Linearly Independent & Linearly الاستقلال الخطي والارتباط الخطي

Dependent

Def :- Let $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ be a subset of a vectors space V then we say that S is

(1) **Linearly Dependent** if there exist elements $k_1, k_2, \ldots, k_n$ in R such that **not all equal to zero with $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0$**

(2) **Linearly Independent** if there exist elements $k_1, k_2, \ldots, k_n$ in R such that **all equal to zero with $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0$**

Ex:- Let $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ such that $V_1 = (1, 0, 2)$, $V_2 = (0, -1, 3)$, $V_3 = (-2, 0, 1)$ are vectors in R^3. Determine whether S is Linearly Independent or Linearly Dependent ?

Sol :-

لكي تكون S مستقلة خطيا يجب انه تطبق المعادلة

$K_1 V_1 + K_2 V_2 + K_3 V_3 = 0$

ونحصل منها على ان جميع الاعداد K1 , K2 , K3 تساوي اصفار وعكس ذلك سوف تكون مرتبطة خطيا

$K_1 V_1 + K_2 V_2 + K_3 V_3 = 0$

$K_1 (1, 0, 2) + K_2 (0, -1, 3) + K_3 (-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

ومن حل هذه المعادلات نحصل على المعادلات الخطية التالية

$K_1 - 2K_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$-K_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$2K_1 + 3K_2 + K_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

وبحل المعادلات اعلاه بالطريقة السابقة نحصل على

$K_1 = K_2 = K_3 = 0$

Therefore , $S = \{ V_1, V_2, V_3 \}$ is linearly independent

Ex:- Does the vectors $V_1 = (1, -1)$, $V_2 = (2, -3)$, $V_3 = (5, 1)$ are linearly dependent

Sol:- **الحل :-** نطبق المعادلة التالية

$K_1 V_1 + K_2 V_2 + K_3 V_3 = 0$

ولكي تكون V_1, V_2, V_3 مرتبطة خطيا يجب ان تكون الاعداد K_1, K_2, K_3 على الاقل واحد منها لايساوي صفر

$K_1 V_1 + K_2 V_2 + K_3 V_3 = 0$

$K_1 (1, -1) + K_2 (2, -3) + K_3 (5, 1) = (0, 0)$

من حل هذه المعادلة نحصل على نظام المعادلات الخطية التالي

$K_1 + 2K_2 + 5K_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$-K_1 - 3K_2 + K_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

هذا النظام مكون من معادلتين وثلاث متغيرات فيكون له ما لا نهاية من الحلول ولايجاد احد هذه الحلول نفرض ان K_1 يساوي قيمة اختيارية ثم نجد بدلالتها K_2, K_3 وكما يلي

Let $K_3 = 1$

بالتعويض بالمعادلات اعلاه نحصل على

$K_1 = -17 \quad , K_2 = 6$

وبهذا نستنتج بان V_1, V_2, V_3 مرتبطة خطيا .

ملاحظة :- تحقق من صحة الحل

لانه لو عوضنا عن قيمة (K_1, K_2, K_3) (ليست جميعها اصفار) نحصل على

$(-17)(1, -1) + (6)(2, -3) + (1)(5, 1) = (-17, 17) + (12, -18) + (5, 1) = (0,0)$

وينتهي الحل

Def:- Let V be a vectors space over R .Then we say $v \in V$ is ***Linear Combination*** of the vectors $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ (where $v_i \in V$, for each $i=1,\ldots,n$) if can be written as following $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots\ldots k_n v_n$,where $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ are scalar numbers.

Ex:- Let $V_1 = (1,2,1,-1)$,$V_2=(1,0,2,-3)$,$V_3=(1,1,0,-2)$ are vectors in R^4 show that the vector $V = (2,1,5,-5)$ is linear combination of V_1, V_2, V_3 ?

Sol :-

By Def حسب التعريف اعلاه

$V = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3$

To find c_1, c_2, c_3

$$(2,1,5,-5) = c_1(1,2,1,-1) + c_2(1,0,2,-3) + c_3(1,1,0,-2)$$
$$= (c_1, 2c_1, c_1, -c_1) + (c_2, 0, 2c_2, -3c_2) + (c_3, c_3, 0, -2c_3)$$
$$(2,1,5,-5) = (C_1 + C_2 + C_3,\ 2C_1 + C_3,\ C_1 + 2C_2,\ -C_1 - 3C_2 - 2C_3)$$

$C_1 + C_2 + C_3 = 2$ ....(1)

$2C_1 + C_3 = 1$ ....(2)

$C_1 + 2C_2 = 5$ ....(3)

$-C_1 - 3C_2 - 2C_3 = -5$ ....(4)

تحل هذه المعادلات باستخدام الطرق المناسبة السابقة .

