Numerical Analysis

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Department of Computer Science, College of Education for Pure Science / Ibn-Al Haitham, University of Baghdad, Iraq.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Chapter One

Introduction to Numerical Analysis

Numerical analysis is concerned with the development and analysis of methods for the numerical solution of practical problems. Traditionally, these methods have been mainly used to solve problems in the physical sciences and engineering. However, they are finding increasing relevance in a much broader range of subjects including economics and business studies.

التحليل العددي يهتم بالتطور وتحليل طرق الحل العددي مشاكل عملية بطرق تقليدية، كانت هذه الأساليب تستخدم أساسا لحل المشاكل في العلوم الفيزيائية وهندسة. ومع ذلك، فإنها تجد أهمية متزايدة في مجموعة واسعة من المواضيع بما في ذلك الاقتصاد والدراسات التجارية.

The first stage in the solution of a particular problem is the formulation of a mathematical model. Mathematical symbols are introduced to represent the variables involved and physical (or economic) principles are applied to derive equations which describe the behavior of these variables. Unfortunately, it is often impossible to find the exact solution of the resulting mathematical problem using standard techniques. In fact, there are very few problems for which an analytical solution can be determined. For example, there are formulas for solving quadratic, cubic and quartic polynomial equations, but no such formula exists for polynomial equations of degree greater than four or even for a simple equation such as x=sin (x).

المرحلة الأولى في حل مشكلة معينة هي صياغة نموذج رياضي. يتم تقديم الرموز الرياضية لتمثيل المتغيرات المعنية ويتم تطبيق المبادئ الفيزيائية (أو الاقتصادية) لاستخلاص المعادلات التي تصف سلوك هذه المتغيرات. ولحسن الحظ، غالبًا ما يكون من المستحيل العثور على الحل الدقيق للمسألة الرياضية الناتجة باستخدام التقنيات التقنية القياسية. في الواقع، هناك عدد قليل جدًا من المشكلات التي يمكن تحديد حل تحليلي لها. على سبيل المثال، هناك صيغ لحل المعادلات متعددة الحدود من الدرجة الثانية، والمكعبة، والرباعية، ولكن لا توجد صيغة من هذا القبيل لمتعددة الحدود معادلات درجة أكبر من أربعة أو حتى المعادلة البسيطة مثل.x=sin (x) .

Similarly, we can certainly evaluate the integral $A = \int_a^b e^x \, dx$ as $e^b - e^a$, but we cannot find the exact value of $A = \int_a^b e^{x^2} \, dx$, since no function exists which differentiates to e^{x^2}, when an analytical solution can be found it may be of more theoretical than practical use.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hamed

كذلك، يمكننا بالتأكيد إيجاد قيمة التكامل $A = \int_a^b e^x \, dx$ مثل $e^b - e^a$, لكن لا يمكننا العثور على القيمة الدقيقة لـ $A = \int_a^b e^{x^2} \, dx$ نظرًا لعدم وجود دالة تفرق بين e^{x^2} , وعندما يمكن العثور على حل عددي، فقد يكون الاستخدام النظري أكثر من العملي.

Numerical analysis :- involves the study, development, and analysis of algorithms for obtaining numerical solutions to various mathematical problems. Frequently, numerical analysis is called the mathematics of scientific computing.

التحليل العددي:- يشمل دراسة وتطوير وتحليل الخوارزميات للحصول على حلول عددية لمختلف المشاكل الرياضية. في كثير من الأحيان، يسمى التحليل العددي رياضيات الحوسبة العلمية.

ERRORS AND STABILITY

The majority of numerical methods involve a large number of calculations which are best performed on a computer or calculator. Unfortunately, such machines are incapable of working to infinite precision and so small errors occur in nearly every arithmetic operation. Even an apparently simple number such as 2/3 cannot be represented exactly on a computer. This number has a non-terminating decimal expansion $0.66666666666666 \cdots$ and if, for example, the machine uses ten-digit arithmetic, then it is stored as 0.666 666 666 7 (In fact, computers use binary arithmetic. However, since the substance of the argument is the same in either case, we restrict our attention to decimal arithmetic for simplicity).

الأخطاء والاستقرار

غالبية الطرق العددية تنطوي على عدد كبير من العمليات الحسابية التي من الأفضل إجراؤها على الكمبيوتر أو آلة حاسبة. لسوء الحظ، مثل هذه الآلات غير قادرة على ذلك العمل بدقة متناهية وتحدث أخطاء صغيرة جدًا تقريبا كل العمليات الحسابية. حتى الأعداد التي تبدو بسيطة مثل 2/3 لا يمكن تمثيلها بدقة كمبيوتر. يحتوي هذا الرقم على علامة عشرية غير منتهية توسع

$0.66666666666666 \cdots$

وإذا، على سبيل المثال، يستخدم الجهاز عملية حسابية مكونة من عشرة أرقام، ثم يتم تخزينه ك

0.666 666 666 7 في الواقع، تستخدم أجهزة الكمبيوتر الحساب الثنائي. ومع ذلك، منذ ذلك الحين جوهر الحجة هو نفسه في كلتا الحالتين، نحن تقييد اهتمامنا بالحساب العشري من أجل البساطة.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Errors

Computations generally yield approximations as their output. This output may be an approximation to a true solution of an equation, or an approximation of a true value of some quantity.

الأخطاء

تسفر الحسابات بشكل عام عن تقديرات تقريبية. قد يكون هذا الناتج تقريبيًا للحل الحقيقي للمعادلة، أو تقريبًا للقيمة الحقيقية لبعض القيم الكمية.

Error:

The numerical solution for any problems is an approximate value to the exact solution.
numerical solution + error= exact solution

تعريف الخطاء:- الحل العددي لأي مشكلة هو قيمة تقريبية للحل الدقيق

الحل العددي + الخطأ = الحل الدقيق

Sources of Errors: مصادر الأخطاء

1- Formulation Error أخطاء الصياغة

It happened during question form.

2- Rounding off Error and Chopping Errors : - أخطاء القطع والتدوير

These errors are made when decimal fraction is rounded or chopped after the final digit.

Example

1.36579 ⇒ 1.3657 and 1.36579 ⇒ 1.3658

1.86548 ⇒ 1.8654 and 1.86543 ⇒ 1.8655

3- Truncation Error أخطاء القطع

These error are made from replacing an infinite process by finite one.

Example

$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ (Maclourin series)

Now, if we want to find for small x then we will consider the terms $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ Which gives us a good approximation, hence the truncation error is the infinite series

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$-\frac{x^7}{7!}++\frac{x^9}{9!}$.

4- Inherent Error أخطاء الصلبية

وهي الأخطاء الموجودة في البيانات الأساسية للمسألة أو الموجودة في الأجهزة الإلكترونية المستخدمة في المسائل العلمية كما ان راينا قياس مسافة أو فولطية في مسألة معينة وكذلك تطلق على الأخطاء الموجودة في البيانات مثل الأعداد غير النسبية مثل

Example

$e^1, \quad \pi, \quad \sqrt{2}$

5- Accumulation Error أخطاء المتراكمة

وهي الأخطاء التي تنتج من اعتماد كل خطوة على القيم التقريبية للخطوة السابقة كما بعض الطرق العددية للمعادلات التفاضلية حيث تتضمن تكرارا للمجموعة من العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة.

Example

$sinx = 0.1.35843$
$= 0.1.358.$

6- Floating-Point Numbers and Round off Errors

In the case Floating decimal Point we write the numbers as follows

$x = F \times b^k$ such that $F = \mp 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \quad , \quad 0.1 \leq |F| \leq 1 \, , b = 2,10, \cdots$

أرقام الفاصلة العائمة وأخطاء التقريب

Example

في حالة النقطة العشرية العائمة نكتب الأرقام على النحو التالي

$a = 635894$	is written as	0.6359×10^4	by Rounding
$b = 0.00375$	is written as	0.375×10^{-2}	by Rounding
$c = -256.67$	is written as	-0.2567×10^3	by Rounding

Errors are commonly measured in one of two ways: absolute error and relative error as the following definition.

يتم قياس الأخطاء عادة في واحدة من بطريقتين: الخطأ المطلق والخطأ النسبي على التعريف التالي .

The Absolute Error :- Let the real number x and the approximate number x^*, error = exact solution - numerical solution

the **Error** is $x - x^*$. The **absolute error**(e_x) is $|x - x^*|, \quad e_x = |x - x^*|$.

Prof. Dr. Areej Fawfeeq Hameed

الخطا المطلق:- لتكن الرقم الحقيقي x والرقم التقريبي x^* , الخطأ هو $x - x^*$.

الخطأ = الحل الدقيق - الحل العددي .

الخطأ المطلق (e_x) هو $|x - x^*|$ ، $e_x = |x - x^*|$.

The Relative Error :- the **relative error** is defined as

(δ_x) is $\left|\frac{x-x^*}{x}\right|$, $\delta_x = \left|\frac{x-x^*}{x}\right| = \frac{e_x}{|x|}$.

الخطأ النسبي:- يعرف الخطاء النسبي على انه النسبة بين الخطأ المطلق الى مطلق الرقم الحقيقي.

Errors In Calculations

Let x^*, y^* are two approximate values of the tow numbers a, b with absolute Errors e_x, e_y and δ_x, δ_y relative Errors

	Absolute errors	Relative Errors
$x + y$	$e_{x+y} = e_x + e_y$	$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y}(e_x + e_y)$
$x - y$	$e_{x-y} = e_x - e_y$	$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y}(e_x - e_y)$
$x.y$	$e_{x.y} = x.e_y + y.e_x$	$\delta_{x.y} = \delta_x + \delta_y$
x/y	$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y}.(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y})$	$\delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x - \delta_y$

Example

1- If $x = 5.2$, $y = 3.12$ two numbers are round for two and three numbers decimal places find e_{x+y} , δ_{x+y} , e_{x-y} , δ_{x-y} , $e_{x.y}$, $\delta_{x.y}$, $e_{\frac{x}{y}}$, $\delta_{\frac{x}{y}}$.

Solution:

$e_x = 0.05 \; and \; e_y = 0.005.$

$e_{x+y} = e_x + e_y = 0.05 + 0.005 = 0.055.$

Prof. Dr. Areej awfeeq Hameed

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y}(e_x + e_y) = \frac{1}{5.2+3.12}(0.055) = 0.0066.$$

$$e_{x-y} = e_x - e_y = 0.05 - 0.005 = 0.045.$$

$$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y}(e_x - e_y) = \frac{1}{5.2-3.12}(0.045) = 0.0216.$$

$$e_{x.y} = x.e_y + y.e_x = (5.2)(0.005) + (3.12)(0.05) = 0.1820.$$

$$\delta_{x.y} = (\delta_x + \delta_y) = \left(\frac{e_x}{x} + \frac{e_y}{y}\right) = \left(\frac{0.05}{5.2} + \frac{0.005}{3.12}\right) = 0.0112.$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y}.\left(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}\right) = \frac{5.2}{3.12}.\left(\frac{0.05}{5.2} - \frac{0.005}{3.12}\right) = 0.0134.$$

$$\delta_{\frac{x}{y}} = (\delta_x - \delta_y) = \left(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}\right) = \left(\frac{0.05}{5.2} - \frac{0.005}{3.12}\right) = 0.0080.$$

Homework

If $x = 42.25$, $y = 42.137$ two numbers are round for two and three numbers decimal places find e_{x+y} , δ_{x+y} , e_{x-y} , δ_{x-y} , $e_{x.y}$, $\delta_{x.y}$, $e_{\frac{x}{y}}$, $\delta_{\frac{x}{y}}$.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Chapter Two

Solutions of Nonlinear Equations

In the next series of lectures, we shall discuss the problem of identifying the roots of equations in one Variable.

The basic formulation of the problem in the simplest case is this given a function $f(x)$ of one variable, find all x such that $f(x) = 0$.

وفي سلسلة المحاضرات القادمة سنناقش مشكلة تحديد جذور المعادلات في متغير واحد.

بحيث يكون x لمتغير واحد، أوجد كل $f(x)$ الصيغة الأساسية للمسالة في أبسط الحالات هي إعطاء دالة $f(x) = 0$..

We will review two methods for determining first approximations of possible positions for the equation $f(x) = 0$, where f is a continuous real function.

سنستعرض أسلوبين لتعيين تقريبات أولية لمواضع الجذور الحقيقية للمعادلة $f(x) = 0$ حيث f دالة حقيقية مستمرة.

1- (Method Graphic) تعين مواقع الجذور بالرسم البياني

If we draw the graph of the function $f(x) = y$, the points of intersection of the function curve with the x axis represent the roots of the equation. If the equation is cut, then the function graph can be considered the axis at the points $x_1,\ x_2, x_3, \ldots\ x_n$. Each of these values represents a root. These values are first approximations to the roots.

إذا رسمنا مخطط الدالة $f(x) = y$ فإن نقاط تقاطع منحني الدالة مع محور x تمثل جذور المعادلة، فإذا قطع $x_1,\ x_2, x_3, \ldots\ x_n$. للمعادلة وبالتالي يمكن اعتبار مخطط الدالة المحور في النقاط فإن كلاً من هذه القيم تمثل جذراً هذم القيم كتقريبات أولية للجذور.

Sometimes it is convenient to write the equation in the form $f_1(x) = f_2(x)$, where f_1, f_2 are functions that are easy to draw. If the two curves intersect at the point (x^*, y^*), then x^* is considered the root of the equation.

في بعض الأحيان يكون من الملائم كتابة المعادلة بالصيغة $f_1(x) = f_2(x)$ حيث f_1, f_2 دالتين يسهل رسمهما فإذا تقاطع المنحنيان في النقطة (x^*, y^*) فإن x^* تعتبر جذرا للمعادلة.

Example 1:

Determine the locations of the roots of the equation $e^x\ sin(x)\ -\ 1\ =\ 0$.

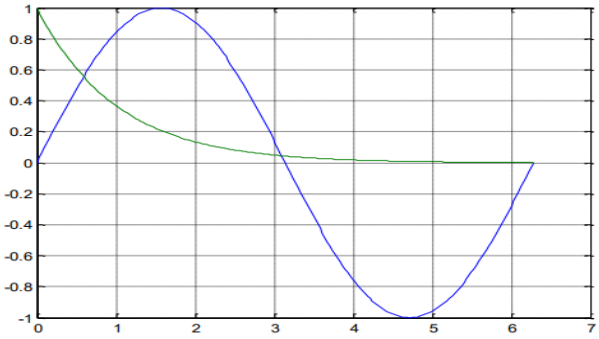
مثال: عين مواقع جذور المعادلة $e^x\ sin(x)\ -\ 1\ =\ 0$

Solution:

يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة $sin(x)\ =\ e^{-x}$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

يمكن رسم الدالتين بنظام الماتلاب لتحديد مواقع الجذور



ويوجد $x = 3.1$ والثاني عند $x = 0.6$ من الشكل الناتج سوف نلاحظ وجود تقاطع بين الدالتين الأول عند $n\pi$. عدد لا نهائي من التقاطعات الأخرى عندما تكون قريبة من

2- Locating the position of roots (programming method):

تعين مواقع الجذور بطريقة البرمجة

To locate the position of roots of the function (equation) $f(x) = 0$ by using programming method, we use $f(x)$ be continuous function on the interval [a,b]. We divide the interval $[a, b]$ into n subintervals

لتحديد مواقع الجذور للدالة (المعادلة) $f(x) = 0$ باستخدام طريقة البرمجة، نستخدم $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ نقسم الفترة [a,b] إلى n, فترات الجزئية

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ where $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n; h = \frac{b-a}{n}$.

If $f(x_i) \times f(x_{i+1}) < 0$ for any $0 \leq i \leq n$, then there exists c, $a < c < b$ for which $f(c) = 0$.

