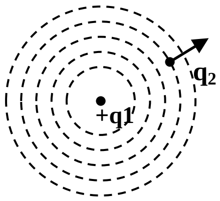
الفصل الثاني
المجال الكهربائي The Electric Field

1-2 المجال الكهربائي The Electric Field

تؤثر الأرض بقوة على الأجسام الموجودة في الفضاء القريب منها وعندها يقال بأن هذه الأجسام تقع في مجال جذب الأرض وبمعنى آخر هناك مجال جذب أرضي في الفضاء المحيط بالأرض، وكل جسم يقع ضمن هذا المجال يتعرض إلى قوة جذب الأرض $(\bar{F})$ فيتعجل نحو الأرض بمقدار التعجيل الأرضي (g)، أي أن $(\bar{g})$ هي مقياس لشدة مجال الجذب الأرضي ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{g} = \frac{\bar{F}}{m} \quad .... (1)$$

وبشكل مناظر فإن الحيز المحيط بالجسم المشحون يتأثر بوجود الجسم المشحون وإن هناك مجال كهربائي في هذا الحيز سببه الشحنة الكهربائية أو الجسيم المشحون، فإذا قربت شحنة ما من هذا الجسيم المشحون فإنها سوف تتعرض إلى قوة كهربائية، إذا كانت واقعة ضمن المجال الكهربائي. فقد صور العالم فاراداي التأثير المتبادل بين الأجسام المشحونة بأنه يكمن بطريقة ما في الفضاء الذي يفصل بين الجسمين، فالشحنة (q_1) كما في الشكل المجاور تحدث مجالاً كهربائياً في الحيز المحيط بها وهذا المجال بدوره يؤثر على الشحنة (q_2) بقوة مقدارها $(\bar{F})$.



ويمكن تعريف المجال الكهربائي

إنه الحيز أو الفضاء الذي تظهر فيه آثار قوة كهروستاتيكية على أي شحنة توضع فيه وتمكن التأكد عملياً من وجود مجال كهربائي في نقطة ما، وبالتالي قياسه، وذلك بوضع جسم صغير يحمل شحنة اختبار مقدارها (q_o) (وقد اتفق على أن تكون موجبة للسهولة) في الموضع المراد اختبار المجال عنده وبقياس القوة الكهربائية (F) المؤثرة على (q_o) يمكن التعرف على وجود المجال وشدته.

وعلى هذا الأساس يعرف ***شدة المجال الكهربائي*** The Electric Field Strength (E)

القوة المؤثرة لوحدة الشحنة على شحنة الاختبار الموجبة الموضوعة عند تلك النقطة، أي أن:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q_o} \quad .... (2)$$

حيث أن $(\bar{E})$ تمثل شدة المجال الكهربائي ، وهي كمية اتجاهية ، واتجاهها نفس اتجاه القوة $(\bar{F})$.

وحدة شدة المجال $(\bar{E})$ هي: $E = \frac{F}{q} = \frac{\text{نيوتن}}{\text{كولوم}} = \frac{N}{C}$

q_o يجب أن تكون أصغر ما يمكن، حتى لا يؤثر مجالها على المجال الأصلي (E) ويغير مقداره واتجاهه.

∴ **التعريف الدقيق لشدة المجال الكهربائي هو**

$$\bar{E} = \lim_{q_o \to 0} \frac{\bar{F}}{q_o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

مثال (1)

ما مقدار شدة المجال الكهربائي $(\bar{E})$ بحيث لو وضع فيه إلكترون لتأثر بقوة كهربائية تساوي وزنه.

$F_e =$ القوة الكهربائية　,　$F_g =$ وزنه　$(mg) = F_g$

$\therefore\ F_e = F_g$

$$\bar{E} = \frac{F}{q} = \frac{F_g}{e} = \frac{m_e\, g}{e}$$

حيث $m_e =$ كتلة الإلكترون

$e =$ شحنة الإلكترون

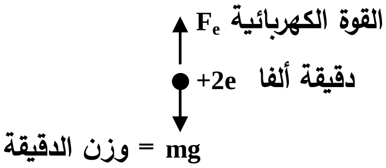
$$\therefore E = \frac{9.1\times10^{-31}\times 9.8}{1.6\times10^{-19}} = 5.6\times10^{-11}\ \frac{N}{C}$$

واجب

ما مقدار واتجاه المجال الكهربائي (E) اللازم لكي تتعادل القوة الكهربائية المؤثرة على دقيقة ألفا مع وزنها علماً أن كتلة دقيقة ألفا $(6.6 \times 10^{-27}\ Kg)$ وشحنتها $(+2e)$؟

$F_e = mg$

أكمل الحل بنفس طريقة المثال السابق



2-2 خطوط القوة الكهربائية　　Lines of Force

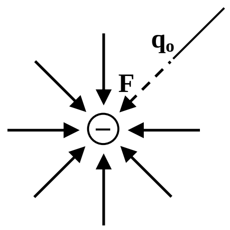
لقد اهتم العالم فراداي بفكرة خطوط القوة الكهربائية حيث لم يكن هذا العالم مقتنعاً بفكرة كون المجال الكهربائي (وكذلك المجال المغناطيسي) هو تعبير رياضي مجرد، لذا أدخل مفهوم خطوط القوة الكهربائية، حيث صورها كخيوط أو شعيرات تنفذ خلال المجال ولها خصائص فيزيائية كخاصية التنافر فيما بينها، وعدّها طريقة سهلة لتصور نماذج المجال الكهربائي وكذلك المجال المغناطيسي.

يعرّف خط القوة الكهربائية

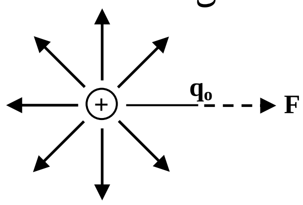
هو المسار الذي تسلكه شحنة اختبارية (q) موجبة موضوعة عند نقطة ما في المجال الكهربائي.

أ / خطوط القوة الكهربائية لمجال ناشيء عن شحنة نقطية معزولة (أو كرة مشحونة)

1) تكون الخطوط مستقيمة وبامتداد أنصاف الأقطار.
2) منبعثة من الشحنة بشكل شعاعي ومتجهة نحو الخارج إذا كانت الشحنة موجبة، ومتجهة نحو الداخل إذا كانت الشحنة سالبة.
3) قيمة (E) نفسها بجميع النقاط التي تقع على نفس المسافة من مركز الشحنة.
4) E غير ثابتة تتناقص بازدياد المسافة عن الشحنة.