بعد حلها بطريقة كاوس نحصل على النتائج التالية $C_3 = -1$, $C_2 = 2$, $C_1 = 1$

اذن المتجه V هو تركيب خطي من المتجهات V_1, V_2, V_3

اي ان $V = 1 . V_1 + 3 V_2 - 2 V_3$

Ex:- Let $U_1 = (1,2,-1)$, $U_2 = (1,0,1)$ are vectors in R^3. Determine whether $U = (1,0,2)$ is linear combination of U_1, U_2?

Sol :-

Let a ,b R then

$$U = a U_1 + b U_2$$

$$U = a(1,2,-1) + b(1,0,1)$$

$$(1,0,2) = (a+b,\ 2a,\ -a+b)$$

therefore

اذن

$a + b = 1$ ....(1)

$2a = 0$ ....(2)

$-a + b = 2$ ....(3)

بعد حل المعادلات نحصل على $a = 0$, $b = 1$ وكذلك $b = 2$ وهذا غير ممكن اذن لايوجد حل لهذا النظام .

U is not linear combination of U_1, U_2

Generate of vector spase مولد فضاء المتجهات V

Def :- Let $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ be a subset of a vectors space V then we sat that S is ***Generate (Span)*** V **if every vector of V is a linear combination of $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$**

Ex:- Let $V=R^3$ and $S=\{v_1, v_2, v_3\}$ such that $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(1,0,2)$, $v_3=(1,1,0)$. Does S generate V ?

Sol :-

لكي نثبت بان S تولد V يجب ان نثبت ان كل متجه ينتمي الى V هو تركيب خطي من عناصر S وكما يلي

Let $v \in V \longrightarrow v=(a,b,c)$

By Def of linear combination

$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$

$(a,b,c) = k_1(1,2,1) + k_2(1,0,2) + k_3(1,1,0)$

وبعد حل هذه المعادلة كما حصل في طريقة التركيب الخطي نحصل على المعادلات الانية

$K_1 + K_2 + K_3 = a$

$2K_1 + K_3 = b$

$K_1 + 2K_2 = c$

الان ناخذ مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ثم نجد لها المحدد

(أ) اذا كان محددها يساوي صفر فانها غير قابلة للانعكاس وبالتالي ليس لها معكوس ومن نظرية سابقة ليس لهذا النظام حل ومنه نحصل على ان S لاتولد V وينتهي الحل .

(ب) اما اذا كان المحدد لايساوي صفر فان A قابلة للانعكاس اي يوجد معكوس ومنه نحصل على ان هذه المعادلات لها حل وبالتالي سوف نحصل على ان S تولد V وينتهي الحل .

الان نجد المحدد للمصفوفة A بالطرق السابقة

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

$= 0 + 1 + 4 - 0 - 2 - 0 = 3 \neq 0$

$|A| \neq 0$

Thus, A^{-1} is exists ,and hence, there exists solution of this system.

hence , **every vector of V is a linear combination of** $S=\{v_1, v_2, v_3\}$

therefore , S is **generated** of R^3.

Ex:- Let $V=R^2$ and $S=\{i, j\}$,show that S is generated R^2

Sol:-

Let $V \in R^2 \longrightarrow V=(a,b)$

$V = K_1 V_1 + K_2 V_2$

$(a,b) = K_1(1,0) + K_2(0,1)$

$(a,b) = (K_1, 0) + (0, K_2)$

$(a,b) = (K_1, K_2)$

$\rightarrow a = K_1 \longrightarrow K_1 = a$

$\rightarrow b = K_2 \longrightarrow K_2 = b$

Then there exists solution to this system, and

hence , **every vector of V is a linear combination of** $S=\{v_1, v_2\}$.

Therefore , S is **generated** of R^2

Basis & Dimension الاساس والبعد

Def :- Let $S = \{ v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \}$ be a subset of a vectors space V then S is called ***Basis*** for V if

(1) S is ***spans (generate)*** V

(2) S is ***Linearly Independent***

Ex:- Let $V = R^2$ and $S = \{i, j\}$,show that S is Basis for R^2

الحل :- يجب ان نطبق شرطي التعريف اعلاه

(1)To prove that S Linear Ind.

$K_1 i + K_2 j = 0$

$K_1 (1, 0) + K_2 (0, 1) = (0, 0)$

$(K_1, 0) + (0, K_2) = (0, 0)$

$(K_1 K_2) = (0, 0)$

$K_1 = 0 \quad \& \quad K_2 = 0$

Therefore S is Linearly Independent

(2)To prove that Sis span set.