Example 2:

Find the approximate location of the function

$f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$ on the interval $[-8,8]$ with $n = 4$ and $n = 8$.

Solution:

If $n = 4$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{8-(-8)}{4} = 4$.

x	-8	-4	0	4	8
$f(x)$	+	+	-	-	+

There is a root between (-4,0) and (4,8).

If n=8, h=$\frac{b-a}{n} = \frac{8-(-8)}{8} = 2$.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	+	+	+	+	-	+	-	+	+

There is a root between (-2,0), (0,2), (2,4) and (4,6).

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Example 3:

Find the approximate location of the function

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ on the interval [1,2] with $n = 5$.

Solution:

$n = 5, h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(1)}{5} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2.$

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$	-	-	+	+	+	+

There is a root between (1.2,1.4).

Example 4:

Find the approximate location of the function

$f(x) = x^2 - 1 = 0$ on the interval $[-1,1]$ with $n = 10$.

Solution:

$n = 10, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-1)}{10} = \frac{2}{10} = 0.2.$

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+

There is a root between (-1,-0.8) and (0.8,1).

Numerical methods: ***الطرق العددية***

Numerical Methods: are methods for solving problems numerically on a computer or calculator or by hand. الطرق العددية: هي طرق حل المسائل عددياً على الحاسوب أو الآلة الحاسبة أو باليد.

(i) Bisection Method: ***طريقة تنصيف الفترات***

Suppose a continuous function f defined on the interval [a,b] is given with $f(a)$ and $f(b)$ of different signal (i.e. $f(a)\times f(b) < 0$). Then by Intermediate value theorem ((If $f \in C[a,b]$ and k is any number between $f(a)$ and $f(b)$, then there exists $c \in (a,b)$ for which $f(c) = k$)) there exists a point $c \in (a,b)$ such that $f(c) = 0$. If we choose the midpoint $c = \frac{b+a}{2}$, then three possibilities arise:

أي بإشـــارات مختلفة $f(b)$و $f(a)$ تعطي [a,b] معرفة على الفترة المغلقة f لنفترض أن دالة مســـتمرة $f(a) \times f(b) < 0$). فانه بواسـطة نظرية القيمة المتوسـطة (نحصـل على إذا كان $f \in C[a,b]$ و k. إذا $f(c) = 0$. بحيث يكون ($f(c) = k$) بحيث $c \in [a,b]$ ، فهناك f (b) و f (a) هو أي عدد يقع بين $c = (b+a)/2$ اخترنا نقطة المنتصف ، فستظهر ثلاثة احتمالات:

If $f(a)\times f(c)$ {
- < 0 there is a root between a, c $\Rightarrow$ d=$\frac{a+c}{2}$
- > 0 there is a root between b, c $\Rightarrow$ d=$\frac{b+c}{2}$
- $= 0$ c is exact root ((Stop)).

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

The two conditions stop are التوقف بشـرطين $|x_{i+1} - x_i| \leq \in \ \vee \ |f(x_{i+1})| \leq \in$ for any i.

Example 5:

Find an approximate root of $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ in the interval (0,1) by using Bisection method if error $\in = 0.01$.

Solution:

$f(0) = 0^2 - \frac{1}{2} = -0.5$, $f(1) = 1^2 - \frac{1}{2} = 0.5$.

x	0	1	0.5	0.75	0.625	0.6875	0.7188	0.7032
$y = f(x)$	-0.5	0.5	-0.25	1.75	-0.1094	-0.0273	0.0166	-0.0056

$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5, \quad f(0.5) = (0.5)^2 - \frac{1}{2} = -0.25.$

$|x_1 - b| = |0.5 - 1| = 0.5 > \in \ \vee |f(x_1)| = |-0.25| = 0.25 > \in$

$x_2 = \frac{x_1 + b}{2} = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75 \ , \ f(0.75) = (0.75)^2 - \frac{1}{2} = 1.75$

$|x_2 - x_1| = |0.5 - 0.75| = 0.625 > \in \vee |f(0.625)| = |-0.1094| = 0.1094 > \in$

$x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{0.75 + 0.625}{2} = 0.6875 \ , f(0.6875) = (0.6875)^2 - \frac{1}{2} = -0.0273$

$|x_3 - x_1| = |0.0.6875 - 0.75| = 0.7188 > \in \vee \ |f(0.7188)| = |-0166| = 0.0166 > \in$

$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{0.6875 + 0.7188}{2} = 0.7023 \ , f(0.7023) = (0.7023)^2 - \frac{1}{2} = -0.0056$

$|x_4 - x_3| = |0.7188 - 0.7023| = 0.0165 > \in \vee \ |f(7023)| = |-0.0056| = 0.0056 < \in$

Then $x_4 = 0.7023$ is the root.

Example 6:

Find an approximate root of $f(x) = xe^x - 2 = 0$ in the interval [0.5,0.9] by using Bisection method if error $\in = 0.007$.

Solution:

$f(0.5) = 0.5\, e^{(0.5)} - 2 = -1.1756$, $f(0.9) = 0.9\, e^{(0.9)} - 2 = 0.2136$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

x	0.5	0.9	0.7	0.8	0.85	0.875	0.8625	0.8562
$y = f(x)$	-1.1756	0.2136	–0.5904	–0.2196	–0.0113	0.0990	0.0433	0.0157

$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5+0.9}{2} = 0.7, \quad f(0.7) = 0.7e^{(0.7)} - 2 = -0.5904$

$|x_1 - b| = |0.7 - 0.9| = 0.2 > \in \vee |f(x_1)| = |-0.5904| = 0.5904 > \in$

$x_2 = \frac{x_1 + b}{2} = \frac{0.7 + 0.9}{2} = 0.8 \ , \ f(0.8) = 0.8\, e^{(0.8)} - 2 = -0.2196$

$|x_2 - x_1| = |0.8 - 0.7| = 0.1 > \in \vee |f(x_2)| = |-0.2196| = 0.2196 > \in$

$x_3 = \frac{x_2 + b}{2} = \frac{0.8 + 0.9}{2} = 0.85 \ , f(0.85) = 0.85\, e^{(0.85)} - 2 = -0.0113$

$|x_3 - x_2| = |0.85 - 0.8| = 0.05 > \in \vee \ |f(x_3)| = |-0.0113| = 0.0113 > \in$

$x_4 = \frac{x_3 + b}{2} = \frac{0.85 + 0.9}{2} = 0.875 \ , f(0.85) = 0.875\, e^{(0.885)} - 2 = 0.0990$

$|x_4 - x_3| = |0.875 - 0.85| = 0.025 > \in \vee \ |f(x_4)| = |0.0990| = 0.0990 > \in$

$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{0.85 + 0.875}{2} = 0.8625 \ , \ f(0.8625) = 0.8625 \ e^{(0.8625)} - 2 = 0.0433$

$|x_5 - x_4| = |0.8625 - 0.875| = 0.0125 > \in \vee \ |f(x_4)| = |0.0433| = 0.0433 > \in$

$x_6 = \frac{x_5 + x_3}{2} = \frac{0.8625 + 0.85}{2} = 0.8562 \ ,$

$f(0.8562) = (0.8562)75\, e^{(0.8562)} - 2 = 0.0157$

$|x_6 - x_5| = |0.8562 - 0.8625| = 0.0063 < \in$

Then $x_6 = 0.8562$ is the root.

Homework

1- Find an approximate root of $f(x) = x - 2^{-x} = 0$ in the interval (0,1) by using Bisection method with error $\in = 0.04$.

2- Find an approximate root of $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ in the interval [1,2] by using Bisection method with error $\in = 0.04$.

(ii) The False-Position method : طريقة الموضع الكاذب

Suppose a continuous function f defined on the interval $[x_1, x_2]$ is given with $f(x_1)$ and $f(x_2)$ of opposite sign (i.e. $f(x_1).f(x_2) < 0$). To derive a formula for false-position method, approximate the graph of f by a straight line on $[x_1, x_2]$ connecting $(x_1, f(x_1))$ and $(x_2, f(x_2))$ which intersect x-axis at $(x_3, 0)$ where x_3 is more

Prof. Dr. Areej Tavreed Hameed

approximate to the exact root than x_1 and x_2.To obtain a formula for x_3 we use the slop equality:

بـإشـــارات مختلفـة $f(x_2)$ و $f(x_1)$ تعطي $[x_1, x_2]$ومعرفـة على الفترة لنفترض أن دالـة مســتمرة بخط مستقيم f).لاشتقاق صيغة لطريقة الموضع الكاذب، قم بتقريب الرسم البياني لـــ$f(x_1).f(x_2) < 0$(حيث يكون $(x_3, 0)$ التي يتقاطع مع المحور السيني عند $(x_2, f(x_2))$و $(x_1, f(x_1))$ وتوصيل $[x_1, x_2]$

نستخدم المتطابقة ادناه:x_3. للحصول على صيغة x_2 و x_1 أكثر تقريبًا للجذر الدقيق من x_3

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow (x - x_2)(y_2 - y_1) = (y - y_2)(x_2 - x_1)$$

we put $y = 0$

$$(x - x_2)(y_2 - y_1) = -y_2(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \big((x - x_2)(y_2 - y_1) = -y_2(x_2 - x_1)\big) \div (y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow (x - x_2) = -y_2 \frac{(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)} \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)}$$

To find another approximation: لإيجاد قيم أخرى

If $f(x_1) \times f(x_2)$
- < 0 there is a root between x_1 , $x_3 \Rightarrow =$
- > 0 there is a root between x_2 , x_3
- $= 0$ c is exact root ((Stop)).

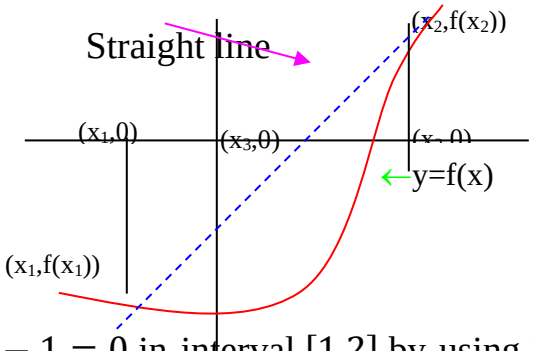
$$\Rightarrow x_4 = x_3 - \frac{y_3(x_3 - x_2)}{(y_3 - y_2)}$$

⋮ ⋮

$\Rightarrow x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{y_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{(y_{i+1} - y_i)}$. And Stop condition is $|x_{i+2} - x_{i+1}| \leq \epsilon$ for any i.

and Stop condition is $|x_{i+2} - x_{i+1}| \leq \epsilon$ for any i.

• • •



Example 7:

Find an approximate root of $f(x) = x.lnx - 1 = 0$ in interval [1,2] by using False-Position method with error $\epsilon = 0.06$.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Solution:

Let $x_1 = 1, x_2 = 2$

$f(1) = 1.ln1 - 1 = -1$ and $f(2) = 2.ln2 - 1 = 0.3863 \Rightarrow (f(x_1).f(x_2) < 0)$

x	1	2	1.7213	1.7615
$y = f(x)$	-1	0.3863	-0.0652	-0.0027

$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{y_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{(y_{i+1} - y_i)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)} \Rightarrow x_3 = 2 - \frac{(0.3863)(2-1)}{(0.3863 - (-1))} = 1.7213$$

$f(1.7213) = 1.7213.\ln(1.7213) - 1 = -0.0652$

$|x_3 - x_2| = |1.7213 - 2| = 0.2787 > \epsilon = 0.06.$

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3(x_3 - x_2)}{(y_3 - y_2)} \Rightarrow x_4 = 1.7213 - \frac{(-0.0652)(1.7213 - 2)}{(-0.0652 - 0.3863)} = 1.7615$$

$f(1.7615) = 1.7615.\ln(1.7615) - 1 = -0.0027$

$|x_4 - x_3| = |1.7615 - 1.7213| = 0.0402 < \epsilon$

Then $x_4 = 1.7615$ is the root.

Example 8:

Find an approximate root of $f(x) = x + e^{-2x} - 1 = 0$ in interval $[0.5,1]$ by using False-Position method with error $\epsilon = 7 \times 10^{-3}$.

Solution:

Let $x_1 = 0.5, x_2 = 1$

$f(0.5) = 0.5 + e^{-2.(0.5)} - 1 = -0.1321$

$f(1) = 1 + e^{-2.(1)} - 1 = 0.1353 \quad \Rightarrow (f(x_1).f(x_2) < 0)$

x	0.5	1	0.7470	0.7910	0.7961
$y = f(x)$	-0.1321	0.1353	-0.0285	-0.0034	-0.0004

$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{y_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{(y_{i+1} - y_i)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)} \Rightarrow x_3 = 1 - \frac{(0.1353)(1-0.5)}{(0.1353 - (-0.1321))} = 0.7470$$

$f(0.7470) = 0.7470 + e^{-2(0.7470)} - 1 = -0.0285$

$|x_3 - x_2| = |0.7470 - 1| = 0.253 > \epsilon = 0.007 x_4 = x_3 - \frac{y_3(x_3 - x_2)}{(y_3 - y_2)} \Rightarrow x_4$

$$= 0.7470 - \frac{(-0.0285)(0.7470 - 1)}{(-0.0285 - 0.1353)} = 0.7910$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$f(0.7910) = 0.7910 + e^{-2(0.7910)} - 1 = -0.0034$

$|x_4 - x_3| = |0.7910 - 0.7470| = 0.044 > \in$

$x_5 = x_4 - \frac{y_4(x_4 - x_3)}{(y_4 - y_3)} \Rightarrow x_5 = 0.7910 - \frac{(-0.0034)(0.7910-1)}{(-0.0034-0.1353)} = 0.7961$

$f(0.7961) = 0.7961 + e^{-2(0.7961)} - 1 = -0.0004$

$|x_5 - x_4| = |0.7961 - 0.7910| = 0.005 < \in$

Then $x_5 = 0.7961$ is the root.

Homework

1- Find an approximate root of $f(x) = x^2 - 2x - 1 = 0$ in interval $[-1,0]$ by using False-Position method with error $\in = 10^{-3}$.

2- Find an approximate root of $f(x) = e^x - 3x = 0$ in interval [1,2] by using False-Position method with error $\in = 10^{-2}$.

(iii) Secant Method: ***طريقة القاطع***

Suppose a continuous function f defined on the interval $[a, b]$ is given, the graph of the function f is approximated by a secant line, we get

لنفترض أن دالة مستمرة f معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ بواسطة f معطاة، ويتم تقريب الرسم البياني للدالة خط قاطع، نحصل على

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-y}{b-x} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-0}{b-x_1}$

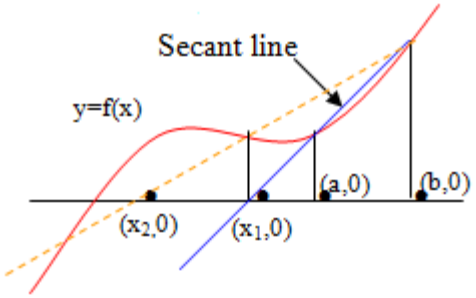
$\Rightarrow x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

Similarly, $x_2 = \frac{bf(x_1)-x_1f(b)}{f(x_1)-f(b)}$

In general, $x_{i+2} = \frac{x_i f(x_{i+1})-x_{i+1}f(x_i)}{f(x_{i+1})-f(x_i)}$;

i=0, 1, … x_{i+2} ,

and Stop condition is $|x_{i+2} - x_{i+1}| < \in$ for any i.



Example 9:

Find an approximate root of $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$ in interval [2,3] by using Secant method with error $\in = 0.002$.