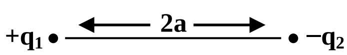
شحنة سالبة



شحنة موجبة

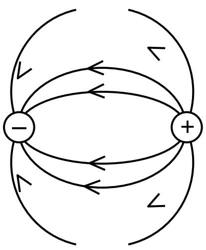
ب/ خطوط القوة الكهربائية لمجال ناشيء عن ثنائي القطب

ثنائي القطب عبارة عن تركيب يتكون من شحنتين نقطيتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الإشارة تفصلهما مسافة صغيرة.



تكون الخطوط

1) بشكل منحنيات.
2) تبدأ بالشحنة الموجبة وتنتهي بالشحنة السالبة.
3) لا تتقاطع خطوط القوة مع بعضها أبداً ولذلك لا يمكن أن يكون للمجال الكهربائي أكثر من اتجاه واحد عند نقطة معينة.



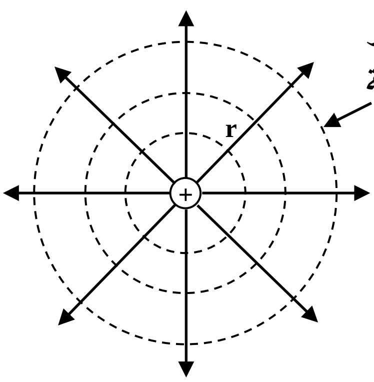
يمكن اعتبار كثافة خطوط القوة الكهربائية بمثابة مقياس لمقدار شدة المجال.

كثافة الخطوط

هي عدد الخطوط التي تقطع وحدة المساحة العمودية على اتجاه المجال عند النقطة المعينة.

كرة خيالية متحدة المركز مع الكرة المشحونة نصف قطرها (r)

عدد خطوط القوة لوحدة المساحة للمقطع العرضي عند أية نقطة على الكرة $= \frac{N}{4\pi r^2}$



شدة المجال الكهربائي تتناسب طرديا مع عدد خطوط القوة لوحدة المساحة

مساحة المقطع

$$E \propto \frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2}$$

حيث N = عدد خطوط القوة

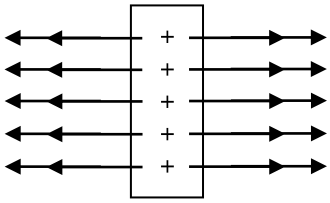
A = مساحة المقطع العرضي

وكذلك تتناسب شدة المجال الكهربائي عكسياً مع بعد النقطة عن الشحنة (r)

أي كلما ابتعدت النقطة كلما قلت شدة المجال $E \propto \frac{1}{r^2}$

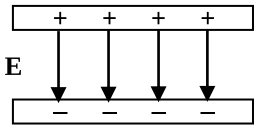
ج/ خطوط القوة الكهربائية لمجال ناشيء عن صفيحة مشحونة

تتباعـــد خطـــوط القـــوى الكهربائية بمسافات متساوية عن بعضها



صفيحة مشحونة بشحنة موجبة

د/ خطوط القوة الكهربائية لمجال بين لوحين متوازيين



1) قيمة شدة المجال الكهربائية ثابتة في جميع النقاط.

2) خطوط القوة مستقيمة ومتوازية ومنتظمة الكثافة.

2-3 أشكال المجال الكهربائي

يقسم المجال الكهربائي إلى:

1. مجال كهربائي منتظم

1) هو المجال الذي ينشأ بين صفيحتين مشحونتين متوازيتين.

2) خطوط المجال تكون متوازية والبعد بينهما متساوي.

3) مقدار المجال الكهربائي المنتظم ثابت في كل نقطة تقع في المجال أي أن عدد خطوط المجال التي تخترق وحدة المساحة العمودية ثابت عند أي نقطة.

4) اتجاه المجال الكهربائي المنتظم ثابت في كل نقطة في المجال.

2. مجال كهربائي غير منتظم

1) هو المجال الذي ينشأ عن الشحنات المنفردة.

2) خطوط المجال غير المنتظم تتباعد عن بعضها كلما ابتعدنا عن الشحنة.

3) مقدار المجال الكهربائي غير المنتظم متغير في كل نقطة في المجال أي أن عدد خطوط المجال التي تخترق وحدة المساحة العمودية لا يكون ثابتاً.

4) اتجاه المجال متغير في كل نقطة في المجال.

2-4 صفات خطوط المجال الكهربائي

1. خطوط المجال تبتعد عن الشحنة الموجبة وتتجه نحو الشحنة السالبة.
2. تتباعد خطوط المجال لشحنة منفردة كلما ابتعدنا عن الشحنة أي أن كثافتها (عددها الذي يخترق وحدة المساحة) تقل مع ازدياد بعدها عن الشحنة.
3. تتناسب شدة المجال الكهربائي طردياً مع عدد خطوط المجال المارة عمودياً على وحدة المساحة **أي تدل كثافة الخطوط في منطقة ما على مقدار المجال في تلك المنطقة.**

N = عدد خطوط القوى الكهربائية

$$E \propto \frac{N}{A}$$

A = مساحة المقطع العرضي

4. يدل اتجاه المماس لخط المجال في نقطة ما على اتجاه المجال عند تلك النقطة.
5. خطوط المجال الكهربائي لا تتقاطع لأنه لا يكون لشدة المجال الكهربائي عند نقطة إلا اتجاه واحد.

2-5 حركة الجسيمات المشحونة في المجال الكهربائي

لو وضع جسيم يحمل شحنة مقدارها (q) (ولتكن موجبة) في مجال كهربائي منتظم لتأثر بقوة قدرها F وإن هذا الجسيم يتحرك بتعجيل ثابت قدره (حسب قانون نيوتن الثاني)

$$E = \frac{F}{q} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \quad \longrightarrow \quad F = qE$$

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

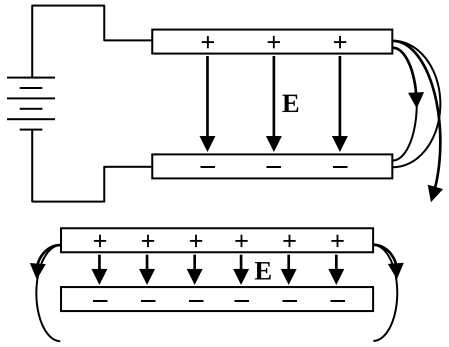
ومن تعويض قيمة F من معادلة (1) في (2) ينتج:

حيث m = كتلة الجسيم المشحون

$$a = \frac{qE}{m}$$

المجال الكهربائي المنتظم

يمكن الحصول على هذا النوع من المجال وذلك بإيصال لوحين معدنيين إلى طرفي بطارية كهربائية وتكون خطوط المجال:



1. مستقيمة ومتوازية.
2. المسافة بين كل خطين متساوية.
3. كلما كانت المسافة بين اللوحين قليلة كلما كان المجال أكثر انتظاماً، حيث يكون التشويه في نهاية اللوحين قليل.