Let $W \in R^2$ then $W = (w_1, w_2)$

Now, let $ai + bj = w$

$a(1, 0) + b(0, 1) = (w_1, w_2)$

$(a, 0) + (0, b) = (w_1, w_2)$

$(a, b) = (w_1, w_2)$

$a = w_1$ ……………………(1)

$b = w_2$ ……………………(2)

اذن هذا النظام له حل اذن كل متجه في R^2 هو تركيب خطي من عناصر S وبالتالي S تولد R^2

By (1), (2) then S is Basis for R^2

ملاحظه :-

ويطلق على {i ,j } القاعدة الاعتيادية (Standard Basis) في R^2

Ex:- Let $V = R^4$ and $S=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ such that $V_1 = (1, 0, 1, 0)$, $V_2 = (0, 1, -1, 2)$, $V_3 = (0, 2, 2, 1)$ $v_4 = (1, 0, 0, 1)$. Does S Spans R^4 ?

Sol :-

(1) To show that S Linear Ind.

Let $K_1 V_1 + K_2 V_2 + K_3 V_3 + K_4 V_4 = 0$

نعوض عن قيم V_1, V_2, V_3, V_4 كما مر سابقا فنحصل على نظام المعادلات الخطية التالية

$K_1 + K_4 = 0$

$K_2 + 2K_3 = 0$

$K_1 - K_2 + 2K_3 = 0$

$2K_2 + K_3 + K_4 = 0$

بما ان النظام نظاما متجانسا وعدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات فانها تمتلك حل وحيد وهو الحل الصفري اي ان

$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 0$

Therefore , S is linearly Ind.

(1) To show that S Spans for R^4

Let $V = (a, b, c, d)$ R^4

$$V = K_1 V_1 + K_2 V_2 + K_3 V_3 + K_4 V_4$$

$$(a, b, c, d) = K_1(1, 0, 1, 0) + K_2(0, 1, -1, 2) + K_3(0, 2, 2, 1) + K_4(1, 0, 0, 1)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على نظام المعادلات الخطية التالية :-

$K_1 + K_4 = a$ ....(1)

$K_2 + 2K_3 = b$ ....(2)

$K_1 - K_2 + 2K_3 = c$ ....(3)

$2K_2 + K_3 + K_4 = d$ ....(4)

ولحل هذا النظام يجب ان ناخذ مصفوفة المعاملات حسب نظرية سابقة (فان لهذا النظام حلا اذا وفقط اذا كانت مصفوفة المعاملات قابلة للانعكاس وفي نظرية اخرى تكون مصفوفة المعاملات قابلة للانعكاس اذا كان محددها لا يساوي صف)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نجد المحدد بالطرق السابقة

$|A| \neq 0$

$\longrightarrow A^{-1}$ there exists ,then there exists solution to this system

hence , every vector of V is a linear combination of $S = \{v_1, v_2, v_3\}$

therefore , S is generated (Spans) R^4

by (1), (2) then S is Basis for R^4,

Def :- Let V be a vectors space over R ,then **the number of its basis** is called ***the Dimension of V*** and denoted by **dim(V) .**

Ex-:- Let V = { 0} , Find ***the Dimension of V?***

Sol :- since V ={0} is L . D then

The basis of V = $\emptyset$

So that dim(V) = 0

Ex-:- Let V = R^2 , Find ***the Dimension of V?***

Sol : The basis is

B= { (1,0), (0,1) } = { i,j }

So that dim(V) = dim (R^2) =2

Ex-:- Let V = R^3 , Find ***the Dimension of V?***

B= { (1,0,0) ,(0,1,0) , (0,0,1) } = { i,j, k }

Dim(R^3) = 3

Remark:- in general dim (R^n) = n.

Theorem (4-13):- Let U be a sub space of a vectors space V such that dim(V)=n ,then dim(U)< n and if V =U then dim(U)= n

Ex:- Let U be a sub space of R^3 ,Then find dim(

Sol:- since dim(R^4)= 4 and by above theorem ,then

Dim U= (0) , or (1) or (2) or (3)or (4)

a) dim U = 0 ⟶ U =(0)

b) dim U = 1 ⟶ U= (a,0,0,0)

c) dim U = 2 ⟶ U= (a,b,0,0)

d) dim U= 3 ⟶ U= (a,b,c,0)

dim U= 4 ⟶ U= (a,b,c,d) = R^4

Theorem (4-14):- Let U and W be a sub space of a vectors space V and for each of them finite dimension then

Dim(U+W)= dim (U) + dim (W) – dim (U ∩ W)

Ex:-

Let V=R^3 and U ,W two sub space of V such that

U={(a,b,0), a,b ϵ R } = xy plane

W= { (0,b,c), b,c, ϵ R} = yz plane

Then find dim(U + W) ?

Sol:

Dim (U) =2

Dim (W) =2

Dim (U ∩ W) = 1

Dim (U +W) = dim (U) + dim (W) – dim (U ∩ W)

= 2=2-1

= 3