Solution:

Let $x_1 = 2, x_2 = 3$, $f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 5 = -5$

$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 5 = 4,$ $\Rightarrow (f(x_1).f(x_2) < 0)$

x	2	3	2.5556	2.6691	2.6923	2.6906
$y = f(x)$	-5	4	-1.3713	-0.23315	0.0185	-0.0005

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$x_{i+2} = \frac{x_i f(x_{i+1}) - x_{i+1} f(x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$,

$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Rightarrow x_3 = \frac{2(4) - (3)(-5)}{\big((4) - (-5)\big)} = \frac{23}{9} = 2.5556$

$f(2.5556) = (2.5556)^3 - 2(2.5556)^2 - 5 = -1.3713$

$= -0.0285$

$|x_3 - x_2| = |2.5556 - 3| = 0.4444 > \epsilon = 0.007$.

$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \Rightarrow x_4 = \frac{\big((3)(-1.3713) - (2.5556)(4)\big)}{(-1.3713 - 4)} = 2.6691.$

$f(2.6691) = (2.6691)^3 - 2(2.6691)^2 - 5 = -0.23315$

$|x_4 - x_3| = |2.6691 - 2.5556| = 0.1135 > \epsilon.$

$x_5 = \frac{x_3 f(x_4) - x_4 f(x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \Rightarrow x_5 = \frac{\big((2.5556)(-0.23315) - (2.6691)(-1.3713)\big)}{(-0.23315 - (-1.3713))}$

$= 2.6923.$

$f(2.6923) = (2.6923)^3 - 2(2.6923)^2 - 5 = 0.0185$

$|x_5 - x_4| = |2.6923 - 2.6691| = 0.0232 > \epsilon.$

$x_6 = \frac{x_4 f(x_5) - x_5 f(x_4)}{f(x_5) - f(x_4)} \Rightarrow x_6 = \frac{\big((2.6691)(0.0185) - (2.6923)(-0.23315)\big)}{(0.0185 - (-0.23315))}$

$= 2.6906.$

$f(2.6906) = (2.6906)^3 - 2(2.6906)^2 - 5 = -0.0005$

$|x_6 - x_5| = |2.6906 - 2.6923| = |-0.0017| = 0.0017 < \epsilon$

Then $x_6 = 2.6906$ is the root.

Example 10:

Find an approximate root of $f(x) = x + e^{-2x} - 1 = 0$ in interval [0.5,1] by using Secant method with error $\epsilon = 0.007$.

Solution:

Let $x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$, $f(0.5) = 0.5 + e^{-2(0.5)} - 1 = -0.1321$

$f(1) = 1 + e^{-2(1)} - 1 = 0.1353 \quad \Rightarrow (f(x_1) f(x_2) < 0)$

x	0.5	1	0.7470	0.7910	0.7970
$y = f(x)$	-0.1321	0.1353	-0.0285	-0.0034	-0.0001

Prof. Dr. Areej Jawfeed Hameed

$$x_{i+2} = \frac{x_i f(x_{i+1}) - x_{i+1} f(x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Rightarrow x_3 = \frac{0.5(0.1353) - (1)(-0.1321)}{\big((0.1353) - (-0.1321)\big)} = 0.7470$$

$f(0.7470) = 0.7470 + e^{-2(0.7470)} - 1 = -0.0285$

$|x_3 - x_2| = |0.7470 - 1| = 0.253 > \epsilon = 0.007$ $x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)}$

$\Rightarrow x_4 = \frac{\big((1)(-0.0285) - (0.7470)(0.1353)\big)}{(-0.0285 - 0.1353)} = 0.7910.$

$f(0.7910) = 0.7910 + e^{-2(0.7910)} - 1 = -0.0034$

$|x_4 - x_3| = |0.7910 - 0.7470| = 0.044 > \epsilon$

$x_5 = \frac{x_3 f(x_4) - x_4 f(x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \Rightarrow x_5 = \frac{\big((0.7470)(-0.0034) - (0.7910)(-0.0285)\big)}{\big(-0.0034 - (-0.0285)\big)} = 0.7970$

$f(0.7970) = 0.7970 + e^{-2(0.7970)} - 1 = -0.0001$

$|x_5 - x_4| = |0.7910 - 0.7990| = 0.006 < \epsilon$

Then $x_5 = 0.7961$ is the root.

Homework By using Secant Method,

1- Find an approximate root of $f(x) = x^2 - 2x - 1 = 0$ between $[-1,0]$ by using Secant method with error $\epsilon = 10^{-3}$.

2- Find an approximate root of $f(x) = x^4 - x - 10$ in interval [1,2] by using Secant method with error $\epsilon = 0.0001$.

(IV) Newton-Raphson method: طريقة نيوتن - رافسون

Suppose function f is continuous and differentiable on the interval $[a, b]$, Let x_0 be an approximation to the exact root x_1 such that $f'(x_1) \neq 0$ and h is error between x_1, x_0 such that $x_1 = x_0 + h$. Using the Taylor series to function f about point x_0 we get:

هو جذر تقريبيًا للجذر المضبوط x_0، فليكن $[a, b]$مستمرة وقابلة للاشتقاق على الفترة f لنفترض أن الدالة x_1 بحيث ان $f'(x_1) \neq 0$ و h يكون الخطأ بين x_0 و x_1 بحيث ان $x_1 = x_0 + h$ باستخدام متسلسلة .

نحصل على x_0 حول النقطة f تايلور للدالة :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots. \quad \ldots(1)$$

put $x = x_1$ in formula (1) we get:-

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!} f'''(x_0)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + (h)f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots.$
…(2)
h is Small then $h^2, h^3, \ldots$ are very small can be deleted.
h صغير فان $h^2, h^3, \ldots$ صغير جدًا ويمكن حذفه.
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + (h)f'(x_0)$
$\because x_1$ is exact root then $f(x_1) = 0 \Rightarrow 0 = f(x_0) + hf'(x_0)$
$\Rightarrow h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, f'(x_0) \neq 0$

We offset the value of h in formula $x_1 = x_0 + h$, we get:-
نقوم بتعويض قيمة h في الصيغة $x_1 = x_0 + h$ على فنحصل ، :-

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $f'(x_0) \neq 0$, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, $f'(x_1) \neq 0$

Thus, the general formula of the **Newton-Raphson method** is

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, $f'(x_i) \neq 0$, $i = 1,2,3,\ldots$

The two conditions stop are $|x_{i+1} - x_i| \leq \in \vee |f(x_{i+1})| \leq \in$ for any i.

Note:

Sometime **Newton-Raphson method** does not converge to the required root:

1. If there is no real root of the function $f(x)$.
2. If the initial value so far from the exact root λ.
3. If $f'(x_i) = 0$.

ملاحظة:

في بعض الأحيان لا تتقارب طريقة نيوتن-رافسون مع الجذر المطلوب:

1. إذا لم يكن هناك جذر حقيقي للدالة f .
2. إذا كانت القيمة الأولية بعيدة عن الجذر المطلوب λ.
3. إذا كان $f'(x_i) = 0$.

Example 11:

Using **Newton-Raphson method**, find the solution to the equation $f(x) = x^3 + 5x - 3 = 0$ in interval [0,1] with error $\in = 0.0002$.

Solution:

$f(0) = (0)^3 + 5(0) - 3 = -3$, $f(1) = (1)^3 + 5(1) - 3 = 3$

$f(x) = x^3 + 5x - 3 = 0$, $f'(x) = 3x^2 + 5 = 0$, $x_0 = 0.5$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

x	0.5	0.5652	0.5641
$y=f(x)$	-0.375	0.0066	0.00002
$f'(x)$	5.75	5.9584	5.9546

$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\ ,f'(x_i)\neq 0\ \ ,i=1,2,3,\ldots$

$f(0.5)=(0.5)^3+5(0.5)-3=-0.375,\ f'(0.5)=3(0.5)^2+5=5.75\ .$

$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\ ,f'(x_0)\neq 0\ \Rightarrow x_1=0.5-\frac{f(0.5)}{f'(0.5)}$

$\Rightarrow x_1=0.5-\frac{(-0.375)}{5.75}\ \Rightarrow x_1$=0.5652

$f(0.5652)=(0.5652)^3+5(0.5652)-3=0.0066\ ,$

$f'(0.5652)=3(0.5652)^2+5=5.9584$

$|x_1-x_0|=|0.5652-0.5|=0.0652>\in\ \vee\ \ |f(x_1)|=|0.0066\ |>\in\ .$

$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\ ,f'(x_1)\neq 0\ \Rightarrow x_2=0.5652-\frac{(0.0066)}{(5.9584)}\ \Rightarrow x_2=0.5641$

$f(0.5641)=(0.5641)^3+5(0.5641)-3=0.00002\ ,$

$f'(0.5641)=3(0.5641)^2+5=5.9546.$

$|x_2-x_1|=|0.5641-0.5652|=|-0.0011|$=0.0011$>\in\ \vee\ \ |f(x_2)|=|0.00002\ |<\in$

Then $x_2=0.5641$ is the Root required الجذر المطلوب .

Example 12:

Using **Newton-Raphson method**, find an approximate value of the solution to the equation$f(x)=x^2-5$ when $x=2,\in=0.0007.$

Solution:

$f(x)=x^2-5\ \Rightarrow f'(x)=2x.$

x	2	2.25	2.236111	2.236068
$y=f(x)$	-1	0.0625	0.000192	0.0000001
$f'(x)$	4	4.5	4.472222	4.472136

$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\ ,f'(x_i)\neq 0\ \ ,i=1,2,3,\ldots$

$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\ ,f'(x_0)\neq 0\ \Rightarrow x_1=2-\frac{f(-1)}{f'(4)}=2.25$

$f(2.25)=(2.25)^2-5=0.0625\ ,f'(2.25)=2(2.25)=4.5.$

$|x_1-x_0|=|2.25-2|=0.25>\in\ \vee\ \ |f(x_1)|=|0.0625\ |>\in\ .$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, $f'(x_1) \neq 0 \Rightarrow x_2 = 2.25 - \frac{(0.0625)}{(4.5)} \Rightarrow x_2 = 2.236111$

$f(2.236111) = (2.236111)^2 - 5 = 0.000192$,

$f'(2.236111) = 2(2.236111) = 4.472222.$

$|x_2 - x_1| = |2.236111 - 2.25| = 0.013889 > \in \vee \ |f(x_2)| = |0.000192| < \in$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, $f'(x_2) \neq 0 \Rightarrow x_3 = 2.236111 - \frac{(2.236111)}{(4.472222)} \Rightarrow x_2 = 2.236068$

$f(2.236068) = (2.236068)^2 - 5 = 0.0000001$,

$f'(2.236068) = 2(2.236068) = 4.472136.$

$|x_3 - x_2| = |2.236068 - 2.236111| = 0.000043 < \in \vee \ |f(x_2)| = |0.0000001| < \in$

Then $x_3 = 2.236068$ is the Root required الجذر المطلوب .

Homework Using Newton-Raphson method,

1- If $f(x) = x^3 - x + 1 = 0$ and $x_0 = 1$, find x_1 and x_2.

2- Find an approximate value of the solution to the equation $f(x) = x^2 - 8$ with error $\in = 3 \times 10^{-3}$.

Homework Find an approximate root of $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ in [1,2] with 10^{-5} first by Newton-Raphson method and then be the secant method.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Chapter Three

Matrixes

In mathematics, a matrix is a rectangular set of numbers, symbols, or expressions organized into columns and rows. Each element of this set is called an element or entry of the matrix.

المصفوفات

منتظمة بشـكل التعبيرات أومن الرموز أو من الأعداد من مسـتطيلة الرياضـيات، في **المصـفوفة** هي مجموعة أعمدة وصفوف. يُدعى كل عنصر من هذا المجموعة بعنصرٍ أو مدخلٍ للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{121} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times3} = (a_{ij})_{2\times3} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3\times3} = (b_{ij})_{3\times3} \quad \text{or}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{121} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3} = [a_{ij}]_{2\times3} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3\times3} = [b_{ij}]_{3\times3}.$$

مثلا

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

درجة المصفوفة:

فإننا نقول أن m = n, و إذا m × n اعمدة نقول عنها أنها من الدرجة n صـفوف و m المصـفوفة التي لها n . المصفوفة من الدراجة

Types of Matrixes أنواع المصفوفات

1- **Row matrix:** It is a matrix that consists of only one row.

1- **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

$(a_{11} \quad \dots \quad a_{n1})_{1\times n} = (a_{ij})_{1\times n}$ or $[a_{11} \quad \dots \quad a_{n1}]_{1\times n} = [a_{ij}]_{1\times n}$ مـثـل

$(1 \quad 2 \quad 3)_{1\times3}$ or $[1 \quad 2 \quad 3]_{1\times3}$

2- **Columnar matrix:** It is a matrix that consists of only one column.

2- **المصفوفة العمودية:** هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1} \quad \text{مثل} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times1} = [a_{ij}]_{m\times1} \text{ or } \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times1} = (a_{ij})_{m\times1}$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

3- **Square matrix:** It is a matrix whose number of rows is equal to the number of columns.

3- **المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ : & .. & : \\ b_{m1} & .. & b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n} \text{ Or } \begin{bmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ : & .. & : \\ b_{m1} & .. & b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n}$$

مثل

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

4- **Zero matrix:** It is a matrix in which all elements are zeros.

4- **المصفوفة الصفرية :** هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار. ويرمز لها $(O_{n\times n} = O_n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ Or } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

5-**Diagonal matrix:** It is a square matrix in which all elements are equal to zero except for the diagonal

5- **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر المصفوفة القطرية Diagonal Matrix.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \text{ or } \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ Or } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

6- Unit matrix: It is a square matrix in which all elements are equal to zero except for the main diagonal, which is equal to

6- **مصفوفة الواحدية :** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى واحد. ويرمز لها $(I_{n\times n} = I_n)$ مثل Identity Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ Or } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

7-Standard matrix: It is a square matrix in which all elements are equal to zero except for the main diagonal, which is equal to a certain number.

7- المصفوفة القياسية **:** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى عدد معين مثل

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \text{ or } \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ Or } \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

8- The lower triangular matrix: elements above the diagonal are zeros. Square (lower triangular) matrix

8-المصفوفة المثلثية السفلى: المصفوفة المربعة (المثلثية السفلى عناصر ما فوق القطر اصفار.)

مثل $\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}_{2\times2}$ or $\begin{bmatrix}8 & 0\\ 2 & 9\end{bmatrix}_{2\times2}$ Or $\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 3 & 13 & 0\\ 8 & 8 & 1\end{pmatrix}_{3\times3}$ or $\begin{bmatrix}17 & 0 & 0\\ 7 & 5 & 0\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$

- 9-The upper triangular matrix: the elements under the diagonal are zeros. Square (upper triangular) matrix

9- المصفوفة المثلثية العليا: المصفوفة المربعة (المثلثية العليا) مثل عناصر ما تحت القطر اصفار.

$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 7\end{pmatrix}_{2\times2}$ or $\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{bmatrix}_{2\times2}$ Or $\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{3\times3}$ or $\begin{bmatrix}1 & 2 & 10\\ 0 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 14\end{bmatrix}_{3\times3}$.

Operations on the Matrix العمليات على المصفوفة

Equality of matrices

A set of conditions must be met for the matrices to be equal. Two or more matrices are said to be equal if all the matrices have the same dimensions and all corresponding elements of the matrices are equal.

تساوي المصفوفات :

يجب تحقق مجموعة من الشروط حتى تتساوى المصفوفات ، حيث يقال إن مصفوفتين أو أكثر متساوية إذا كان لجميع المصفوفات نفس الأبعاد وجميع العناصر التمقابلة للمصفوفات متساوية.