1- حركة الجسيم المشحون عندما يوضع ساكناً في المجال المنتظم

إذا وضع جسيم مشحون كتلته (m) وشحنته (q) ساكناً في مجال كهربائي منتظم (E).

∴ الجسم يتحرك بخط مستقيم وبتعجيل ثابت

$$a = \frac{qE}{m}$$

حركة الجسيم تشبه حركة الأجسام الساقطة على سطح الأرض تحت تأثير الجاذبية.

∴ **يمكن تطبيق قوانين الحركة ذات التعجيل الثابت وهي:**

سرعة الجسيم بعد زمن (t) $v = v_o + at$

السرعة الابتدائية للجسيم $v_o = 0$

$$\therefore v = at = \frac{qE}{m}t$$

المسافة العمودية (y) التي يقطعها الجسيم بعد نفس الزمن (t)

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{qE}{2m}t^2$$

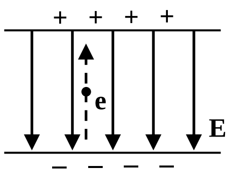
$$v^2 = v_o^2 + 2ay \qquad [v_o = 0]$$

$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{\frac{2qE}{m}y}$$

مثال (2)

وضع إلكترون ساكناً في مجال كهربائي منتظم شدته (10^4 N/C)، احسب:

1. التعجيل الذي يتحرك به الإلكترون.
2. سرعة الإلكترون بعد أن يقطع مسافة قدرها (1 cm).
3. طاقة الإلكترون بعد أن يقطع هذه المسافة.



بما أن شحنة الإلكترون سالبة.

∴ يتعجل الإلكترون بعكس اتجاه المجال أي نحو الأعلى.

$$1)\ a = \frac{qE}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{1.6\times10^{-19}\times10^4}{9.1\times10^{-31}} = 1.8\times10^{15}\ \frac{m}{sec^2}$$

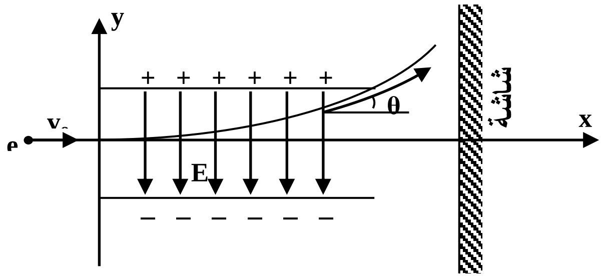
$$2)\ v^2 = v_o^2 + 2ay = 2ay\ \ [v_o = 0]$$

$$\therefore v = \sqrt{2ay} = \sqrt{2\times1.8\times10^{15}\times(1\times10^{-2})} = 6\times10^6\ \text{m/sec}$$

الطاقة الحركية $3)\ K = \frac{1}{2}mv^2$

$$K = \frac{1}{2}\times9.1\times10^{-31}\times(6\times10^6)^2 = 1.6\times10^{-17}\ J$$

2- حركة الجسيم المشحون عندما يقذف بسرعة عمودية على المجال



عندما يقذف الإلكترون (e) بسرعة ابتدائية (v_o) حيث يكون اتجاه (v_o) عمودياً على اتجاه (E) كما في الشكل المجاور ، تكون حركة الإلكترون مكونة من مركبتين:

1. الحركة الأفقية باتجاه المحور (x) وهي حركة ذات سرعة ثابتة

المسافة الأفقية $x = v_o t$ .... (1)

2. حركة عمودية باتجاه المحور (y) وهي حركة ذات تعجيل ثابت

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \quad .... (2)$$

من معادلة (1) $x = v_o t$

من تعويض قيمة (t) هذه $\leftarrow$ $\therefore t = \frac{x}{v_o}$

في معادلة (2) ينتج

$$y = \left(\frac{eE}{2m}\right)\left(\frac{x}{v_o}\right)^2$$

$$y = \left(\frac{eE}{2mv_o^2}\right)x^2 \quad .... (3)$$

معادلة (3) هي معادلة مسار الإلكترون في المجال الكهربائي وهي معادلة قطع مكافئ (Parabola)

وبواسطة هذه المعادلة يمكن حساب الانحراف الذي يحدث في مسار الإلكترون عند أية نقطة واقعة تحت تأثير المجال الكهربائي وعند خروج الإلكترونات من المجال بين اللوحين فإنها تنطلق باتجاه المماس للقطع المكافئ عند نقطة خروجها بسرعة ثابتة وبهذا تنحرف الإلكترونات عن اتجاه مسارها الأصلي بزاوية θ، ويمكن معرفة الانحراف الذي يطرأ على مسار الإلكترونات بوضع شاشة متفلورة على بعد مسافة معينة من اللوحين، حيث تظهر بقعة صغيرة مضيئة على الشاشة في موضع اصطدام الإلكترونات بها، وهذه هي الفكرة الأساسية لعمل راسمة الذبذبات الأشعة المهبطية (أو الكاثودية).

مثال (3)

أطلق إلكترون بسرعة قدرها $(5 \times 10^6\ m/s)$ بصورة موازية لمجال كهربائي شدته $(1000\ N/C)$ وبنفس اتجاهه:

1. احسب طول المسافة التي يقطعها الإلكترون في المجال حتى يصل لحظياً إلى السكون.
2. ما مقدار الزمن اللازم لذلك؟

1/ $v^2 = v_o^2 + 2ay$

$v_o = 5 \times 10^6\ m/s$

$v = 0$

$$0 = (5\times10^6)^2 - \frac{2eE}{m}y$$

$$\therefore y = \frac{(5\times10^6)^2 \times 9.1\times10^{-31}}{2\times1.6\times10^{-19}\times10^3} = 71.09\times10^{-3}\ m$$

2/ $v = v_o + 2at$

$$0 = (5\times10^6) - \left(\frac{eE}{m}\right)t$$

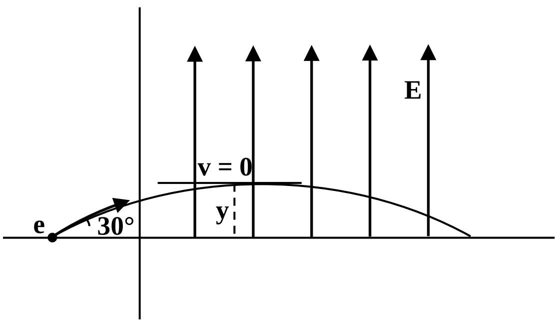
$$\therefore t = \frac{(5\times10^6)\times9.1\times10^{-31}}{1.6\times10^{-19}\times10^3} = 28.43\times10^{-9}\ \sec$$

مثال (4)

قذف إلكترون في مجال كهربائي منتظم شدته $(5 \times 10^4\ N/C)$، فإذا كانت السرعة الابتدائية للإلكترون $(10^8\ m/sec)$ وباتجاه يصنع زاوية قدرها $30°$ مع الأفق، وكان اتجاه المجال شاقولياً نحو الأعلى، احسب:

أ. تعجيل الإلكترون، ب. أقصى ارتفاع يصله الإلكترون،

جـ. أقصى مسافة أفقية (range) يقطعها الإلكترون.



