الفصل الاول

الاعداد Numbers

الاعداد الصحيحة Integer numbers (Z) :
هي تلك الاعداد التي تتكون من اعداد الترقيم الموجبة والسالبة والصفر ويمكن تمثيلها بالشكل الاتي :

$$Z=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

اما خصائصها :-
بافتراض إن a,b اعداد صحيحة فإنها
- مغلقة على الجمع والطرح والضرب أي إن

$$a+b\ ,\ a-b\ ,\ a\cdot b \in Z$$

- غير مغلقة على القسمة أي إن

$$\frac{a}{b} \notin Z$$

ملاحظة :- خاصية الانغلاق لأي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) تعني إن ناتج العملية هو عدد من نفس الاعداد للمجموعة .

* الاعداد الطبيعية Natural numbers (N)
هي تلك الاعداد التي تستعمل للعد وذلك ابتداء من العدد واحد وكذلك هي الاعداد الصحيحة الموجبة فقط ويمكن تمثيلها بالشكل الاتي :

$$N=\{1,2,3,4,\dots\}$$

خصائصها :-
بافتراض إن a,b اعداد طبيعية فإنها
- مغلقة على الجمع والضرب أي إن :-

$$a+b\ ,\ a\cdot b \in N$$

غير مغلقة على الطرح والقسمة إي إن

$a-b \, , \, \frac{a}{b} \notin N$

الاعداد النسبية Rational numbers (Q)

هي الاعداد التي تتكون من حاصل قسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر (غير صفري).

$$Q = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z \, , \ b \neq 0 \}$$

خصائصها :-

بافتراض إن a, b اعداد نسبية فإنها مغلقة على الجمع والطرح والضرب والقسمة

$$a+b \, , \, a-b \, , \, a.b \, , \, \frac{a}{b} \in Q$$

* الاعداد غير النسبية Ir rational numbers (Ir)

وهي الاعداد التي تكون بخلاف الاعداد النسبية والتي لا يمكن التعبير عنها بشكل كسر عشري تحتوي على ما لا نهاية من الاعداد التي لا تتكرر مثل الجذور $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... الخ وكذلك النسبة الثابتة π والتي جميعها لا يمكن كتابتها كنسبة بين عددين صحيحين (لا يمكن التعبير عنها بشكل $\frac{a}{b}$ حيث a, b اعداد صحيحة و $b \neq 0$).

الاعداد الحقيقية Real numbers (R)

هي جميع الاعداد النسبية والاعداد غير النسبية التي لا تحتوي على جذور القيم السالبة.

افتراض إن a, b اعداد حقيقية لذا فهي مغلقة على الجمع والطرح والضرب والقسمة اي إن :

$$a+b \, , \, a-b \, , \, a.b \, , \, \frac{a}{b} \in R$$

* الاعداد الخيالية Imaginary numbers (i)

هي الجذور التربيعية للقيم السالبة أي إن $i = \sqrt{-1}$ وعليه فتكون :

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \longrightarrow i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i \longrightarrow i^3 = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) \longrightarrow i^4 = 1$$

* الاعداد المركبة complex numbers (m)

هي الاعداد التي تحتوي على حدين احدهما حقيقي والآخر خيالي أي إن ،

$m = a + bi$ و $a, b \in R$

فالحد الحقيقي هو (a) والحد الخيالي هو (bi)

اما خصائص الاعداد المركبة فهي :

1- اذا كانت $a + bi = c + di$ فإن $a = c$ و $b = d$

2- جمع وطرح عددين مركبين :

$$(a+bi) \mp (c+di) = (a \mp c) + (b \mp d)i$$

3- ضرب عددين مركبين :

$$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$ where $i^2 = -$

$$= ac + adi + bci + bd(-1)$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- قسمة عددين مركبين :

$$\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-\cancel{cdi}+\cancel{dci}-d^2i^2}$$

$$=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$ where $i^2=-1$

$$=\frac{ac-adi+bci-bd(-1)}{c^2-d^2i^2}$$

$$=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2-d^2i^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2-d^2i^2}+\frac{bc-ad}{c^2-d^2i^2}\,i$$