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 7\\ 9 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3} \text{ and } B=\begin{bmatrix}2-5 & 2+2 & 8-1\\ 5+4 & 3+2 & 2+0\end{bmatrix}_{2\times3} \Longrightarrow A=B.$$

Matrix addition

is an operation that takes two matrices as its input and produces a third matrix whose elements are the sum of the elements from these two matrices and are of the same degree.

جمع المصفوفات (: Matrix addition)

هي عملية تأخذ مصفوفتين اثنتين مدخلا لها، وتعطي مصفوفة ثالثة عناصرها هن مجموع العناصر من هذين المصفوفتين وتكون من نفس الدرجة . على سبيل المثال:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -7\\ 9 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3} \text{ and } B=\begin{bmatrix}2 & -5 & 8\\ -15 & 7 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}.$$

$$A+B=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -7\\ 9 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}+\begin{bmatrix}2 & 5 & 8\\ -15 & 7 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}-1 & 9 & 1\\ -6 & 12 & 6\end{bmatrix}_{2\times3}$$

AND

$$B+A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 8\\ -15 & 7 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}+\begin{bmatrix}-3 & 4 & -7\\ 9 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}-1 & 9 & 1\\ -6 & 12 & 6\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$A+B=B+A.$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

-ملاحظة: عملية الجمع تبديلية- عملية الجمع تجميعية

Matrix subtraction

It is an operation that takes two matrices as its input, and gives a third matrix whose elements are the subtraction of the elements from these two matrices and which are of the same degree.

طرح المصفوفات (: Matrix addition)

هي عملية تأخذ مصفوفتين اثنتين مدخلا لها، وتعطي مصفوفة ثالثة عناصرها هن طرح العناصر من هذين المصفوفتين وتكون من نفس الدرجة. على سبيل المثال:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -7\\ 9 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3} \text{ and } B=\begin{bmatrix}2 & -5 & 8\\ -15 & 7 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}.$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -7\\ 9 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}-\begin{bmatrix}2 & 5 & 8\\ -15 & 7 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}-5 & -1 & -15\\ 6 & -2 & -2\end{bmatrix}_{2\times3}$$

AND

$$B-A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 8\\ -15 & 7 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}-\begin{bmatrix}-3 & 4 & -7\\ 9 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 15\\ -6 & 2 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$A-B\neq B-A$.

Multiplying a matrix by a real number:

Let $\alpha \in R$ be a real number., and we have the matrix $(a_{ij})_{m\times n}$ The product of multiplying this matrix by the number is let us symbolize. The real $\alpha.(a_{ij})_{m\times n}$ is the matrix of its elements. These are the elements of the matrix The same after multiplying each of them by the real number.

ضرب مصفوفة بعدد حقيقي:

إن حاصل ضرب هذه المصفوفة بالعدد $(a_{ij})_{m\times n}$ و لدينا المصفوفة $\alpha \in R$.الحقيقي العدد لتكن هو مصفوفة عناصرها هي عناصر المصفوفة نفسها بعد $\alpha.(a_{ij})_{m\times n}$ الحقيقي $\alpha \in R$ بـ له لنرمز و ضرب كل منها بالعدد الحقيقي α .

مثل $A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -7\\ 9 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}$ و $\alpha=2$ فان $\alpha.A=\begin{bmatrix}-6 & 8 & -14\\ 18 & 10 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}$

ضرب مصفوفة بمصفوفة:

ان الشرط الضروري لإمكانية ضرب مصفوفتين هو أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (اليسرى في عملية الضرب) مساويًا عدد أسطر الثانية (اليمنى في عملية الضرب)، أي أن يكون الدليلان المتجاوران فرضنا أن في مرتبتيهما متساويين. وتكون مرتبة ناتج عملية الضرب هما الدليلين المتباعدين. فإذا كانتا على النحو التالي: فرضنا أن المصفوفة $(b_{ij})_{n\times p}$ و$(a_{ij})_{m\times n}$المصفوفتين وإذا رمزنا $(c_{ij})_{m\times p}$.ممكنة لأن الدليلين المتجاورين متساويان .فإن عملية ضرب هاتين المصفوفتين لناتج عملية ضرب هاتين المصفوفتين .

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Matrix Multiplication

matrix multiplication is met: We must first ensure that the number of columns of the first matrix participating in the multiplication process is equal to the number of rows of the second matrix, to ensure that the two matrices can be multiplied.

Drawing the resulting matrix: Draw a new, empty third matrix, which is the resulting matrix, so that the number of its rows is equal to the number of rows of the first matrix, and the number of its columns is equal to the number of columns of the second matrix.

Performing the first dot multiplication: Dot multiply the first row in the first matrix by the first column of the second matrix, to give us the first element in the resulting matrix (a_{11}), then dot multiply the first row in the first matrix by the second column of the second matrix, to give us the second element in the resulting matrix (a_{21}).), and so on until we finish all the columns of the second matrix.

Performing the second dot multiplication: Dot multiply the second row in the first matrix by the first column of the second matrix, to give us element (a_{21}) in the resulting matrix, then dot multiply the second row in the first matrix by the second column of the second matrix, to give us element (a_{22}) in the resulting matrix, And so on until we finish all the columns of the second matrix.

Repeat the multiplication process to find all the elements of the resulting matrix: We continue multiplying the remaining rows of the first matrix by the columns of the second matrix - if they exist - in the same way as before; Until we find all the elements of the resulting new matrix.

ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات: يجب أولًا التأكد من أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى المشاركة في عملية الضرب مساوي لعدد صفوف المصفوفة الثانية، لنتأكد من إمكانية ضرب المصفوفتين.

رسم المصفوفة الناتجة: رسم مصفوفة ثالثة جديدة فارغة، وهي المصفوفة الناتجة، بحيث يكون عدد صفوفها مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الأولى، وعدد أعمدتها مساوي لعدد أعمدة المصفوفة الثانية.

إجراء الضرب النقطي الأول: ضرب الصف الأول في المصفوفة الأولى ضربًا نقطيًا بالعمود الأول للمصفوفة الثانية، ليعطينا أول عنصر في المصفوفة الناتجة (a_{11})، ثم نضرب الصف الأول في المصفوفة الأولى ضربًا نقطيًا بالعمود الثاني للمصفوفة الثانية، ليعطينا ثاني عنصر في المصفوفة الناتجة (a_{21})، وهكذا حتى ننهي جميع أعمدة المصفوفة الثانية.

إجراء الضرب النقطي الثاني: ضرب الصف الثاني في المصفوفة الأولى ضربًا نقطيًا بالعمود الأول للمصفوفة الثانية، ليعطينا العنصر (a_{21}) في المصفوفة الناتجة، ثم نضرب الصف الثاني في المصفوفة الأولى ضربًا نقطيًا بالعمود الثاني للمصفوفة الثانية، ليعطينا العنصر (a_{22}) في المصفوفة الناتجة، وهكذا حتى ننهي جميع أعمدة المصفوفة الثانية.

تكرار عملية الضرب لإيجاد جميع عناصر المصفوفة الناتجة: نكمل ضرب باقي صفوف المصفوفة الأولى بأعمدة المصفوفة الثانية -إن وُجدت- بنفس الطريقة السابقة؛ حتى نجد جميع عناصر المصفوفة الجديدة الناتجة.

على سبيل المثال

Prof. Dr. Areej Tawfeed Hameed

$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}_{3\times3}$ and $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}$.

فأوجد AB وكذلك اوجد BA؟

الحل :

لان ابعاد المصفوفتين غير متوافق AB لا يمكن الحصول على :
لكن العكس ممكنBA

$$BA=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2(3)+(-1)0+1(1) & 2(2)+(-1)(-1)+1(2) & 2(1)+(-1)5+1(3)\\ 3(3)+1(0)+2(1) & 3(2)+1(-1)+2(2) & 3(1)+1(5)+2(3)\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$BA=\begin{bmatrix}7 & 7 & 0\\ 11 & 9 & 14\end{bmatrix}_{2\times3}$$

- **ملاحظة:**
- **عملية ضرب مصفوفتان متوافقة من حيث الرتبة .**
- **ضرب المصفوفات ليس ابدالي إلا في حالات خاصة أي أن AB ≠BA:.**
- **عملية ضرب المصفو فات تجميعية:**

Determinants المحددات

For every square matrix there exist a function between the matrix and the value of scalar number , this function is called the Determinant of matrix ,and denoted by (det(A) or A).

لكل مصفوفة مربعة توجد دالة بين المصفوفة وقيمة العدد العددي، تسمى هذه الدالة محدد المصفوفة، ويرمز له بـdet(A) أو A.( )

خواص المحددات

. (1):- If all elements of one row (or column) of A are zero ,then $|A|=0$.

$Example:\quad A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 7\\ 9 & 0 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 7\\ 9 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$

(2):- If there exist two rows (or columns) are equal then $|A|=0$.

$Example:\quad A=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 7\\ 9 & 9 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-3 & -3 & 7\\ 9 & 9 & 2\end{vmatrix}=0.$

(3):- If two rows and (or columns) of A are interchanges then the determinant of the resulting matrix B is(- A) , i.e B = - A .

Example :

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A|=(3)(-1)(2)+0+0-0-0-(1)(-1)(2)=-4.$$

$$B=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |B|=-|A|=4.$$

(4) :- If two rows (columns) of matrix A are proportional ,then $|A|=0$.

Example :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 8\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A|=0.$$

(5) :- If a matrix B results from a matrix A by multiplying all elements of A by k then $B = k\,A \Longrightarrow |B| = k\,|A|$, i.e ($|kA| = |k\,A|$).

Example :

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A|=(3)(1)(2)+0+0-0-0-(1)(-1)(2)=8.$$

$$5.A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} =\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 5 & 5 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}_{3\times3}.$$

$\Longrightarrow |5.A|=(3)(5)(2)+0+0-0-0-(5)(-1)(2)=30+10=40=5(8)=5|A|$.

(6) :- If a matrix C results from a matrix A by multiplying all elements in one row (or column) of A by k, then C = kA , i.e (A = 1/ k C).

Example :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 7 & -3\end{bmatrix}_{2\times2} \Longrightarrow |A|=(1)(-3)+0=-3.$$

$$C=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 7 & -3\end{bmatrix}_{2\times2} \Longrightarrow |C|=(7)(-3)+0=-21.$$

$C=7.A \Longrightarrow A=\frac{1}{7}\,C.$

(7):- If a multiple of any row (or column) of a determinant is added to any other row (or column) ,then value of the determinant is not changed.

Example :

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 6 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A| = (2)(1)(2)+0+0-0-0-(1)(-1)(2)=6.$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & -1 & 0\\ 3 & 6 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |B| = (2)(-1)(2)+0+0-0-0-(5)(-1)(2)=6.$$

(8):- The determinant of the product of two matrices is the product of their determinants ($|AB| = |A|\,|B|$) In general $|A_1 . A_2 \dots\dots\dots A_n| = |A_1| . |A_2| \dots\dots\dots |A_n|$.

(9):- If A triangular matrix then the determinant of A is equal the product of the elements of main diagonal i.e($|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} \dots\dots\dots a_{nn}$.

Example :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A| = (3)(1)(2)+0+0-0-0-0=6$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 8 & 2\\ 0 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A| = (3)(1)(2)+0+0-0-0-0=6.$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A| = (3)(1)(2)+0+0-0-0-0=6.$$

(10):- $|A| = |A^t|$.

Example :

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A| = (3)(4)(2)+0+0-(2)(3)(1)-0-(1)(1)(2)$$
$$= 16.$$

$$A^t=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A^t| = (3)(4)(2)+0+0-(2)(3)(1)-0-(1)(1)(2)$$
$$= 16.$$

(11) :- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Methods for finding the inverse of a Matrix طرق ايجاد معكوس المصوفة

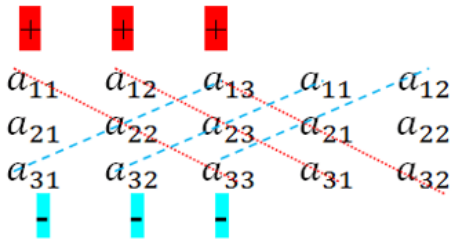
First method: Saros method (radiography)

The experiments will achieve that any square matrix with respect to the given matrix becomes the matrix extracted from the matrix $A = (a_{ij})_{m\times n}$, which we obtain after deleting row i and column j from the matrix $(a_{ij})_{m\times n}$.

الطريقة الاولى: طريقة ساروس(الشعاعية)

بأنها المصـفوفة المسـتخرجة من أي المصـفوفة مربعة فإننا نعرف محدد المصـفوفة A المحددات لتكون المصفوفة

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ من المصفوفةj و العمود iو التي نحصل عليها بعد حذف الصف $(a_{ij})_{m\times n}$.



مثال:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} (2)(7)(4) + (1)(0)(-1) + (-3)(5)(3) \\ -(-3)(7)(-1) - (2)(0)(3) - (1)(5)(4) \end{matrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 56 + 0 - 45 \\ -21 - 0 - 20 \end{matrix} = -30$$

Socond method: Select a Row or Column for Matrix

This method is suitable for matrices of rows 2×2, 3×3, and 4×4, and its calculation can be explained using the example below:

الطريقة الثانية: اختيار صف او عمود من المصفوفة

تلائم هذه الطريقة للمصـفوفات من الرتبة 2×2 و3×3 و4×4 ويمكن توضـيح طريقة حسـابها عن طريق المثال ادناه:

مثال :

Prof. Arej Tawfeeq Hameed

هو اختيار احد الصفوف او الاعمدة في Minors من الرتبة 3×3 استنادا لطريقة المحدد B محدد المصفوفة مثالنا قمنا باختيار الصف الاول ثم تثبيت اشارات البدء بالحساب بالاشارة الموجبة وبعدها السالبة وبعدها الموجبة (بالتناوب) كما هو مبين هو :

$$B = \begin{bmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{1} & \overset{+}{-3} \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

اختيار الصف الاول وتثبيت الاشارات

اختيار العنصر الاول من الصف الاول الذي تم تثبيت اشارة موجبة وضربة بالمحدد (يتم تحديد قيمة المحدد بعد حذف الصف والعمود الذي ينتمي له العنصر الاول داخل المصفوفة) وبعدها تثبيت الاشارة السالبة واخذ العنصر الثاني للصف الاول وضربة بالمحيدد المتبقي بعد حذف الصف والعمود الذي ينتمي له العنصر الثاني في الصف الاول وهكذا كما مبين ادناه :

$$|B| = (2)\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(28) - (1)(20) + (-3)(22)$$

$$|B| = 56 - 20 - 66 = -30$$

ملاحظة :لو اخترنا الصف الثاني او العمود الثالث لكان افضل وذلك لوجود العنصر (0)

ملاحظة : اذا كانت المصفوفة تحتوي على صف او اكثر او عمود او اكثر اصفار فان محددها يساوي صفر.
واذا تناسب صفان او عمودان فان محدد المصفوفة يساوي صفر ايضاً .

Inverse Matrix المعكوس المصفوفة

If A is a square matrix and B is a matrix that fulfills the relationships $AB = I = BA$ where I is the neutral matrix, then matrix A is said to be invertible, and matrix B is called the inverse of A, and the inverse is symbolized by the symbol A^{-1}.

المصفوفة المحايدة I حيث $AB = I = BA$ مصفوفة تحقق العالقات B مصفوفة مربعة و كانت A اذا كانت A معكوس B و يطلق على المصفوفة(Convertible)بانها قابلة لالنعكاس A، عندئذ يقال للمصفوفة A^{-1} للمعكوس بالرمز.

The Adjoint of Matrix طريقة القانون او المصفوفة المرافقة

ملاحظة :-المصفوفة الغير مربعة ليست لها معكوس.