1/

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{eE}{m}$$

$$a = \frac{1.6\times10^{-19}\times5\times10^4}{9.1\times10^{-31}} = 0.879\times10^{16}$$

2 /

$v_{oy} = v_o \sin 30°$

$v_{ox} = v_o \cos 30°$

$$v^2 = v_o^2 + 2ay$$

$$0 = (v_o \sin 30^\circ)^2 - \frac{2eE}{m}y$$

$$\therefore y = \frac{(v_o \sin 30^\circ)^2 m}{2eE} = 0.1422\ m$$

3/

$$y_{max} = \frac{1}{2} a t^2$$

$$t^2 = \frac{2y}{a}$$

من تعويض قيم y المستخرجة من المعادلة السابقة في هذه المعادلة نحصل على قيمة الزمن (t)

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

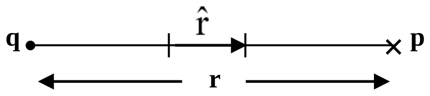
$$x = v_{ox} t = v_o \cos 30\ t = 10^8 \times 0.8 \sqrt{\frac{2 \times 0.1422}{0.879 \times 10^{16}}} = 4.48 \times 10^3\ m$$

تعوض في هذه المعادلة قيمة (t) المستخرجة من المعادلة السابقة، فنحصل على المسافة الأفقية التي يقطعها الإلكترون.

2-6 حساب شدة المجال الكهربائي E

1. شدة المجال الكهربائي لشحنة نقطية معزولة مقدارها (q).

(q) شحنة نقطية والمطلوب إيجاد شدة المجال الكهربائي عند نقطة p والتي تبعد مسافة مقدارها (r) من الشحنة (q)



نفرض وجود شحنة اختبارية (q_o) عند نقطة (p)

$$\therefore \bar{F} = \frac{Kqq_o}{r^2} \hat{r}$$

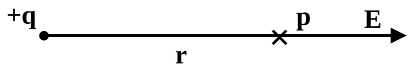
$\hat{r}$ وحدة المتجه من q إلى p

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q_o}$$

$$\therefore \bar{E} = \frac{Kqq_o / r^2}{q_o} \hat{r}$$

اتجاه (E) باتجاه $\hat{r}$ أي بالابتعاد عن q إذا كانت موجبة

$$\boxed{\therefore \bar{E} = \frac{Kq}{r^2} \hat{r}}$$



$$\boxed{\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

وباتجاه q إذا كانت سالبة

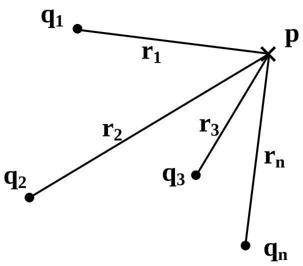
2. إيجاد (E) لعدد من الشحنات النقطية

لدينا عدد من الشحنات النقطية q_1، q_2، q_3، .... q_n والمطلوب إيجاد شدة المجال الكهربائي (E) لهذه الشحنات عند نقطة (p) التي تبعد المسافات r_1، r_2، r_3، .... r_n عن الشحنات.

نجد قيمة E_1 الناتجة عن q_1

نجد قيمة E_2 الناتجة عن q_2

نجد قيمة E_3 الناتجة عن q_3



$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}$$

$\vdots$

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_n}{r_n^2}\hat{r}$$

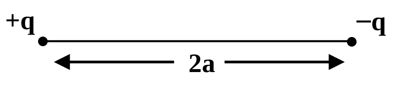
ثم نجمع هذه المجالات جمعاً اتجاهياً لنحصل على المجال الكلي (E) عند نقطة (p)

$$\overline{E} = \overline{E_1} + \overline{E_2} + \overline{E_3} \cdots \overline{E_n} =$$

$$\overline{E} = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{E_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{r_n^2}\hat{r}$$

3. المجال الناشيء عن ثنائي القطب Electric Dipole

يتكون ثنائي القطب كما مبين في الشكل من شحنتين نقطيتين متساويتين في المقدار إحداهما موجبة (+q) والأخرى سالبة، وتفصلهما مسافة قدرها (2a)



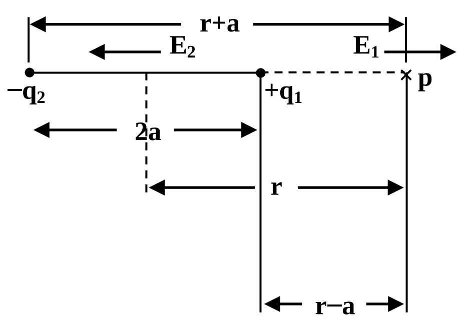
أولاً: عند نقطة p الواقعة على امتداد محور ثنائي القطب

لنفرض أن p تبعد مسافة (r) من مركز ثنائي القطب

$$\overline{E_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(r-a)^2}\hat{r} \;\; .... \; (1)$$

$$\overline{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(r+a)^2}\hat{r} \;\; .... \; (2)$$

$$\overline{E} = \overline{E_1} + \overline{E_2} \;\; .... \; (3)$$



وبالتعويض عن مقدار كل من E_1 و E_2 من معادلة (1) و (2) في معادلة (3) ينتج:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q}{(r-a)^2} - \frac{q}{(r+a)^2}\right]$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2}\right]$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{(r+a)^2 - (r-a)^2}{(r-a)^2(r+a)^2}\right]$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{r^2 + 2ar + a^2 - r^2 + 2ar - a^2}{(r^2 - a^2)^2}\right]$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{4ra}{(r^2 - a^2)^2}\right]$$

$a <<<< r$

أي أن المسافة بين الشحنتين صغيرة جداً مع (r) يمكن إهمال a^2 بالنسبة للمقدار r^2.

