Eigenvalues and Eigenvectors

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

Def :- Let **A** be a square matrix ,then the real number λ is called ***Eigen value*** if there exist a nonzero vector X in R^n such that

$$A X = \lambda X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\lambda X - A X = 0$$

$$(\lambda I_n - A) X = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ملاحظة :- كل متجه غير صفري **X** يحقق المعادلة (1) يسمى بالمتجه الذاتي ***Eigen vector*** للمصفوفة **A** المرافق (المرتبط) بالقيمة الذاتية λ

ملاحظة :- لتكن **A** مصفوفة ذات سعة (n* n) يقال للمحدد ($|\lambda I_n - A|$) بمتعددة الحدود المميزة **Characteristic Polynomial** للمصفوفة **A** بينما تسمى المعادلة $|\lambda I_n - A| = 0$ المعادلة المميزة **Characteristic equation** للمصفوفة **A**

Ex :- Find the Eigen value and Eigen vector of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

الحل :-

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ -3 & -2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I_3 - A| = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$$

either $\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

or $\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

or $\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

this is the Eigenvalue of the matrix A

هذه هي القيم الذاتية

الان نجد المتجهات الذاتية المرافقةالى λ

(1) If $\lambda = 1$

$$(I_3 - A) X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 - 2x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2x_2$

$-3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \Longrightarrow 3x_3 = 3x_1 + 2x_2 = 6x_2 + 2x_2 = 8x_2$

$x_3 = 8/3\, x_2$

let $x_2 = r$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2r \\ r \\ 8/3\, r \end{pmatrix}$$

بما أن r هو عدد اختياري ينتمي الحقل الاعدادالحقيقية (ليكن $r = 3$)

if $r = 3$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

this is the Eigenvector of the matrix A with $\lambda = 1$ المتجه الذاتي المرافق للقيمة الذاتية

(2) If $\lambda = 3$

$(3I_3 - A)X = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x_1 = 0$

$x_1 = 0$

$-3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$

....

$-2x_2 + 5x_3 = 0 \Longrightarrow -2x_2 = -5x_3 \Longrightarrow x_2 = 5/2\, x_3$

let $x_3 = r$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2\, r \\ r \end{pmatrix}$$

بما أن r هو عدد اختياري ينتمي الحقل الاعداد الحقيقية (ليكن $r = 2$)

if $r = 2$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

this is the Eigen vector of the matrix A with $\lambda = 3$ المتجه الذاتي المرافق للقيمة الذاتية

(3) If $\lambda = -2$

$(-2I_3 - A)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-3x_1 = 0$

$x_1 - 5x_2 = 0$

$-3x_1 - 2x_2 = 0$

....

$x_1 = x_2 = 0$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

بما أن r هو عدد اختياري ينتمي الحقل الاعدادالحقيقية (ليكن $r = 1$)

if $r = 1$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

this is the Eigenvector of the matrix A with $\lambda = -2$ المتجه الذاتي المرافق للقيمة الذاتية

Cayley- Hamilton Theorem كايلي - هاميلتون

نظرية:- كل مصفوفة مربعة A تحقق معادلتها المميزة .

Ex:- if A be square matrix find A^{-1} ,by using **Cayley- Hamilton Theorem** ,where

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol:-

$$|\lambda I_2 - A| = 0$$

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda -3 & 2 \\ -1 & \lambda -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I_2 - A| = 0$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)+2=0$$
$$\lambda^2-5\lambda+6+2=0$$
$$\lambda^2-5\lambda+8=0$$

نعوض بدل كل λ بالمصفوفه A ونضرب الحد الخالي من λ بمصفوفةالوحده

$$A^2-5A+8I_2=0$$
$$A^2-5A=-8I_2$$
$$(A-5I_2)A=-8I_2$$
$$-1/8(A-5I_2)A=I_2$$

الان نضرب الطرفين ب A^{-1}

$$A^{-1}=-1/8(A-5I_2)$$

$$A-5I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-1/8(A-5I_2)$$

$$= -1/8 \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$