Example 1 :

Find inverse and determinate of inverse of the following system by

$$-4x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 - x_2 = -1$$
$$x_1 - x_3 = 0 \ .$$

Prof. Dr. Areej Fayq Hameed

Solution:

$$[A:I] \xrightarrow{?} [I:A^{-1}]$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1=r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+4r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+3r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad ,|A| = (1)(1)(-1) = -1 \quad , \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Example 2 :

Find inverse and determinate of inverse of the following system by $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Solution:

$$[A:I] \xrightarrow{?} [I:A^{-1}]$$

$$\left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\right] \xrightarrow{r_2=r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=-\frac{1}{4}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ -1 & 0 & 1\\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4}\end{bmatrix} \quad ,|A|=(-1)(1)(1)(-4)=4 \quad , \quad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4}.$$

Homework

Find inverse and determinate of inverse of the following

A) $4x_1-2x_2+x_3=7$
$4x_1-8x_2+x_3=-21$
$-2_1x_1+x_2+5x_3=15$

B) $3x_1-6x_2+7x_3=3$
$9x_1-5x_3=3$
$5x_1\text{-}8x_2+6x_3=-4$.

Solving linear System of Equations

We can write the general system that content m equations and n variables as follow :
يمكن كتابة النظام العام الذي يحتوي على معادلات m ومتغيرات n على النحو التالي

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ &\vdots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{aligned}\right\} \quad \cdots(1)$$

By using matrices باستخدام المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn}\end{bmatrix}, \; b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix} \quad ,x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

Now, we can rewrite (1) as follows :- $Ax=b$ والآن يمكننا إعادة كتابة (1) على النحو التالي

Note:-

1- If the number of equations m is less than the number of variables n , then the system has a solution but not a unique.
إذا كان عدد المعادلات m أقل من عدد المتغيرات n وحيدا فإن النظام له حل ولكنه ليس.

2- If the number of equations m is more than the number of variables n, then the system has no solution at all.
إذا كان عدد المعادلات m أكبر من عدد المتغيرات n. فإن النظام ليس له حل على الإطلاق

3- If the number of equations m equal to number of variables n, then there exist unique solution if the matrix A has an inverse.
إذا كان عدد المعادلات m يساوي عدد المتغيرات n فهناك حل فريد إذا كانت المصفوفة A لها معكوس

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

4- If the number of equations mequal to number of variables n, then the homogeneous system $Ax = 0$ have unique solution is trivial solution $(x_i = 0 \ , \forall i)$.

يكون حله فريدا وهو الحل $Ax = 0$ فإن النظام المتجانس nإذا كان عدد المعادلات يســـاوي عدد المتغيرات التافه$(x_i = 0 \ , \forall i)$..

There are two methods for solving linear system of equations:

(1)

(2) Gauss elimination with partial pivoting كاوس للحذف مع الارتكاز الجزئي

If $Ax = b$is a system of n linear equations .now we perform row operations until we convert A (After m steps) into an upper triangular matrix .

إذا كان $Ax = b$ عبارة عن نظام من المعادلات الخطية n نحول A. الآن نقوم بإجراء عمليات صـــفية حتى إلى مصفوفة مثلثية عليا.m(بعد خطوات)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$+ a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)} + a_{(n-1)n}x_n = b_{(n-1)}$$
$$+ a_{nn}x_n = b_n.$$

$$\therefore a_{n_n} \neq 0 \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$\therefore a_{(n-1)(n-1)} \neq 0 \Rightarrow x_{(n-1)} = \frac{b_{(n-1)} - a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}$$

In general if we find the value of $x_n, x_{(n-1)}, \cdots, x_2, x_1$ بشكل عام إذا وجدنا قيمة

Then $x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{k_k}}, \ k = n, n-1, \ldots, 2, 1$

Example 3:

Solve the following systems of equations by the Gauss method of elimination, then find the determinant

$$4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1}, \ b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

Prof Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\2&-4&6&3\\1&-1&3&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&0.5\\1&-1&3&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{1}{4}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&0.5\\0&1.25&2.5&2.75\end{array}\right)\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{1.25}{0.5}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&0.5\\0&0&-10&1.5\end{array}\right)$$

$x_3=\frac{1.5}{-10}=-0.15$, $x_2=\frac{(b_2-a_{23}x_3)}{a_{22}}=\frac{(0.5-(5)(-0.15))}{0.5}=2.5,$

$x_1=\frac{(b_1-\sum_{j=2}^{3}a_{ij}x_j)}{a_{1_1}}=\frac{(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)}{a_{11}}=\frac{(5-(-9)(2.5)-2(0.15))}{4}=6.95,\ x=\begin{bmatrix}0.95\\2.5\\-0.15\end{bmatrix}$

$|A|=4(0.5)(-10)=-20$

Example 4:

Use Gauss elimination to solve

$3x_1+2x_2-2x_3=16$

$4x_1+3x_2+3x_3=2$

$-2x_1+x_2-x_3=1$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\4&3&3\\-2&1&-1\end{bmatrix}_{3\times3},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}_{3\times1},\ b=\begin{bmatrix}16\\2\\1\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&16\\4&3&3&2\\-2&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{4}{3}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&16\\0&0.3333&5.6667&-19.3333\\-2&1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+\frac{2}{3}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&16\\0&0.3333&5.6667&-19.3333\\0&2.3333&-2.3333&11.6667\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{2.3333}{0.3333}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&16\\0&0.3333&5.6667&-19.3333\\0&0&-41.9987&147.0114\end{array}\right)$$

$x_3=\frac{147.0114}{-41.9987}=-3.5$, $x_2=\frac{(b_2-a_{23}x_3)}{a_{22}}=\frac{(-19.3333-(5.6667)(-3.5))}{0.3333}=1.5,$

$x_1=\frac{(b_1-\sum_{j=2}^{3}a_{ij}x_j)}{a_{1_1}}=\frac{(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)}{a_{11}}=\frac{(16-2(-3.5)(2)(1.5))}{3}=6.6667\ \ x=\begin{bmatrix}1\\-0.5\\0.5\end{bmatrix}$

$|A|=3(0.3333)(-41.9987)=-41.9945.$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Homework

Solve the following systems of equations by the Gauss method of elimination, then find the determinant.

A) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 + x_2 - x_3 = 2$
$x_1 - x_2 - x_3 = 1$

B) $x_1 - x_2 = 0$
$2x_1 + x_3 = 4$
$-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$.

Partial Pivoting

الارتكاز الجزئي

المعادلة المستخدمة لحذف أحد المتغيرات من المعادلات المتبقية تسمى معادلة الارتكاز ومعامل تلك المتغيرات في المعادلة يسمى عنصر الارتكاز في المثال السابق هو عنصر الارتكاز والمعادلة $a_{11} = 4$ الأولى هي معادلة الارتكاز في الخطوة الأولى. وفي الخطوة الثانية عنصر الارتكاز والمعادلة $a_{22} = 0.5$ الثانية هي معادلة الارتكاز وهكذا...

ولذلك فإن عملية اختيار معادلة الارتكاز تسمى الارتكاز الجزئي

ملاحظة:-

1- استخدم الارتكاز الجزئي (إذا كان واحد على الأقل من a_{ii} لجميع i=1,2,...,n يساوي أو يقترب من الصفر فيمكننا استخدام الارتكاز الجزئي عن طريق تغيير ترتيب المعادلات لضمان $a_{ii} \neq 0 \ \ \forall i = 1,2, \cdots n$.

2- (ان لا يكون عنصر الارتكاز صغير جدا لانه عندما نستخدمه لحذف اي مجهول من المعادلات الاخرى مثلا فان المقدار $\left(\frac{-a_{ik}}{a_{kk}}\right)$ في السطر (الصف) هذا كبير جدا وعند ضربه يكون يكون k وذلك بضربه بالمقدار كبير جدا ايضا ثم يضاف الى المعادلات الاخرى فان مقدار خطا التدوير يكون كبير ويتضاعف في كل خطوة لقيم a_{ik} نختار عنصر الارتكاز من بين عناصر k(من خطوات طريقة كاوس للحذف) لذلك في الخطوة i=k+1,k+2,…,n(اكبر ما يمكن $|a_{ik}|$ بحيث ان .

Example 5:

Solve the following systems of equations by the Gauss elimination with Partial pivoting:

r_1: $0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$

r_2: $5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$ has the exact solution $x_1 = 10 \ and \ x_2 = 1$.

Solution:

(by Gauss elimination) , we get

$$A = \begin{bmatrix} 0.003 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix}_{2\times 2} , \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} , \ b = \begin{bmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$[A:b] = \left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 - \frac{5.291}{0.003} r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right)$$

Prof. Dr. Arej Tawfeeq Hameed

$x_2 = \frac{104400}{104300} \Rightarrow x_2 = 1.001$.

$0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \Rightarrow 0.003x_1 + 59.14(1.001) = 59.17$

$\Rightarrow x_1 = \frac{(59.17 - 59.19914)}{0.003} \Rightarrow x_1 = 9.7133$

We note that the large error in the numerical solution for x_1 resulted from the small error of 0.001 in solving for x_2.

x_2 نتج عن الخطأ الصغير 0.001 في الحل لـ x_1 ونلاحظ أن الخطأ الكبير في الحل العددي لـ

So we change the order of the equations in the linear system

لذلك نقوم بتغيير ترتيب المعادلات في النظام الخطي

r_1: $0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$

r_2: $5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$

By using the pivoting procedure , where باستخدام الإجراء الارتكاز، حيث

$\max\left\{\left|a_{11}^{(1)}\right|, \left|a_{21}^{(1)}\right|\right\} = \max\{0.003, 5.291\} = 5.291.$

$5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.781$

$0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & 59.17 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 - \frac{0.003}{5.291} r_1} \begin{pmatrix} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.142 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = 1 \; and \; x_1 = 10.$

Example 6:

Find the following system solution by using Gauss elimination **with Partial pivoting**:

$3x_1 + 3x_2 + 9 = 0$

$2x_1 - x_2 + x_3 = -1$

$3x_1 + 3x_2 \; + 5x_3 = 4.$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} , \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1} , \; b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 - \frac{3}{2} r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4.5 & 7.5 & 1.5 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{3}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\0&4.5&7.5&1.5\\0&4.5&3.5&5.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\0&4.5&7.5&1.5\\0&0&-4&4\end{array}\right)$$

$x_3=\frac{-4}{4}\Rightarrow x_3=-1$.

$4.5x_2+7.5x_3=1.5\Rightarrow 4.5x_2=1.5-7.5(-1)\Rightarrow x_2=\frac{9}{4.5}=2$

$2x_1-x_2+x_3=-1\Rightarrow 2x_1=-1+x_2-x_3=-1+2-(-1)\Rightarrow x_1=\frac{2}{2}=1.$

$|A|=(-1)(1)(2)(3)=-6.$

Homework

Solve the following systems of equations by the Gauss method of elimination, then find the determinant.

A) $x_2+x_3=1$
$x_1+x_3=1$
$x_1+x_2=1$

B) $3x_1+2x_2+5x_3=1$
$x_1-x_2+x_3=4$
$6x_1+4x_2+10x_3=7.$

(3) Gauss – Jordan Elimination Method طريقة كاوس-جوردان للحذف

في هذا القسم، نتعلم كيفية حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عملية تسمى طريقة كاوس-جوردان. تبدأ العملية أولاً بالتعبير عن النظام كمصفوفة، ثم اختزاله إلى نظام مكافئ من خلال عمليات صفية بسيطة. وتستمر العملية حتى يصبح الحل واضحا من المصفوفة. تسمى المصفوفة التي تمثل النظام بالمصفوفة المعززة(القطرية)، وتسمى المعالجة الحسابية المستخدمة للانتقال من نظام إلى نظام مكافئ مخفض بعملية الصف.

The Gauss-Jordan elimination method to solve a system of linear equations is described in the following steps.

تم وصف طريقة الحذف كاوس-جوردان لحل نظام من المعادلات الخطية في الخطوات التالية.

1. اكتب المصفوفة الموسعة للنظام.
2. استخدم عمليات الصف لتحويل المصفوفة الموسعة بالشكل الموضح أدناه، وهويسمى نموذج الصف المخفض (RREF).

(أ) يتم تجميع الصفوف (إن وجدت) المكونة بالكامل من الأصفار معًا في الجزء السفلي من الصفحةمصفوفة.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

(ب) في كل صف لا يتكون بالكامل من أصفار، يكون العنصر غير الصفري الموجود في أقصى اليسار هو 1يُسمى 1 عنصر القيادي أو المحورية
(ج) كل عمود يحتوي بدايته على 1 القيادي يحتوي على أصفار في جميع الإدخالات الأخرى.
(د) الرقم 1 القيادي في أي صف يقع على يسار أي رقم 1 القيادي في الصفوف التي تحته.
3. قم بإيقاف العملية في الخطوة 2 إذا حصلت على صف جميع عناصره أصفار باستثناء العنصر الأخير القيادي.
وقراءة حلول النظام 2وفي هذه الحالة يكون النظام غير متناسق وليس له حلول. بخلاف ذلك، أكمل الخطوة من المصفوفة النهائية .

Example 7 :

Solve the following system by using the Gauss-Jordan elimination method.

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$
$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$
$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1.$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times3} , \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1} , \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2=r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+\frac{3}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2.5 & -5.5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2.5 & -5.5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{1}{5}r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2.5 & -5.5 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&0&2\\0&-2&0&-4\\0&0&-5&-15\end{array}\right)$$

$x_1=\frac{2}{2}=1, x_2=\frac{-4}{-2}=2\ and\ x_3=\frac{-15}{-5}=3.$
$|A|=1(2)(3)=6.$

Example 8 :
Solve the following system by using the Gauss-Jordan elimination method.
$4x_1-9x_2+2x_3=5$
$2x_1-4x_2+6x_3=3$
$x_1-x_2+3x_3=4.$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}4&-9&2\\2&-4&6\\1&-1&3\end{bmatrix}_{3\times3},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}_{3\times1},\ b=\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\2&-4&6&3\\1&-1&3&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&-4.5\\1&-1&3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{1}{4}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&-4.5\\0&1.25&2.5&0.25\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+18r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4&0&92&-76\\0&0.5&5&-4.5\\0&1.25&2.5&0.25\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{1.25}{0.5}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4&0&92&-76\\0&0.5&5&-4.5\\0&0&-10&11.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}4&0&92&-76\\0&0.5&0&1.25\\0&0&-10&11.5\end{array}\right)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\xrightarrow{r_2=r_2+\frac{92}{10}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 0 & 0 & 29.8\\ 0 & 0.5 & 0 & 1.25\\ 0 & 0 & -10 & 11.5\end{array}\right)$$

$$x_1=\frac{29.8}{4}=7.45, x_2=\frac{1.25}{0.5}=2.5\ and\ x_3=\frac{11.5}{-10}=-1.15.$$

$$|A|=7.45(2.5)(-1.15)=-21.4188.$$

Homework

Solve the following systems of equations by the Gauss method of elimination, then find the determinant.

A- $x_1 - x_3 = 0$
$2x_1 - x_3 = -1$
$-4x_1 + x_2 + x_3 = 2$

B- $3x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$
$5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4.$

Example 9 :

Solve the following system by using the Gauss-Jordan elimination method **with Partial pivoting**.

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8$
$x_1 + x_2 + x_3 = 5$
$4x_1 + 5x_3 = 2$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}_{3\times3},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}_{3\times1},\ b=\begin{bmatrix}5\\ 8\\ 2\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 8\\ 4 & 0 & 5 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 4 & 0 & 5 & 2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-4r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 1 & -18\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 9\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 1 & -18\end{array}\right)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\xrightarrow{r_3=r_3+4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&9\\0&1&3&-2\\0&0&13&-26\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=\frac{1}{13}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&9\\0&1&3&-2\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&3&-2\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&4\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

$x_1 = 5, x_2 = 4\ and\ x_3 = -2.$ $\quad |A| = (-1)(5)(4)(-2) = 40.$

Example 10 :

Solve the following system by using the Gauss-Jordan elimination method **with Partial pivoting**.