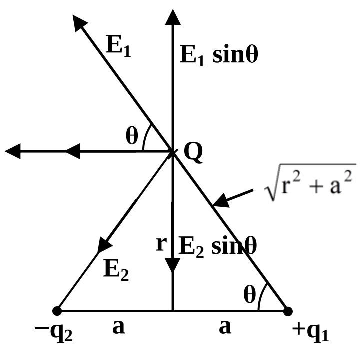
$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4ra}{r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4qa}{r^3}$$

p = 2aq = Electric Dipole Moment

العزم الكهربائي لثنائي القطب، وهو كمية اتجاهية من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة، وإن اتجاه E باتجاه محور x وعلى امتداد محور ثنائي القطب.

$$\boxed{\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2p}{r^3}}$$

ثانياً: عند نقطة Q الواقعة على العمود المنصف لمحور ثنائي القطب



لنفرض أن Q تبعد مسافة (r) عن مركز ثنائي القطب، عندئذ يكون المجال الناشيء عن الشحنة الموجبة (E_1) مساوياً إلى مقدار المجال الناشيء عن الشحنة السالبة (E_2).

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(r^2 + a^2)} \;............\; (1)$$

ولكي نجد المجال الكلي الناشيء عن شحنتي ثنائي القطب، نحلل كل من E_1 و E_2 إلى مركبتين إحداهما عمودية على محور ثنائي القطب والأخرى موازية له:

$E_y = E_1 \sin\theta - E_2 \sin\theta = 0$ .... (2)

$E_x = E_1 \cos\theta + E_2 \cos\theta$ .... (3)

وبالتعويض في معادلة (3) عن قيمة E_1 بما متساوي من معادلة (1) وعن $\cos\theta$ بما تساوي ينتج:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(r^2 + a^2)}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2qa}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

وإذا كانت (a) صغيرة جداً بالمقارنة مع (r) يمكن إهمال (a^2) في المقام وعندئذٍ تصبح المعادلة كما يلي:

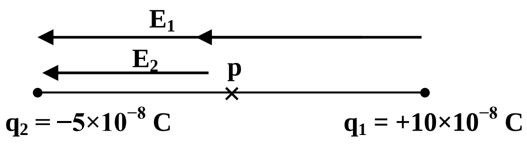
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2aq}{r^3}}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{P}{r^3}}$$ بدلالة عزم ثنائي القطب $[\,P = 2aq\,]$

س/ واجب/ قارن بين الحالتين لثنائي القطب من حيث الرسم والقانون ؟ وماذا تستنتج من الفرق بينهما من الناحية العلمية؟

مثال (5)

شحنتان نقطتيان مقدارهما $(+10 \times 10^{-8}\ C)$ و $(-5 \times 10^{-8}\ C)$ تفصلهما مسافة قدرها (20 cm). أ/ أوجد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي عند منتصف المسافة بينهما. ب/ لو وضع إلكترون في هذه النقطة فما مقدار واتجاه القوة الكهربائية المؤثرة عليه؟



أ. $$\overline{E_p} = \overline{E_1} + \overline{E_2}$$

بما أن اتجاه المجالين E_1 و E_2 بنفس الاتجاه

$$\therefore E_p = E_1 + E_2 = \frac{Kq_1}{r_1^2} + \frac{Kq_2}{r_2^2}$$

$$\therefore E_p = \frac{9\times10^9 \times 10\times10^{-8}}{(10\times10^{-2})^2} + \frac{9\times10^9 \times 5\times10^{-8}}{(10\times10^{-2})^2}$$

$$\therefore E_p = 90\times10^3 + 45\times10^3 = 135\times10^3\ \frac{N}{C}$$

واتجاه E عند النقطة p هو باتجاه محور (السالب −x)

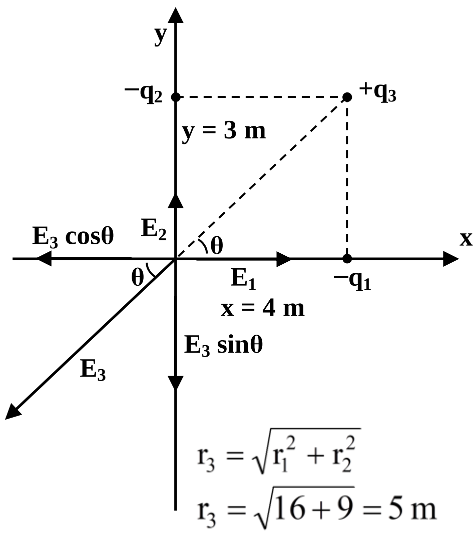
ب. $$E = \frac{F}{q}$$

$$\therefore F = Eq = eE = 1.6\times10^{-19} \times 135\times10^3 = 216\times10^{-16}\ N$$

مثال (6)

يبين الشكل ثلاث شحنات نقطية q_1، q_2، q_3 جميعها واقعة في المستوى (xy) ومثبتة في المواقع المؤشرة في الشكل. المطلوب حساب شدة المجال الكهربائي عند نقطة الأصل 0، علماً أن:

$q_1 = -16 \times 10^{-9}$ C, $q_2 = -3 \times 10^{-9}$ C, $q_3 = +50 \times 10^{-9}$ C,



نحسب أولاً شدة المجال الناشيء عن كل من الشحنات الثلاثة على انفراد طبقاً للمعادلة التالية: $E = \dfrac{Kq}{r^2}$

$$\therefore E_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2} = \frac{9\times10^9 \times 16\times10^{-9}}{(4)^2}$$

$$E_1 = 9\,\frac{N}{C}$$

$$E_2 = \frac{Kq_2}{r_2^2} = \frac{9\times10^9 \times 3\times10^{-9}}{(3)^2}$$

$$E_2 = 3\,\frac{N}{C}$$

$$E_3 = \frac{Kq_3}{r_3^2} = \frac{9\times10^9 \times 50\times10^{-9}}{(5)^2}$$

$$E_3 = 18\,\frac{N}{C}$$

اتجاه E_1 هو باتجاه x−الموجب

اتجاه E_2 هو باتجاه y−الموجب

اتجاه E_3 يصنع زاوية θ مع محور x كما مبين في الشكل.

