المحاضرة 4 من كورس 2

معكوس المصفوفة

معكوس المصفوفة

يقصد به المعكوس الضربي للمصفوفة بحيث يكون حاصل ضرب المصفوفة في معكوسها يساوى مصفوفة الوحدة.

المصفوفة الشاذة :

المصفوفة الشاذة (singular matrix) هي المصفوفة التي ليس لها معكوس ويمكن تحديد ما إذا كانت المصفوفة شاذة أو لا إذا كانت $|A| = 0$ فهي مصفوفة شاذة .

إيجاد معكوس المصفوفة :

يمكن إيجاد معكوس المصفوفة من القانون التالي : $A^{-1} = \frac{[Adj\ (A)]^{T}}{|A|}$

لايجاد معكوس المصفوفة :

* نجد محدد المصفوفة والتأكد أنه لا يساوى صفر .

* نجد المصفوفة المرتبطة (المرافقة أو المصاحبة) .

* نجد المعكوس المصفوفة حسب القانون المعطى .

الان سوف نتطرق الى مفهوم المصفوفة المرافقة او المصاحبة

مصفوفة المرافقات

اذا كانت $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]$ مصفوفة مربعة من سعة n فاننا نعرف العامل المرافق $\propto_{ij}$ لعنصر a_{ij} يحسب كالتالي :

$$Adj\,(A) = \begin{vmatrix} \propto_{11} & \propto_{12} & \propto_{13} \\ \propto_{21} & \propto_{22} & \propto_{23} \\ \propto_{31} & \propto_{32} & \propto_{33} \end{vmatrix} \quad , \propto_{ij} = (-1)^{\boldsymbol{i+j}}\, \mathrm{M}_{ij}$$

M_{ij}

يعرف بانه محدد مصفوفة الناتجة من حذف السطر i و العمود j

مثال : أوجد Adj المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

الحل :

نقوم بحذف الصف والعمود الواقع فيهما العنصر ونضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه ضرب عناصر القطر الآخر مع الأخذ بالاعتبار إشارة المحدد لكل عنصر :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

نأتي بالعنصر x_{11} والذي إشارته حسب المحدد + إذا نضرب المحدد بـ $+1$

$$\alpha_{11} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = +1(4-0) = 4$$

نأتي بالعنصر x_{12} والذي إشارته حسب المحدد – إذا نضرب المحدد بـ -1

$$\alpha_{12} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1(0-0) = 0$$

نكمل الحل على نفس الطريقة :

$$\alpha_{13} = +1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +1(0-2) = -2$$

$$\alpha_{21} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1(4-0) = -4$$

$$\alpha_{22} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +1(4-6) = -2$$

$$\alpha_{23} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1(0-2) = 2$$

$$\alpha_{23} = -1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -1(0-2) = 2$$

$$\alpha_{31} = +1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix} = +1(0-3) = -3$$

$$\alpha_{32} = -1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix} = -1(0-0) = 0$$

$$\alpha_{33} = +1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = +1(1-0) = 1$$

نقوم بصف العناصر الناتجة على شكل مصفوفة مرافقات .

إذاً مصفوفة المرافقات تساوي :

$$Adj\ (A) = \begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ -4 & -2 & 2\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

حالة خاصة : حينما تكون المصفوفة 2×2 فلإيجاد مصفوفة المرافقات لها نقوم بما يلي :

نبدل عناصر القطر الرئيسي .

نقلب إشارة عناصر القطر الآخر .

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ (A) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

خواص معكوس المصفوفة

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

مثال :جد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$A^{-1} = \frac{[Adj\ (A)]^T}{|A|}$$

اولا نأتي بـ $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{matrix}$$

$$=[1(3)(4) + 2(2)(3) + 3(2)(3)] - [3(3)(3) + 3(2)(1) + 4(2)(2)]$$
$$= (12 + 12 + 18) - (27 + 6 + 16)$$
$$= 42 - 49$$
$$= -7$$

ثانياً نأتي بـ
$Adj\ (A)$

$$\propto_{11} = +1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +1(\,12 - 6\,) = 6$$

$$\propto_{12} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1(8 - 6) = \; -2$$

$$\propto_{13} = +1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = +1(\,6 - 9\,) = -3$$

$$\propto_{21} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1(\,8 - 9\,) = 1$$

$$\propto_{22} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +1(\,4 - 9\,) = -5$$

$$\propto_{23} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -1(\,3 - 6\,) = 3$$

$$\propto_{31} = +1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +1(\,4 - 9\,) = -5$$

$$\propto_{32} = -1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1(\,2 - 6\,) = 4$$

$$\propto_{33} = +1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +1(\,3 - 4\,) = -1$$

$$Adj\ (A) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}^{T}}$$

$$\boldsymbol{= -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}}$$

ملاحظة/ عند حساب المعكوس للمصفوفة من السعة (2×2) **لايؤخذ المنقول** للمصفوفة المرافقة ونكتفي فقط بالقسمة على محدد المصفوفة وكما في المثال التالي:

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, |A| = 12 - 2 = 10$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\boldsymbol{Adj(A)}}{\boldsymbol{|A|}}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$