$x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 = 1$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}_{3\times3},\ x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}_{3\times1},\ b = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A;b] = \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{array}\right) \xrightarrow{r_2=r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&2&1\end{array}\right)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\xrightarrow{r_3=\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 1 & 0.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 1 & 0.5\end{array}\right)$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0.5.$ $|A| = (-1)(-1)(0.5)(0.5)(0.5) = 0.125.$

Homework

Solve the following systems of equations by the Gauss-Jordan elimination method **with Partial pivoting**, then find the determinant.

A- $-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$
$2x_1 + x_3 = 4$
$x_1 - x_2 = 0$

B- $-4x_1 + x_3 = 0$
$2x_1 - x_2 = -2$
$x_1 + x_2 - x_3 = 1.$

ملاحظة:-

- يمكننا استخدام الارتكاز الجزئي بطريقة كاوس – جوردان.
- يمكننا استخدام الارتكاز الجزئي عندما نجد معكوس المصفوفة.
- يمكننا إيجاد معكوس المصفوفة بطريقة كاوس – جوردان واستخدام العملية السابقة للحصول على $[I: A^{-1}]$

Example 11 :

Find solution ,determinate, inverse and determinate of inverse of the following system by using Gauss – Jordan method **with Partial pivoting**.

أوجد الحل والمحدد والمعكوس ومحدد المعكوس في النظام التالي باستخدام طريقة كاوس – جوردان مع الارتكاز الجزئي.

$x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 = 1$

Solution:

$[A: b: I] \xrightarrow{?} [I: b: A^{-1}]$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1=r_2} \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_1} \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_2} \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=-\frac{r_3}{2}} \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_3} \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-r_3} \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad , x_1 = x_2 = x_3 = 0.5 \quad ,$$

$$|A| = (-1)(1)(1)(-2) = 2 \ , \ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

Example 12 :

Find solution ,determinate, inverse and determinate of inverse of the following system by using Gauss – Jordan method **with Partial pivoting**.

$-4x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 - x_2 = -1$

$x_1 - x_3 = 0$.

Solution:

$$[A: b: I] \xrightarrow{?} [I: b: A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c:ccc} -4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1=r_3} \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\xrightarrow{r_2=r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:c:c:c:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+4r_1}\left[\begin{array}{ccc:c:c:c:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=r_2}\left[\begin{array}{ccc:c:c:c:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc:c:c:c:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=-r_3}\left[\begin{array}{ccc:c:c:c:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+r_3}\left[\begin{array}{ccc:c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+3r_3}\left[\begin{array}{ccc:c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad , x_1=x_2=x_3=-1 \quad ,$$

$$|A|=(-1)(-1)(1)(1)(-1)=-1 \quad , \quad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Homework

Find solution ,determinate, inverse and determinate of inverse of the following system by using Gauss – Jordan method **with Partial pivoting.**

A- $-4x_1+x_3=0$
$2x_1-x_2=-2$
$x_1+x_2-x_3=1$

B- $-2x_1+x_2-2x_3=1$
$2x_1+x_3=4$
$x_1-x_2=0.$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Chapter Four

Interpolation and Extrapolation

الاندراج والاستكمال

ونريد $f(x_0), f(x_2), f(x_2), \cdots, f(x_m)$ إذا كان لدينا مجموعة محدودة من قيم الدالة غير المعروفة تقع ضمن نطاق النقاط فتسمى العملية الاستيفاء والعكس x^*، إذا كانت النقطة x^*تخمين قيمة الدالة عند النقطة يسمى الاستقراء.

هناك العديد من الطرق الرياضية المستخدمة في هذا المجال

1- Lagrange polynomial

لتكن f دالة حقيقية ومستمرة في الفترة $[a, b]$ وقيمها معروفة في النقاط $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$ المرقمة $m+1$ في نقطة واحدة أو عدة نقاط جديدة، نقوم بإغلاق الدالة إلى كثيرة حدود من فئة f . لتخمين قيمة دالة المعطاة وبالتالي العثور على كثيرة حدود جديدة وتكوين النقاط اللازمة للعثور m متوافقة مع الدالة في النقاط على صورها .

The general formula of polynomial $P_m(x)$ (Lagrange polynomial)

الصيغة العامة لكثيرة الحدود (متعدد الحدود لاكرانج للاندراج)

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{m} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

$$f(x) \approx P_m(x)$$

$$= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_m)}$$

$$+ f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_m)}$$

$$+ \cdots + f(x_m)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\cdots(x_m-x_{m-1})}$$

And to find $f(x^*)$ without knowing form of the function we use the following law

$P_m(x^*) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{m} \frac{(x^*-x_i)}{(x_j-x_i)}$

$$P_m(x^*) = f(x_0)\frac{(x^*-x_1)(x^*-x_2)\cdots(x^*-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_m)}$$

$$+ f(x_1)\frac{(x^*-x_0)(x^*-x_2)\cdots(x^*-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_m)} +$$

$$\cdots + f(x_m)\frac{(x^*-x_0)(x^*-x_1)\cdots(x^*-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\cdots(x_m-x_{m-1})}$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

ملاحظة:-

1- متعددة حدود لاكرانج يعطي نتيجة دقيقة عند أي نقطة من نقاط الجدول لأن الدالة متوافقة مع متعددة الحدود في نقاط الجدول.

2- نستخدم متعددة حدود لاكرانج في كلتا الحالتين الاندراج والاستكمال.

Example 1:

Find the form of function $f(x)$ and then find $f(1.5), f(3.7), f(0.65)$ of the following table and using Lagrange polynomial

x	1	1.2	2
y	0	0.1823	0.6931

Solution:

$$P_2(x) = \sum_{j=0}^{2} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 0 + 0.1823\frac{(x-1)(x-2)}{(1.2-1)(1.2-2)} + 0.6931\frac{(x-1)(x-1.2)}{(2-1)(2-1.2)}$$

$$P_2(x) = -0.273x^2 + 1.5121x - 1.2391 \Rightarrow$$

$$f(1.5) \approx P_2(1.5) = -0.273(1.5)^2 + 1.5121(1.5) - 1.2391 = 0.4148.$$

$$f(3.7) \approx P_2(3.7) = -0.273(3.7)^2 + 1.5121(3.7) - 1.2391 = -0.6183.$$

$$f(0.65) \approx P_2(0.65) = -0.273(0.65)^2 + 1.5121(0.65) - 1.2391 = -0.3715.$$

Homework

Find $f(1.7), f(5), f(2.5)$?

To find the function

$$f(x) \approx P_2(x)$$

$$= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= f(1.1)\frac{(x-1.7)(x-3)}{(1.1-1.7)(1.1-3)} + f(1.7)\frac{(x-1.1)(x-3)}{(1.7-1.1)(1.7-3)} + f(3)\frac{(x-1.1)(x-1.7)}{(3-1.1)(3-1.7)}$$

$$= (0)\frac{(x-1.2)(x-2)}{(1-1.2)(1-2)} + (0.1823)\frac{(x-1)(x-2)}{(1.2-1)(1.2-2)} + (0.6931)\frac{(x-1)(x-1.2)}{(2-1)(2-1.2)}$$

$$= (0) + \frac{(0.1823)}{(1.2-1)(1.2-2)}(x-1)(x-2) + \frac{(0.6931)}{(2-1)(2-1.2)}(x-1)(x-1.2)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$= \frac{(0.1823)}{0.16}(x^2 - 3x + 2) + \frac{(0.6931)}{0.8}(x^2 - 2.2x + 1.2)$$

$$f\ (x) = -0.273\ x^2 + 1.5121\ x - 1.2391.$$

Finite differences:- **الفروق المنتهية:-**

Let f be a real function whose values are known in $m+1$ points of equal dimensions $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$ and that have known images $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m)$ or $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_m$ definite the first difference at the point x_0 .

لتكن f دالة حقيقية تكون قيمها معروفة في $m+1$ نقاط متساوية الأبعاد $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$ ولها صور معروفة $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_m$ أو تحديد الفرق الأول في هذه النقطة x_0.

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) \Rightarrow \Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta y_2 = y_3 - y_2, \cdots, \Delta y_{m-1} = y_m - y_{m-1}$$

defined the second difference as follows:-

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - y_1 - y_1 + y_0$$

$$\Rightarrow \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 \Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)$$

$$= y_3 - y_2 - y_2 + y_1 \Rightarrow \Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\vdots$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \quad , i = 1,2, \cdots, n-2.$$

In general $\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j y_{i+k-j}$

Table of differences

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Divided Finite differences to three types:- **تنقسم الفروق المنتهية إلى ثلاث أنواع:-**

1- Forward differences **الفروقات التقدمية**
2- Backward differences **الفروقات التراجعية**
3- Central differences **الفروقات المركزية**
4- Divided differences: **الفروقات المنتهية النسبية**

1- Forward differences **الفروقات التقدمية**

To find an image point located at the beginning of the table we use the Forward difference. للعثور على نقطة الصورة الموجودة في بداية الجدول نستخدم الفروقات التقدمية. نلاحظ ان

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \Rightarrow y_1 = y_0 + \Delta y_0 \Rightarrow y_1 = (1+\Delta)y_0$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \Rightarrow y_2 = (1+\Delta)y_1 \Rightarrow y_2 = (1+\Delta)^2 y_0$$
$$\vdots$$
$$y_m = (1+\Delta)^m y_0 \quad .$$

We get $y_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k y_0$

$$y_m = f(x_0 + mh)$$
$$= y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

$m = \frac{x_m - x_0}{h}$.

Example 3:

Find $f(0.3), f(0.8), f(1.2)$ of the following table use the forward difference.

x	0	1	2	3	4
y	1	2	9	28	65

Solution:

Table of the forward difference.differences

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	1				
		1			
1	2		6		
		7		6	
2	9		12		0
		19		6	
3	28		18		
		37			
4	65				

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{0.3-0}{1} = 0.3,$

$f(x) = f(x_0 + mh) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots.$

$f(0.3) = 1 + (0.3)(1) + \frac{(0.3)(0.3-1)}{2}(1) + \frac{(0.3)(0.3-1)(0.3-2)}{6}(6)\ .$

$f(0.3) = 1 + 0.3 - 0.63 + 0.357 = 1.027.$

Table of the forward difference

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	1				
		1			
1	2		6		
		7		6	
2	9		12		0
		19		6	
3	28		18		
		37			
4	65				

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{0.8-1}{1} = -0.2,$

$f(0.8) = 2 + (-0.2)(7) + \frac{(-0.2)(-0.2-1)}{2}(12) + \frac{(-0.2)(-0.2-1)(-0.2-2)}{6}(6)\ .$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$f(0.8) = 2 - 1.4 + 1.44 - 0.528 = 1.512.$

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{1.2-1}{1} = 0.2,$

$f(1.2) = 2 + (0.2)(7) + \frac{(0.2)(0.2-1)}{2}(12) + \frac{(0.2)(0.2-1)(0.2-2)}{6}(6)$.

$f(1.2) = 2 + 1.4 - 0.96 + 0.288 = 2.728.$

To find the function

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{x-0}{1} = x$

$f(x) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots.$

$f(x) = 1 + (x)(1) + \frac{(x)(x-1)}{2}(1) + \frac{(x)(x-1)(x-2)}{6}(6) = 1 + x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + 1$. $f(x) = x^3 + 1$

Example 4:

Find $f^{-1}(1.64), f^{-1}(0.18)$ of the following table use the forward differences .

x	1	2	3	4	5	6
y	0	0.7	1.1	1.4	1.6	1.7

Solution:

Table of the forward difference.differences

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	0				
		0.7			
2	0.7		-0.3		
		0.4		0.2	
3	1.1		-0.1		-0.2
		0.3		0	يهمل
4	1.4		-0.1		
		0.2		0	
5	1.6		-0.1		
		0.1			
6	1.7				

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$m = \frac{x-x_0}{h} \implies m = \frac{x-1}{1} = x-1,$

$f(x) = f(x_0 + mh) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots.$

$f(x) = 0 + (x-1)(0.7) + \frac{(x-1)(x-2)}{2}(-0.3) + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}(0.2) + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}\left(-0.2^{\text{يهمل}}\right)$

$f(x) = 0 + 0.7x + 0.7 - 0.15x^2 + 0.45x - 0.3 + 0.0333x^3 - 0.2x^2 + 0.3667x - 0.1999.$

$f(x) = 0.0333x^3 - 0.35x^2 + 1.5167x + 0.2001.$

$f(x) = 0.0333x^3 - 0.35x^2 + 1.5167x + 0.2001 \implies f(x) = 1.64 \implies f^{-1}(1.64) = ?$

$\implies 1.64 = 0.0333x^3 - 0.35x^2 + 1.5167x + 0.2001.$

$\implies 0.0333x^3 - 0.35x^2 + 1.5167x - 1.4399 = 0$

$\implies$ بالدستور . $\therefore f^{-1}(1.64) = 5.296.$

$f(x) = 0.0333x^3 - 0.35x^2 + 1.5167x + 0.2001 \implies f(x) = 0.18 \implies f^{-1}(0.18) = ?$

$\implies 0.18 = 0.0333x^3 - 0.35x^2 + 1.5167x + 0.2001.$

$\implies 0.0333x^3 - 0.35x^2 + 1.5167x + 0.0201 = 0$

$\implies$ بالدستور $\therefore f^{-1}(0.18) = 1.2.$

Homework

Find $f(0.7), f(2.3), f(4.2), f^{-1}(10), f^{-1}(30)$ of the following table use the forward difference and find To find the function .

x	0	5	10	15	20	25
y	7	11	14	18	24	32

2-Backward differences

الفروقات التراجعية

To find an image point located at the end of a table we use the Backward differences as follows

للعثور على نقطة صورة تقع في نهاية الجدول، نستخدم الفروقات التراجعية على النحو التالي

$\nabla y_1 = y_1 - y_0, \nabla y_2 = y_2 - y_1, \nabla y_3 = y_3 - y_2, \cdots, \nabla y_m = y_m - y_{m-1}$

$\nabla^2 y_m = \nabla(\nabla y_m) = \nabla y_m - \nabla y_{m-1} = (y_m - y_{m-1}) - (y_{m-1} - y_{m-2})$

Prof. Dr. Areej Tayfeeq Hameed

$\Rightarrow \nabla^2 y_m = y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}.$

$\therefore \nabla^k y_m = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j y_{i-j}$.

$\nabla^2 y_2 = \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} (-1)^j y_{2-j} = \binom{2}{0}(-1)^0 y_2 + \binom{2}{1}(-1) y_1 + \binom{2}{2}(-1)^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$.