ولإيجاد محصلة المجال E نحلل E_3 إلى مركبة أفقية باتجاه x وأخرى عمودية باتجاه y.

$$E_{3x} = -E_3 \cos\theta = -18 \times \frac{4}{5} = -14.4\,\frac{N}{C}$$

$$E_{3y} = -E_3 \sin\theta = -18 \times \frac{3}{5} = -10.8\,\frac{N}{C}$$

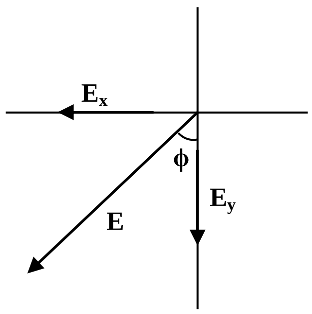
$$\therefore \sum E_x = E_1 - E_{3x} \cos\theta$$

$$\therefore E_x = 9 - 14.4 = -5.4\,\frac{N}{C}$$

$$\sum E_y = E_2 - E_{3y} \sin\theta$$

$$\sum E_y = 3 - 10.8 = -7.8\,\frac{N}{C}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$



$$E = \sqrt{(5.4)^2 + (7.8)^2} = 9.5\ \frac{N}{C}$$

أما الزاوية التي تصنعها المحصلة مع محور (y) من الجهة السالبة يمكن إيجادها من

$$\tan\phi = \frac{5.4}{7.8} = 0.692$$

$$\therefore \phi = 34.69$$

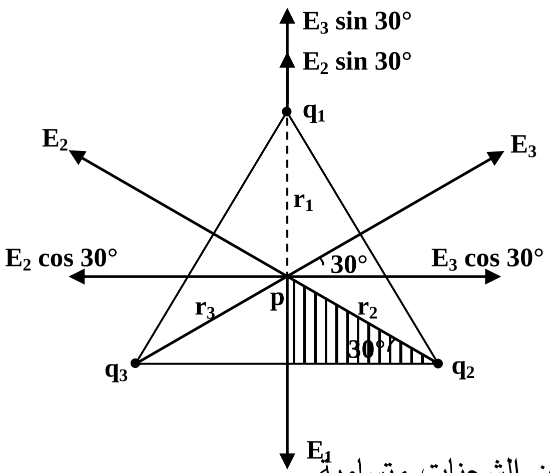
او الزاوية التي تصنعها المحصلة مع محور (x) من الجهة السالبة يمكن إيجادها من

$$\tan\phi = \frac{7.8}{5.4} = 1.44$$

$$\therefore \phi = 55.2$$

مثال (7)

ثلاث أجسام صغيرة كل منها يحمل شحنة مقدارها $(2 \times 10^{-6}\ C)$ وضعت على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه (3 cm). جد شدة المجال الكهربائي في مركز المثلث.



$$E_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2}$$

$$E_2 = \frac{Kq_2}{r_2^2}$$

$$E_3 = \frac{Kq_3}{r_3^2}$$

بما أن المسافة بين كل شحنة ومركز المثلث متساوية

$$\therefore\ r_1 = r_2 = r_3 = r$$

وبما أن الشحنات متساوية

$$q_1 = q_2 = q_3 = 2 \times 10^{-6}\ C$$

$$\therefore\ E_1 = E_2 = E_3 = E = \frac{Kq}{r^2}$$

لإيجاد (r) بعد أي شحنة عن مركز المثلث، نأخذ المثلث المبين في الشكل

$$\cos 30^\circ = \frac{1.5}{r}$$

$$\therefore r = \frac{1.5}{\cos 30^\circ} = \frac{1.5}{0.866} = 1.732cm$$

$$\therefore \overline{E_p} = \overline{E_1} + \overline{E_2} + \overline{E_3}$$

لإيجاد E_p يجب تحليل كل من E_1، E_2، E_3 إلى المركبات الأفقية E_x والمركبات العمودية E_y

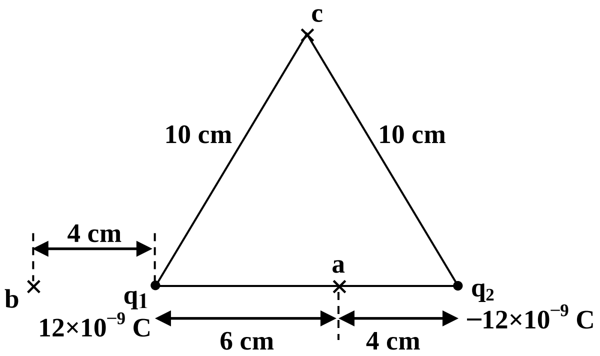
$$\left.\begin{aligned}\sum E_x &= E_3\cos 30^\circ - E_2\cos 30^\circ = 0\\ \sum E_y &= E_3\sin 30^\circ + E_2\sin 30^\circ - E_1\\ &= 2E_2\sin 30^\circ - E_1 = 2\times E_1\times\frac{1}{2} - E_1 = 0\end{aligned}\right\}\ \boxed{\therefore E_p = 0}$$

مثال (8) (واجب)

شحنتان نقطتيان q1، q2 وضعتا على بعد (10 cm) من بعضهما، فإذا كانت:

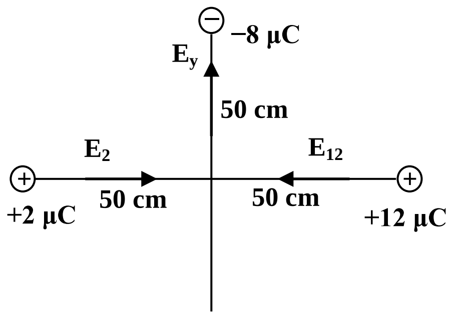
$q_2 = -12\times 10^{-9}$ C ،$q_1 = 12\times 10^{-9}$ C

احسب شدة المجال الكهربائي واتجاهه في النقاط a، b، c



مثال (9)

احسب شدة المجال الكهربائي عند نقطة (p) في الشكل أدناه.



$$E = \frac{Kq}{r^2}$$

$$E_x = E_{12} - E_2$$

$$E_x = \frac{9\times10^9\times12\times10^{-6}}{(50\times10^{-2})^2} - \frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}}{(50\times10^{-2})^2}$$

$$E_x = 360\times10^3\ \frac{N}{C}$$

$$E_y = \frac{9\times10^9\times8\times10^{-6}}{(50\times10^{-2})^2} = 288\times10^3\ \frac{N}{C}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(360\times10^3)^2 + (288\times10^3)^2} = 461\times10^3\ \frac{N}{C}$$

مثال (10)

قذف إلكترون على طول الاتجاه الموجب لمحور (x) بسرعة ابتدائية (3×10^6 m/sec). تحرك الإلكترون مسافة (45 cm) ثم توقف بسبب مجال كهربائي منظم من الجوار، جد شدة المجال الكهربائي.

