3j + 2k$