From the definition we notice:-

$\Delta y_0 = \nabla y_{-1}, \Delta^2 y_0 = \nabla^2 y_{-1}, \Delta^3 y_0 = \nabla^3 y_{-1}$

$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \Rightarrow y_{i-1} = y_i - \nabla y_i = (1 - \nabla) y_i$

$y_{i-1} = (1 - \nabla) y_i \Rightarrow y_i = (1 - \nabla)^{-1} y_{i-1}$

And $\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1} \Rightarrow y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} = (1 + \Delta) y_{i-1} \Rightarrow y_i = (1 + \Delta) y_{i-1}$

$\boxed{(1-\nabla)^{-1} = (1+\Delta)}$ So

In general $\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j y_{i+k-j}$

Table of differences

x	y	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5
x_0	y_0					
		∇y_0				
x_1	y_1		$\nabla^2 y_0$			
		∇y_1		$\nabla^3 y_0$		
x_2	y_2		$\nabla^2 y_1$		$\nabla^4 y_0$	
		∇y_2		$\nabla^3 y_1$		$\nabla^5 y_0$
x_3	y_3		$\nabla^2 y_2$		$\nabla^4 y_1$	
		∇y_3		$\nabla^3 y_2$		
x_4	y_4		$\nabla^2 y_3$			
		∇y_4				
x_5	y_5					

$$y_m = f(x_0 + mh) = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_0 + \cdots$$

Example 5:

Find $f(3.8), f(3.2), f(2.8)$ of the following table use the forward difference.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

x	0	1	2	3	4
y	1	2	9	28	65

Solution:

Table of the forward difference.differences

x	y	∇	∇^2	∇^3	∇^4
0	1				
		1			
1	2		6		
		7		6	
2	9		12		0
		19		6	
3	28		18		
		37			
4	65				

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{3.8-4}{1} = -0.2,$

$f(x) = f(x_0 + mh) = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_0 + \ldots.$

$f(3.8) = 65 + (-0.2)(37) + \frac{(-0.2)(-0.2+1)}{2}(18) + \frac{(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)}{6}(6)\ .$

$f(3.8) = 65 - 7.4 - 1.44 - 0.288 = 55.872.$

Table of the forward difference

x	y	∇	∇^2	∇^3	∇^4
0	1				
		1			
1	2		6		
		7		6	
2	9		12		0
		19		6	
3	28		18		
		37			
4	65				

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{3.2-3}{1} = 0.2,$

$f(3.2) = 28 + (0.2)(19) + \frac{(0.2)(0.2+1)}{2}(12) + \frac{(0.2)(0.2+1)(0.2+2)}{6}(6)$.

$f(3.2) = 28 + 3.8 + 1.44 + 0.528 = 33.768.$

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{2.8-3}{1} = -0.2,$

$f(2.8) = 28 + (-0.2)(19) + \frac{(-0.2)(-0.2+1)}{2}(12) + \frac{(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)}{6}(6)$.

$f(2.8) = 28 - 3.8 - 0.96 - 0.288 = 22.952.$

To find the function

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{x-4}{1} = x - 4$

$f(x) = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_0 + \ldots.$

$f(x) = 65 + (x-4)(37) + \frac{(x-4)(x-3)}{2}(18) + \frac{(x-4)(x-3)(x-2)}{6}(6)$

$= 65 + 37x - 148 + 9x^2 - 63x + 108 + x^3 - 7x^2 + 12x - 2x^2 + 14x - 24 = x^3 + 1$.

$f(x) = x^3 + 1$.

Homework

Find $f(20.3), f(24.8), f(23.2), f^{-1}(22), f^{-1}(30)$ of the following table use the forward difference and find To find the function .

x	0	5	10	15	20	25
y	7	11	14	18	24	32

3- Central differences **الفروقات المركزية**

To find a point image located in the center of a table or near the center, we use Central differences as follows:

للعثور على صورة نقطية تقع في وسط الجدول أو بالقرب من المركز، نستخدم الفروق المركزية كما يلي:

$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{للزوجي} \quad Example} \delta y_3 = y_{\frac{7}{2}} - y_{\frac{5}{2}}$

$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_{i-1} \xrightarrow{\text{للفردي} \quad Example} \delta y_{\frac{3}{2}} = y_2 - y_1$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i) = \delta\left(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}\right) = \delta y_{i+\frac{1}{2}} - \delta y_{i-\frac{1}{2}} = (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}).$

$\delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \forall i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = \delta^2 y_{i+1} - \delta^2 y_i$

:

:

$\delta^k y_i = \delta(\delta^{k-1} y_i) = \delta^{k-1}(\delta y_i) = \delta^{k-2}((y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}))$=…..

x	y	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
x_0	y_0					
		δy_0				
x_1	y_1		$\delta^2 y_0$			
		δy_1		$\delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_0$	
		δy_2		$\delta^3 y_1$		$\delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_1$	
		δy_3		$\delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\delta^2 y_3$			
		δy_4				
x_5	y_5					

$$f(x) = f(x_0 + mh)$$
$$= y_0 + m\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\delta^2 y_1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\delta^3 y_{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

There are two formulas for finding central point images:- هناك صيغتان للحصول على صور الفروقات المركزية

1-**Besssl's formulas** صيغ بسل المركزية

Its general formula :- صيغته العامة

$$y_m = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-0.5)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{m(m^2-1)(m-2)}{4!}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

Prof. Dr. Areej Tavieeq Hameed

2-**Stirling's formulas** **صيغ ستيرلينك المركزية**

Its general formula :- صيغته العامة

$$y_m = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \cdots$$

Note:-

$\mu y_i = \frac{y_{i+1}+y_i}{2}$ $\xrightarrow{Example}$ $\mu y_1 = \frac{y_2+y_1}{2}$,

$\mu y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+1}+y_i}{2}$ $\xrightarrow{Example}$ $\mu y_{\frac{1}{2}} = \frac{y_1+y_0}{2}$, μ is the average

$\mu\delta y_i = \frac{\delta y_{i+\frac{1}{2}}+\delta y_{i-\frac{1}{2}}}{2}$ و $\mu\delta^2 y_i = \frac{\delta^2 y_{i+\frac{1}{2}}+\delta^2 y_{i-\frac{1}{2}}}{2}$.

Example 6:

Find $f(2.4)$ of the following table use the forward difference.

x	0	1	2	3	4	5
y	5	6	13	32	65	130

Solution:

Table of the forward difference. **Besssl's formulas** صيغ بسل المركزية

Its general formula :- صيغته العامة

$$y_m = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m-\frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-0.5)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m^2-1)(m-2)}{4!}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

x	y	δ	δ^2	δ^3	δ^4
0	5				
		1			
1	6		6		
		7		6	
2	13		12		0
		19		6	
3	32		18		0
		37		6	
4	65		24		
		61			
5	130				

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{2.4-2}{1} = 0.4.$

$$y_m = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-0.5)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$$

$$y_{2.4} = \frac{13+32}{2} + (0.4-0.5)(19) + \frac{0.4(0.4-1)}{2}\left(\frac{12+18}{2}\right) + \frac{0.4(0.4-1)(0.4-0.5)}{6}(6).$$

$y_{2.4} = 22.5 + (-1.9) + (-0.12)(15) + 0.024 = 22.5 - 1.9 - 1.8 + 0.024.$

$y_{2.4} = 18.824.$

Stirling's formulas **صيغ ستيرلينك المركزية**

Its general formula :- صيغته العامة

$$y_m = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \cdots$$

x	y	δ	δ^2	δ^3	δ^4
0	5				
		1			
1	6		6		
		7		6	
2	13		12		0
		19		6	
3	32		18		0
		37		6	
4	65		24		
		61			
5	130				

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$y_m = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \cdots$$

$$y_{2.4} = 13 + (0.4)\left(\frac{7+19}{2}\right) + \frac{(0.4)^2}{2}(12) + \frac{0.4((0.4)^2-1)}{6}\left(\frac{6+6}{2}\right).$$

$$y_{2.4} = 13 + (0.4)(13) + (0.16)(6) + (0.4)(-0.84) = 13 + 5.2 + 0.96 - 0.336.$$

$$y_{2.4} = 18.824.$$

To find the function

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{x-2}{1} = x - 2$$

1) صيغ بسل المركزية

$$y_m = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-0.5)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m^2-1)(m-2)}{4!}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$y_{x-2} = \frac{13+32}{2} + (x-2-0.5)(19) + \frac{(x-2)(x-3)}{2}\left(\frac{12+18}{2}\right) + \frac{(x-2)(x-3)(x-2-0.5)}{6}(6).$$

$$y_{x-2} = 22.5 + (x-2.5)(19) + (x-2)(x-3)(7.5) + (x-2)(x-3)(x-2.5).$$

$$y_{x-2} = 22.5 + 19x - 47.5 + 7.5x^2 - 37.5x + 45 + x^3 - 7.5x^2 + 18.5x - 15.$$

$$f(x) = x^3 + 5\ .$$

2) **صيغ ستيرلينك المركزية**

$$y_m = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \cdots$$

$$y_{x-2} = 13 + (x-2)\left(\frac{7+19}{2}\right) + \frac{(x-2)^2}{2}(12) + \frac{(x-2)((x-2)^2-1)}{6}\left(\frac{6+6}{2}\right)$$

$$y_{x-2} = 13 + (x-2)(13) + 6(x^2-4x+4) + (x-2)(x^2-4x+4-1)$$

$$y_{x-2} = 13 + 13x - 26 + 6x^2 - 24x + 24 + x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

$$f(x) = x^3 + 5.$$

Example 7:

Find $f(1.1)$ and $f(1.5)$of the following table use the forward difference.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	15	0	-1	0	15	80	255	624

Solution:

Table of the forward difference. **Besssl's formulas** **صيغ بسل المركزية**

Its general formula :- صيغته العامة

$$y_m = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m-\frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-0.5)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}}.$$

x	y	δ	δ^2	δ^3	δ^4
-2	15				
		-15			
-1	0		14		
		-1		-12	
0	-1		2		24
		1		12	
1	0		14		24
		15		36	
2	15		50		24
		65		60	
3	80		110		24
		175		84	
4	255		194		
		369			
5	624				

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{1.1-1}{1} = 0.1,$$

$$y_m = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m-\frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-0.5)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m^2-1)(m-2)}{4!}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$y_{1.1} = \frac{0+15}{2} + (0.1-0.5)(15) + \frac{0.1(0.1-1)}{2}\left(\frac{14+50}{2}\right) + \frac{0.1(0.1-1)(0.1-0.5)}{6}(36) + \frac{(0.1)((0.1)^2-1)(0.1-2)}{24}\left(\frac{24+24}{2}\right).$$

$y_{1.1} = 0.4641.$

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{1.5-1}{1} = 0.5.$

$$y_{1.5} = \frac{0+15}{2} + (0.5-0.5)(15) + \frac{0.5(0.5-1)}{2}\left(\frac{14+50}{2}\right) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-0.5)}{6}(36) + \frac{(0.5)((0.5)^2-1)(0.5-2)}{24}\left(\frac{24+24}{2}\right).$$

$y_{1.5} = 4.0625.$

Stirling's formulas **صيغ ستيرلينك المركزية**

Its general formula :- صيغته العامة

$$y_m = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \cdots$$

x	y	δ	δ^2	δ^3	δ^4
-2	15				
		-15			
-1	0		14		
		-1		-12	
0	-1		2		24
		1		12	
1	0		14		24
		15		36	
2	15		50		24
		65		60	
3	80		110		24
		175		84	
4	255		194		
		369			

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

5	624				

$$y_m = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \cdots$$

$$y_{1.1} = 0 + (0.1)\left(\frac{1+15}{2}\right) + \frac{(0.1)^2}{2}(14) + \frac{0.1((0.1)^2-1)}{6}\left(\frac{12+36}{2}\right) + \frac{(0.1)^2((0.1)^2-1)}{24}(24)$$

$$y_{1.1} = 0 + 0.8 + 0.07 - 0.396 - 0.0099 = 13 + 5.2 + 0.96 - 0.336$$

$$y_{1.1} = 0.4641$$

$$y_{1.5} = 0 + (0.5)\left(\frac{1+15}{2}\right) + \frac{(0.5)^2}{2}(14) + \frac{0.5((0.5)^2-1)}{6}\left(\frac{12+36}{2}\right) + \frac{(0.5)^2((0.5)^2-1)}{24}(24)$$

$$y_{1.5} = 4.0625$$

To find the function

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{x-1}{1} = x - 1$$

1) صيغ بسل المركزية

$$y_m = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-0.5)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m^2-1)(m-2)}{4!}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$y_{x-1} = \frac{0+15}{2} + (x-1-0.5)(15) + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\left(\frac{14+50}{2}\right) + \frac{(x-1)(x-2)(x-1-0.5)}{6}(36) + \frac{(x-1)((x-1)^2-1)(x-3)}{24}\left(\frac{24+24}{2}\right).$$

$$y_{x-1} = 7.5 + (x-1.5)(15) + (x-1)(x-2)(16) + (x-1)(x-2)(x-1.5)(6) + (x^3-3x^2+2x)(x-3).$$

$$y_{x-1} = 7.5 + 15x - 22.5 + 16x^2 - 48x + 32 + 6x^3 - 18x^2 + 12x - 9x^2 + 27x - 18 + x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

$$f(x) = x^4 - 1 .$$

2) **صيغ ستيرلينك المركزية**

$$y_m = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \cdots$$

$$y_{x-1} = 0 + (x-1)\left(\frac{1+15}{2}\right) + \frac{(x-1)^2}{2}(14) + \frac{x-1((x-1)^2-1)}{6}\left(\frac{12+36}{2}\right) + \frac{(x-1)^2((x-1)^2-1)}{24}(24)$$

$$y_{x-1} = 0 + (x-1)(8) + \frac{x^2-2x+1}{2}(14) + \frac{x-1(x^2-2x+1-1)}{6}(24) + \frac{x^2-2x+1(x^2-2x+1-1)}{24}(24)$$

$$y_{x-1} = 0 + 8x - 8 + 7x^2 - 14x + 7 + \frac{(x-1)(x^2-2x)}{6}(24) + \frac{x^2-2x+1(x^2-2x)}{24}(24)$$

$$y_{x-1} = 8x - 8 + 7x^2 - 14x + 7 + 4x^3 - 12x^2 + 8x + x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$$

$$y_{x-1} = x^4 - 1.$$

Homework Find $f(20.3), f(24.8), f(23.2), f^{-1}(19), f^{-1}(13)$ of the following table use the forward difference and find To find the function .

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

x	0	5	10	15	20	25
y	7	11	14	18	24	32

Homework

Find

$f(1.1), f(0.4), f(-0.1), f(3.8), f(1.5), f(4.1), f(5.3), f(-1.2), f(1.7), f^{-1}(10), f^{-1}$

of the following table use the forward difference and find To find the function .

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	-1	0	15	80	255

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Chapter Five

Numerical Derivation and Numerical Integration

Numerical derivation:الاشتقاق العددي

- **أنواع الاشتقاقات :** هناك ثلاثة أنواع رئيسية من الاشتقاقات

1- الاشتقاق العددي (Numerical Derivative): يستخدم لإيجاد معدل التغيير في قيمة الدالة عند تغيير متغير الإدخال بشكل صغير جداً.

2- الاشتقاق الجزئي (Partial Derivative): يستخدم للحصول على معدل التغير في الدالة التي تعتمد على أكثر من متغير.

3- الاشتقاق الذاتي (Self Derivative): يستخدم للحصول على معدل التغير في دالة تعتمد على نفسها في عملية متكررة.

1.1 Numerical derivation when points are not equal in dimensions
1.1 الاشتقاق العددي عندما لا تكون النقاط متساوية في الأبعاد

If we have $m+1$points $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$ that are unequal dimensions and let f have a real and continuous function and are derivable in interval $[a, b]$, the convergence the function f to Lagrange polynomial which The general formula,

إذا كان لدينا $m+1$ نقاط $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$ ذات أبعاد غير متساوية ولتكن f دالة حقيقية ومستمرة وقابله للاشتقاق ويمكن اشتقاقها في الفترة $[a, b]$ فإننا الاقتراب من الدالة f على متعدد حدود لاكرانج الذي الصيغة العامة

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_{i)}}$$

We can find derivative of Lagrange polynomial using known derivation rules and make up the points needed to find their derivative.

يمكننا إيجاد مشتقة متعددة حدود لاكرانج باستخدام قواعد الاشتقاق المعروفة وتكوين النقاط اللازمة للعثور على مشتقتها.