$$v_{ox} = 3\times10^6\ m/\sec$$

$$v_x^2 = v_{ox}^2 + 2ax$$

$$0 = (3\times10^6)^2 - (2a\times0.45) = 9\times\times10^6 = 9a$$

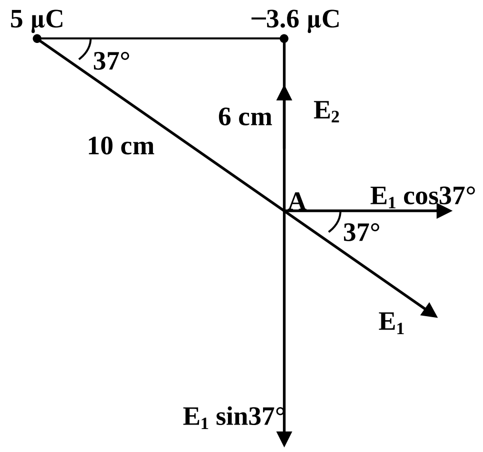
$$a = 1 \times 10^{13}\ m/sec^2$$

$$F_x = ma = 9.1 \times 10^{-31} \times 1 \times 10^{13} = 9.1 \times 10^{-18}\ N$$

$$E_x = \frac{F_x}{q} = \frac{9.1\times10^{-18}}{1.6\times10^{-19}} = 57\ \frac{N}{C}$$

مثال (11)

احسب شدة المجال الكهربائي عند النقطة (A) في الشكل المجاور.



$$E_1 = \frac{9\times10^9\times q_1}{r^2}$$

$$E_1 = \frac{9\times10^9\times5\times10^{-6}}{(10\times10^{-2})^2}$$

$$E_1 = 4.5\times10^6\ \frac{N}{C}$$

$$E_2 = \frac{9\times10^9\times3.6\times10^{-6}}{(6\times10^{-2})^2}$$

$$E_2 = 9\times10^6\ \frac{N}{C}$$

$$E_y = E_2 - E_1\sin37^\circ = 9\times0^6 - 4.5\times0^6\times0.6 = 6.3\times0^6\ \frac{N}{C}\quad E_x = E_1\cos37^\circ = 4.5\times0^6\times0.77 = 3.59\times0^6\ \frac{N}{C}$$

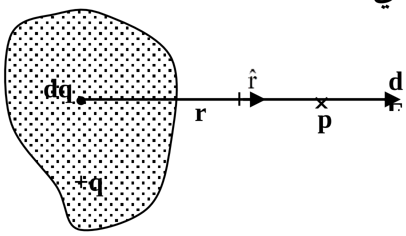
$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(3.59\times0^6)^2 + (6.3\times0^6)^2} = 7.25\times0^6\ \frac{N}{C}$$

4. المجال الناشيء عن التوزيع الشحني المتصل

إذا كان توزيع الشحنة متصلاً (Continuous Charge Distribution)، كأن تكون الشحنة موزعة على سطح جسم موصل، أو موزعة ضمن حجم معين بشكل متصل، فبالإمكان إيجاد شدة المجال الناشيء عنها عند النقطة (p) مثلاً وذلك

1- بتقسيم الشحنة إلى عدد كبير من العناصر المتناهية في الصغر كل منها يدعى (dq) وذلك بأخذ عنصراً صغيراً من الشكل(عنصر طول (dl) , او عنصر مساحة (da), او عنصر حجم (dv)) يحتوي على شحنة dq.

2- يحسب المجال (dE) الناشيء عن كل عنصر عند النقطة p وذلك بأن يعد كل عنصر وكأنه شحنة نقطية أي:



$$d\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

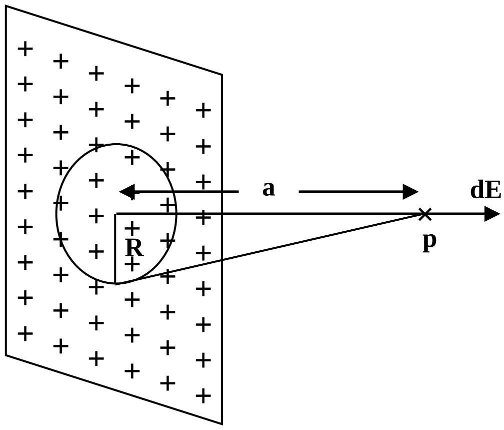
حيث r تمثل البعد من dq إلى النقطة p ما مبين في الشكل المجاور.

3- يحسب المجال الكلي (E) بأخذ التكامل الاتجاهي لجميع المجالات الناشئة من هذه العناصر

$$\overline{E} = \int d\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

المجال الناشيء عن شحنة موزعة بشكل صفيحة

شحنة موزعة بانتظام بشكل مستوي مساحته لا نهائية وبكثافة سطحية ($\sigma\,\frac{C}{cm^2}$)، احسب شدة المجال الكهربائي (E) عند النقطة (p) الواقعة على بعد (a) من المستوي.



1. نقسم المستوي إلى عدد كبير من الحلقات متحدة المركز نصف قطرها (R) وسمكها (dR) وتحتوي على شحنة (dq)

2.

$$\therefore dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\cdot\frac{(dq)a}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dq = (2\pi R dR)\sigma$$

اتجاه (dE) باتجاه محور الحلقة، أي عمودي على مستوي الشحنة

$$\therefore dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} \cdot \frac{(2\pi RdR)\sigma a}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \int dE = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} \frac{(2\pi RdR)\sigma a}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{2\pi\sigma a}{4\pi\varepsilon_\circ} \int_0^\infty (R^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} RdR$$

$$E = \frac{\sigma a}{4\varepsilon_\circ} \int_0^\infty (R^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} 2RdR$$

$$E = \frac{2\sigma a}{4\varepsilon_\circ} \left[-(R^2 + a^2)\right]_0^\infty$$

$$E = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_\circ} \left[-\frac{1}{(R^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^\infty$$

$$E = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_\circ} \left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{a} \right]_0^\infty$$

$$\therefore E = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_\circ} \cdot \frac{1}{a} \qquad \boxed{\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}}$$