أمثلة محلولة :-

1- أوجد قيمة X , Y التي تحقق المعادلة التالية :-

$$2iX+3iY-6X+3Y=10i-6$$

الحل :-

نرتب المعادلة

$$(-6X+3Y)+(2X+3Y)i=-6+10i$$

$$-6X+3Y=-6 \quad \ldots (1)$$

$$\mp 2X\mp 3Y=\mp 10 \quad \ldots (2)$$

بالطرح

$$-8X=-16$$

$$X=\frac{\cancel{-16}^{\,2}}{\cancel{-8}} \longrightarrow X=2$$

نعوض قيمة $X = 2$ في احدى المعادلتين ولتكن المعادلة رقم ① ينتج

$$-6X + 3Y = -6 \quad \dots ①$$

$$-6(2) + 3Y = -6$$

$$-12 + 3Y = -6$$

$$3Y = 12 - 6$$

$$3Y = 6$$

$$Y = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}}$$

$$\boxed{Y = 2}$$

- اوجد قيمة X و Y التي تحقق المعادلة التالية:-

$$(X + iy)(2 - i) = 8 + i$$

الحل:-

$$2X - iX + 2iy - yi^2 = 8 + i$$

$$2X - iX + 2iy - y(-1) = 8 + i$$

$$2X - iX + 2iy + y = 8 + i$$

$$(2X + y) + (-X + 2y)i = 8 + i$$ نرتب المعادلة

$$2X + y = 8 \quad \dots ①$$

$$-X + 2y = 1 \quad \dots ②$$

نضرب المعادلة رقم 1 في 2

$$2\times\left[\begin{array}{ll} 2x + y = 8 & \ldots (1) \\ -x + 2y = 1 & \ldots (2) \end{array}\right.$$

$$4x + 2y = 16$$
$$\pm x \mp 2y = \mp 1$$

بالطرح

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5} \longrightarrow x = 3$$

نعوض قيمة $x = 3$ في المعادلة رقم 1

$$2x + y = 8 \quad \ldots (1)$$
$$2(3) + y = 8$$
$$6 + y = 8$$
$$y = 8 - 6$$
$$y = 2$$

٣- اذا كانت $x=2+3i$ و $y=3-i$ جد قيمة x^2+2y^2 ؟

الحل:-

$$x^2+2y^2=(2+3i)^2+2(3-i)^2$$

$$=(4+12i+9i^2)+2(9-6i+i^2) \quad \text{where } i^2=-1$$

$$=(4+12i+9(-1))+2(9-6i+(-1))$$

$$=(4+12i-9)+2(9-6i-1)$$

$$=(-5+12i)+2(8-6i)$$

$$=(-5+12i)+(16-12i)$$

$$=(-5+16)+(12i-12i)=\boxed{11+0i}$$

٤- اختصر المقدار التالي بصيغة عدد مركب $\dfrac{2i^{21}-3i^{30}}{1+i}$

الحل:-

$$\frac{2i^{21}-3i^{30}}{1+i}=\frac{2(i^4)^5 i-3(i^4)^7 i^2}{1+i} \quad \text{where } \begin{cases} i^2=-1 \\ i^4=1 \end{cases}$$

$$=\frac{2(1)^5 i-3(1)^7(-1)}{1+i}=\frac{2i+3}{1+i}$$

$$=\frac{2i+3}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i-2i^2+3-3i}{1-\cancel{i}+\cancel{i}-i^2}$$

$$=\frac{2i-2(-1)+3-3i}{1-i^2}=\frac{2i+2+3-3i}{1-(-1)}=\frac{5-1i}{1+1}$$

$$=\boxed{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i}$$

٥- اختصر المقدار التالي بصيغة عدد مركب

$$[(6+2i)+(-3+2i)]-(5-8i)$$

الحل:-

$$=[(6-3)+(2+2)i]-(5-8i)$$

$$=(3+4i)-(5-8i)$$

$$=(3+4i)+(-5+8i)$$

$$=(3-5)+(4+8)i \quad =-2+12i$$

٦- اختصر المقدار التالي بصيغة عدد مركب $\frac{5+7i}{3-4i}$ ؟

الحل:-

$$\frac{5+7i}{3-4i}=\frac{5+7i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}$$

$$=\frac{15+20i+21i+28i^2}{9+\cancel{12}i-\cancel{12}i-16i^2} \qquad \text{where } i^2=-1$$

$$=\frac{15+41i+28(-1)}{9-16(-1)}$$

$$=\frac{15+41i-28}{9+16}$$

$$=\frac{-13+41i}{25}$$

$$=\frac{-13}{25}+\frac{41}{25}i$$

ملاحظة :- عند وجود $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$ نتخلص من البسط والمقام اولاً ثم نتخلص من الأس.

مثال١- ضع المقدار التالي بالصيغة الجبرية للعدد المركب؟

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$$

الحل :-

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3-3i+i-i^2}{1-\cancel{i}+\cancel{i}-i^2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3-3i+i-(-1)}{1-(-1)}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3-3i+i+1}{1+1}\right)^3 = \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{2}{2} i\right)^3 = (2-i)^3 = (2-i)^2 (2-i)$$

$$= (4-4i+i^2)(2-i)$$

$$= (4-4i+(-1))(2-i) = (4-4i-1)(2-i)$$

$$= (3-4i)(2-i) = 6-3i-8i+4i^2 \quad \{ i^2=-1$$

$$= 6-11i+4(-1) = 6-11i-4 = \boxed{2-11i}$$

مثال:- افرض ان $Z_1 = 3+2i$ و $Z_2 = -7-i$.

اوجد Z_1+Z_2 ، Z_1-Z_2 ، $Z_1 * Z_2$

الحل:-

$$Z_1+Z_2 = (3+2i)+(-7-i)$$

$$= (3-7)+(2-1)i = \boxed{-4+i}$$

$$Z_1-Z_2 = (3+2i)-(-7-i)$$

$$= (3+2i)+(7+i)$$

$$= (3+7)+(2+1)i = \boxed{10+3i}$$

$$Z_1 * Z_2 = (3+2i) * (-7-i)$$

$$= -21-3i-14i-2i^2$$

$$= -21-3i-14i-2(-1)$$

$$= -21-3i-14i+2$$

$$= (-21+2)+(-3-14)i$$

$$= \boxed{-19-17i}$$

مثال :- اكتب المقدار الاتي بصيغة عدد مركب

$$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}$$

الحل :-

$$=\frac{5+5i}{3-4i}*\frac{3+4i}{3+4i}+\frac{20}{4+3i}*\frac{4-3i}{4-3i}$$

$$=\frac{15+20i+15i+20i^2}{9+\cancel{12}i-\cancel{12}i-16i^2}+\frac{80-60i}{16-\cancel{12}i+\cancel{12}i-9i^2}$$

$$=\frac{15+35i+20(-1)}{9-16i^2}+\frac{80-60i}{16-9i^2}$$

$$=\frac{15+35i-20}{9-16(-1)}+\frac{80-60i}{16-9(-1)}$$

$$=\frac{35i-5}{9+16}+\frac{80-60i}{16+9}$$

$$=\frac{80-5+35i-60i}{25}$$

$$=\frac{75-25i}{25}=\frac{\cancel{75}}{\cancel{25}}-\frac{\cancel{25}}{\cancel{25}}i$$

$$=\boxed{3-i}$$

مثال ا:- اختصر المقدار الاتي بصيغة عدد مركب

$$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$$

الحل:-

$$i^2=-1$$
$$i^4=1$$

$$=\frac{i+(-1)+i^2 \cdot i+1+i^4 \cdot i}{1+i}$$

$$=\frac{i-\cancel{1}-i+\cancel{1}+i}{1+i}$$

$$=\frac{2i-i}{1+i}=\frac{i}{1+i}$$

$$=\frac{i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i}$$

$$=\frac{i-i^2}{1-\cancel{i}+\cancel{i}-i^2}=\frac{i-i^2}{1-i^2}$$

$$=\frac{i-(-1)}{1-(-1)}$$

$$=\frac{i+1}{1+1}=\frac{i+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$