ملاحظة مهمة للشحنة:-

$dq = \lambda ds$ **للعنصر الطولي**

λ = الكثافة الخطية للشحنة = $\dfrac{\text{الشحنة الكلية}}{\text{الطول الكلي}}$

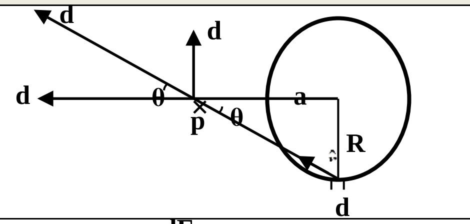
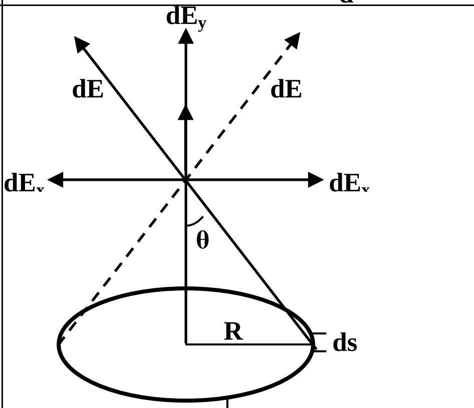
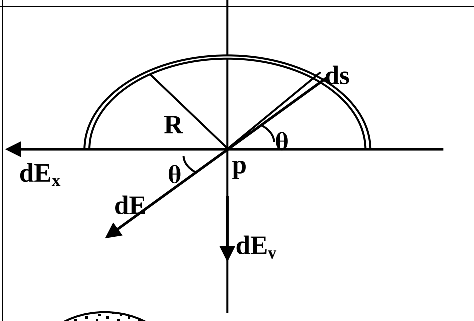
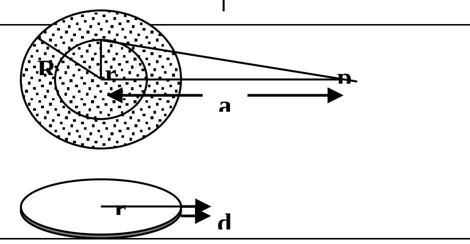
$dq = \sigma\, da$ لعنصر المساحة

σ = الكثافة السطحية للشحنة = $\dfrac{\text{الشحنة الكلية}}{\text{المساحة الكلية}}$

$dq = \rho\, dv$ لعنصر الحجم

ρ = الكثافة الحجمية للشحنة = $\dfrac{\text{الشحنة الكلية}}{\text{الحجم الكلي}}$

بعض التطبيقات الاخرى

ت	المجال الكهربائي الناشئ	الرسم	القانون
1	في النقطة (p) الواقعة على محور حلقة مشحونة شحنة موجبة مقدارها (q) موزعة بانتظام نصف قطرها (R) وعلى بعد (a) من مركزها.		$\therefore E = E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{qa}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$
2	في النقطة (p) بعيدة جداً عن مركز حلقة مشحونة شحنة موجبة مقدارها (q) موزعة بانتظام نصف قطرها (R) حيث a >>> R		$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{a^2}$
3	في النقطة (p) في مركز الدائرة لسلك منحني بشكل قوس نصف قطر دائرة يحمل شحنة مقدارها +q موزعة بانتظام على طوله. نصف قطره R		$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{2q}{\pi R^2}$
4	القرص المشحون		$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_\circ R}\left[1-\frac{a}{(R^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$

أسئلة الفصل الثاني

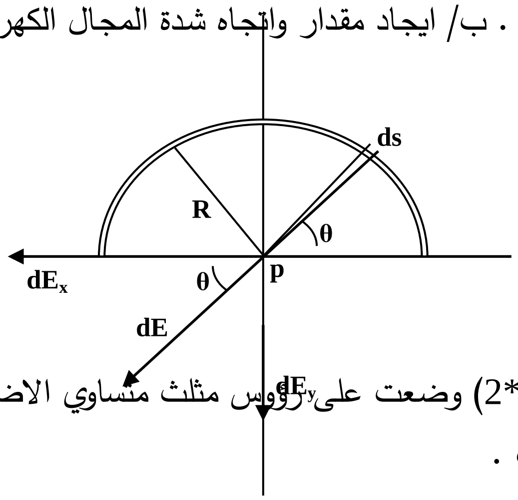
س1/ شحنتان نقطيتان مقدارهما $(10*10^{-8}\ C)$ و$(-5*10^{-8}\ C)$ تقطعهما مسافة قدرها $(20\ cm)$. أ/ أوجد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي عند منتصف المسافة بينهما؟ ب/ اذا وضع الكترون في هذه النقطة , ما مقدار واتجاه القوة الكهربائية المؤثرة عليه؟

س2/ ما مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي E اللازم لكي تتعادل القوة الكهربائية المؤثرة على دقيقة الفا مع وزنها . علما بان كتلة دقيقة الفا هي $(6.68*10^{27}\ Kg)$ وشحنتها تساوي 2e .

س3/ شحنة موجبة مقدارها q موزعة بانتظام على طول سلك عازل طوله L . أوجد شدة المجال الكهربائي في نقطة تقع على العمود المنصف لهذا السلك وتبتعد عنه مسافة قدرها a .

س4/ شحنة موجبة موزعة بانتظام على سطح قرص نصف قطره R بكثافة سطحية قدرها σ . أوجد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي في نقطة تقع على محور القرص وعلى بعد مسافة قدرها a منه.

س5/ سلك رفيع عازل بشكل قوس نصف دائرة . يحمل شحنة موجبة موزعة بحيث ان كثافتها الخطية λ تعتمد على الزاوية θ كما في الشكل المبين بموجب المعادلة التالية : $\lambda = A\ \cos\theta$, حيث ان A تمثل مقدارا ثابتا والمطلوب :أ/ رسم منحني بياني يمثل كيفية تغير λ مع θ . ب/ ايجاد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي في مركز الدائرة (النقطة 0).



س6/ ثلاثة اجسام صغيرة كل منها تحمل شحنة مقدارها $(2*10^{-6}\ C)$ وضعت على رؤوس مثلث متساوي الاضلاع . طول ضلعه 3 cm . جد شدة المجال الكهربائي في مركز المثلث .

س7/ كرة صغيرة كتلتها $(0.01gm)$ تحمل شحنة موجبة قدرها $(2*10^{-9}\ C)$ معلقة بطرف خيط من الحرير . ثبت الطرف الاخر منه بصفيحة عازلة شاقولية كبيرة تحمل شحنة موجبة موزعة بانتظام على السطح المقابل للكرة , فاذا اتزنت الكرة في موضع عندما يصنع الخيط زاوية 30^{o} مع الصفيحة . احسب مقدار الكثافة السطحية للشحنة Q.

س8/ شحنتان نقطيتان مقدارهما $(+4q)$ و $(-9q)$ والمسافة بينهما تساوي 10 cm . عين موضع النقطة او النقاط الواقعة على الخط المار بالشحنتين والتي يكون المجال الكهربائي صفرا.

س9/ اطلق الكترون بسرعة قدرها ($5*10^6$ m/sec) بصورة موازية لمجال كهربائي شدته (1000 N/C) وبنفس اتجاهه . أ/ أحسب طول المسافة التي يقطعها الالكترون في المجال حتى يصل (لحظيا) الى السكون . ب/ ما مقدار الزمن اللازم لذلك.

س10/ قذف الكترونا في مجال كهربائي منتظم شدته ($25*10^5$ N/C) فاذا كان المجال باتجاه محور Y الموجب وسرعة الالكترون ($2*10^4$ m/sec) باتجاه محور X الموجب . عين الاحداثيات x و y لموضع الالكترون بعد زمن قدره (10^{-7} sec).