Example 1 :

find $f'(1.67)$, $f''(3.28), f^{(4)}(6.5)$ of the following table by using Lagrange polynomial

x	-1	0	2
y	0	1	9

Prof. Dr. Areej Fadhel Hameed

Solution:

$$P_2(x) = \sum_{j=0}^{2} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_{i)}}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 0 + (1)\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} + (9)\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} \implies P_2(x) = \frac{x^2-x-2}{-2} + \frac{9(x^2+x)}{6}$$

$P_2(x) = x^2 + 2x + 1 \Longrightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 2x + 2$
$\Longrightarrow f'(x) = 2x + 2 \Longrightarrow f'(x) = 2(1.67) + 2 = 5.34.$
$\Longrightarrow f"(x) = 2 \Longrightarrow f^{"}(x) = 2 \Longrightarrow f^{(3)}(x) = 0 = f^{(4)}(x).$
$f"(3.28) = 2, f^{(4)}(6.5) = 0$

1.2 Numerical derivation when points are equal in dimensions

1.2 الاشتقاق العددي عندما تكون النقاط متساوية في الأبعاد

If we have $m+1$ points $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$ that are equal dimensions between them and let it be h such that $x_m = x_0 + mh$ If required find the derivative we calculate it
وبذلك فان $x_m = x_0 + mh$ طول الفترة حيث ان h نقاط متساوية الأبعاد بينهما وليكن $m+1$ إذا كان لدينا المشتقة نحسبها كما يلي:

$$m = (x - x_0)/h \Longrightarrow x = x_0 + mh,\ dx = hdm \Longrightarrow \frac{dx}{dm} = h \implies \frac{dm}{dx} = \frac{1}{h}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm}.\frac{dm}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.\frac{dy}{dm}$$

The formula $\frac{dy}{dm}$ can be obtained from deriving the previous Interpolation formulas
من استخلاص صيغ الاستكمال السابقة $\frac{dy}{dm}$ يمكن الحصول على الصيغة

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

***a-* Forward differences الفروقات التقدمية**

$$f(x) = f(x_0 + mh) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots.$$

$$y = y_0 + m\Delta y_0 + (\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2})\Delta^2 y_0 + \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m}{24}\Delta^4 y_0 + \cdots.$$

$$\frac{dy}{dm} = \Delta y_0 + (m - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3})\Delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{3m^2}{4} + \frac{11}{12}m - \frac{1}{4})\Delta^4 y_0 + \cdots.$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dm}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\Delta y_0 + (m - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3})\Delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{3m^2}{4} + \frac{11}{12}m - \frac{1}{4})\Delta^4 y_0 + \cdots)$.....(1)

if $m = 0$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.\frac{dy}{dm} = \frac{1}{h}.(\Delta y_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots)$. ..... (10).

Example 3 :

Find $f'(18.4), f'(18.8)$ $f'(19.2)$ of the following table by using **Forward differences .**

x	18	19	20	21	22
y	10.8894	12.7032	14.7781	17.1489	19.8550

Solution:

Use the **Forward differences .**

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
18	10.8894				
		1.8138			
19	12.7032		0.2611		
		2.0749		-2.336	
20	14.7781		-2.0749		9.4878
		0		7.1518	
21	14.7781		5.0769		
		5.0769			
22	19.8550				

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{18.4 - 18}{1} = 0.4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\Delta y_0 + (m - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3})\Delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{3m^2}{4} + \frac{11}{12}m - \frac{1}{4})\Delta^4 y_0 + \cdots).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(18.4)} = \frac{1}{1}.(1.8138) + \left(0.4 - \frac{1}{2}\right)(0.2611) + \left(\frac{(0.4)^2}{2} - (0.4) + \frac{1}{3}\right)(-2.336) + (\frac{(0.4)^3}{6} - \frac{3(0.4)^2}{4} + \frac{11}{12}(0.4) - \frac{1}{4})(9.4878)).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(18.4)} = (1.8138) + (-0.1)(0.2611) + (0.08 - 0.4 + 0.3333)(-2.336) + (0.0107 - 0.12 + 0.3667 - 0.25)(9.4878)).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(18.4)} = (1.8138) - (0.02611) - (0.0304) + (0.0702) = 1.82749 .$$

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{18.8 - 19}{1} = -0.2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\Delta y_0 + (m - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3})\Delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{3m^2}{4} + \frac{11}{12}m - \frac{1}{4})\Delta^4 y_0 + \cdots).$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\frac{dy}{dx}_{(18.8)} = \frac{1}{1}.(2.0749) + \left((-0.2) - \frac{1}{2}\right)(-2.0749) + \left(\frac{(-0.2)^2}{2} - (-0.2) + \frac{1}{3}\right)(7.1518).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(18.8)} = (2.0749) + (-0.2 - 0.5)(-2.0749) + (0.02 + 0.2 + 0.3333)(7.1518).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(18.8)} = (2.0749) + (1.4524) + (3.9570) = 7.4843 .$$

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{19.2 - 19}{1} = 0.2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\Delta y_0 + (m - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3})\Delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{3m^2}{4} + \frac{11}{12}m - \frac{1}{4})\Delta^4 y_0 + \cdots).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(19.2)} = \frac{1}{1}.(2.0749) + \left((0.2) - \frac{1}{2}\right)(-2.0749) + \left(\frac{(0.2)^2}{2} - (0.2) + \frac{1}{3}\right)(7.1518).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(19.2)} = (2.0749) + (-0.3)(-2.0749) + (0.02 - 0.2 + 0.3333)(7.1518).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(19.2)} = (2.0749) + (0.6225) + (1.0964) = 3.7938 .$$

Homework

Find the function $f'(0.820), f'(0.840), f'(0.860)$of the following table use the **Forward differences .**

x	0.800	0.850	0.880	0.890	0.895	0.898	0.899
y	0.7174	0.7513	0.7707	0.7771	0.7802	0.7821	0.7827

***b*- Backward differences الفروقات التراجعية**

$$f(x) = f(x_0 + mh) = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_0 + \cdots.$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$y = y_0 + m\nabla y_0 + (\frac{m^2}{2} + \frac{m}{2})\nabla^2 y_0 + \frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}\nabla^3 y_0 + \frac{m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m}{24}\nabla^4 y_0 + \cdots.$$

$$\frac{dy}{dm} = \nabla y_0 + (m + \frac{1}{2})\nabla^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} + m + \frac{1}{3})\nabla^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} + \frac{3m^2}{4} + \frac{11}{12}m + \frac{1}{4})\nabla^4 y_0 + \cdots.$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dm}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\nabla y_0 + (m + \frac{1}{2})\nabla^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} + m + \frac{1}{3})\nabla^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} + \frac{3m^2}{4} + \frac{11}{12}m + \frac{1}{4})\nabla^4 y_0 + \cdots)$.....(2)

if $m = 0$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.\frac{dy}{dm} = \frac{1}{h}.(\nabla y_0 + \frac{1}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{1}{3}\nabla^3 y_0 + \frac{1}{4}\nabla^4 y_0 + \cdots)$. ..... (20).

Example 4 : Find the function $f'(1.41), f'(1.38), f'(1.32)$ of the following table use the **Backward differences .**

x	1.1	1.2	1.3	1.4
y	0.4860	0.8616	1.5975	3.7616

Solution:

Use the **Backward differences .**

x	y	∇	∇^2	∇^3
1.1	0.4860			
		0.3756		
1.2	0.8616		0.3603	
		0.7359		1.0679
1.3	1.5975		1.4282	
		2.1641		
1.4	3.7616			

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \Rightarrow m = \frac{1.41 - 1.4}{0.1} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1$

Prof. Dr Areej Tawfeeq Hameed

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}.(\nabla y_0+(m+\frac{1}{2})\nabla^2 y_0+(\frac{m^2}{2}+m+\frac{1}{3})\nabla^3 y_0+(\frac{m^3}{6}+\frac{3m^2}{4}+\frac{11}{12}m+\frac{1}{4})\nabla^4 y_0+\cdots)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.41)}=\frac{1}{0.1}.\left((2.1641)+\left(0.1+\frac{1}{2}\right)(1.4282)+\left(\frac{(0.1)^2}{2}+(0.1)+\frac{1}{3}\right)(1.0679)\right).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.41)}=\frac{1}{0.1}.((2.1641)+(0.6)(1.4282)+(0.005+0.1+0.3333)(1.0679)).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.41)}=\frac{1}{0.1}.(2.1641+0.8569+0.4681)=34.891.$$

$$m=\frac{x_m-x_0}{h}\Rightarrow m=\frac{1.38-1.4}{0.1}=\frac{-0.02}{0.1}=-0.2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}.(\nabla y_0+(m+\frac{1}{2})\nabla^2 y_0+(\frac{m^2}{2}+m+\frac{1}{3})\nabla^3 y_0+(\frac{m^3}{6}+\frac{3m^2}{4}+\frac{11}{12}m+\frac{1}{4})\nabla^4 y_0+\cdots)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.38)}=\frac{1}{0.1}.\left((2.1641)+\left((-0.2)+\frac{1}{2}\right)(1.4282)+\left(\frac{(-0.2)^2}{2}+(-0.2)+\frac{1}{3}\right)(1.0679)\right).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.38)}=\frac{1}{0.1}.((2.1641)+(0.3)(1.4282)+(0.02-0.2+0.3333)(1.0679)).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.38)}=\frac{1}{0.1}.(2.1641+0.4285+0.1637)=27.563.$$

$$m=\frac{x_m-x_0}{h}\Rightarrow m=\frac{1.32-1.3}{0.1}=\frac{0.02}{0.1}=0.2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}.(\nabla y_0+(m+\frac{1}{2})\nabla^2 y_0+(\frac{m^2}{2}+m+\frac{1}{3})\nabla^3 y_0+(\frac{m^3}{6}+\frac{3m^2}{4}+\frac{11}{12}m+\frac{1}{4})\nabla^4 y_0+\cdots)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\frac{dy}{dx}_{(1.32)} = \frac{1}{0.1}.\left((2.1641) + \left(0.2 + \frac{1}{2}\right)(1.4282) + \left(\frac{(0.2)^2}{2} + (0.2) + \frac{1}{3}\right)(1.0679)\right).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.32)} = \frac{1}{0.1}.((2.1641) + (0.7)(1.4282) + (\ 0.02 + 0.2 + 0.3333)(1.0679)).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.32)} = \frac{1}{0.1}.(2.1641 + 0.9997 + 0.5905) = 37.543.$$

Homework

Find the function $f'(0.085), f'(0.040), f'(0.090)$of the following table use the **Backward differences .**

x	0.001	0.002	0.005	0.010	0.020	0.050	0.100
y	0.6250	0.6225	0.6220	0.6215	0.6215	0.6214	0.6206

c- Central differences الفروقات المركزية

***i-Besssl 's formulas* الفروقات بسل المركزية**

$$y_m = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-0.5)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m^2-1)(m-2)}{4!}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$y = \mu y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m^2-m}{2}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m^3 - \frac{3}{2}m^2 - 0.5m}{6}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m^4 - 2m^3 - m^2 - 2m}{24}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$\frac{dy}{dm} = \delta y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{12}\right)\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4} - \frac{m}{12} + \frac{1}{12}\right)\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{dy}{dm}.$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\delta y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + (\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{12})\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + (\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4} - \frac{m}{12} + \frac{1}{12})\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots)$.....(3)

if $m = 0$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.\frac{dy}{dm} = \frac{1}{h}.(\delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}^3\ \delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots)$. ..... (30).

Example 5 :

Find the function $f'(4.5), f'(3.5), f'(4.9), f'(3.1)$of the following table use the **Besssl's formulas differences .**

x	2	4	6	8
y	56	126	268	530

Solution:

use the ***Besssl's formulas*** **.**

x	y	δ	δ^2	δ^3
2	56			
		70		
4	126		72	
		142		48
6	268		120	
		262		
8	530			

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{4.5-4}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25.$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\delta y_{\frac{1}{2}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\mu\delta^2 y_{\frac{1}{2}} + (\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{12})\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + (\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4} - \frac{m}{12} + \frac{1}{12})\mu\delta^4 y_{\frac{1}{2}} + \cdots)$

$\frac{dy}{dx}_{(4.5)} = \frac{1}{2}.\left((142) + (0.25 - 0.5)\left(\frac{72+120}{2}\right) + \left(\frac{(0.25)^2}{2} - \frac{(0.25)}{2} + \frac{1}{12}\right)(48)\right)$

$\frac{dy}{dx}_{(4.5)} = \frac{1}{2}.(142 - (0.25)(96) + (\ 0.03125 - 0.125 + 0.0833)(48))$

$\frac{dy}{dx}_{(4.5)} = \frac{1}{2}.(142 - (0.25)(96) + (\ -0.01045)(48))$

$\frac{dy}{dx}_{(4.5)} = \frac{1}{2}.(142 - 24 - 0.5016) = \frac{1}{2}.(117.4984) = 58.7492.$

Prof. Dr. Areej Tawfeq Hameed

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{3.5 - 4}{2} = \frac{-0.5}{2} = -0.25$$

$$\frac{dy}{dx}_{(3.5)} = \frac{1}{2}.\left((142) + ((-0.25) - 0.5)\left(\frac{72 + 120}{2}\right) + \left(\frac{(-0.25)^2}{2} - \frac{(-0.25)}{2} + \frac{1}{12}\right)(48)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(3.5)} = \frac{1}{2}.(142 - (0.75)(96) + (0.03125 + 0.125 + 0.0833)(48))$$

$$\frac{dy}{dx}_{(3.5)} = \frac{1}{2}.(142 - (0.75)(96) + (0.2396)(48))$$

$$\frac{dy}{dx}_{(3.5)} = \frac{1}{2}.(142 - 72 + 11.5008) = \frac{1}{2}.(81.5008) = 40.7504.$$

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{4.9 - 4}{2} = \frac{0.9}{2} = 0.45$$

$$\frac{dy}{dx}_{(4.9)} = \frac{1}{2}.\left((142) + ((0.45) - 0.5)\left(\frac{72 + 120}{2}\right) + \left(\frac{(0.45)^2}{2} - \frac{(0.45)}{2} + \frac{1}{12}\right)(48)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(4.9)} = \frac{1}{2}.(142 - (0.05)(96) + (0.10125 - 0.225 + 0.0833)(48))$$

$$\frac{dy}{dx}_{(4.9)} = \frac{1}{2}.(142 - (0.05)(96) + (-0.04045)(48))$$

$$\frac{dy}{dx}_{(4.9)} = \frac{1}{2}.(142 - 4.8 - 1.9416) = \frac{1}{2}.(135.2584) = 67.6292.$$

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{3.1 - 4}{2} = \frac{-0.9}{2} = -0.45$$

$$\frac{dy}{dx}_{(3.1)} = \frac{1}{2}.\left((142) + ((-0.45) - 0.5)\left(\frac{72 + 120}{2}\right) + \left(\frac{(-0.45)^2}{2} - \frac{(-0.45)}{2} + \frac{1}{12}\right)(48)\right)$$

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\frac{dy}{dx}_{(3.1)} = \frac{1}{2}.(142 - (0.95)(96) + (0.10125 + 0.225 + 0.0833)(48))$$
$$\frac{dy}{dx}_{(3.1)} = \frac{1}{2}.(142 - (0.95)(96) + (0.40955)(48))$$
$$\frac{dy}{dx}_{(3.1)} = \frac{1}{2}.(142 - 91.2 + 19.6584) = \frac{1}{2}.(70.4584) = 35.2292.$$

Homework

Find the function $f'(0.025), f'(0.045), f'(0.03) f'(0.04)$of the following table use the **Besssl's formulas differences .**

x	0.01	0.02	0.05	0.10
y	0.6215	0.6215	0.6214	0.6206

ii- Stirling 's formulas **الفروقات سترلنك المركزية**

$$y = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \cdots$$
$$y = y_0 + m\mu\delta y_0 + \frac{m^2}{2}\delta^2 y_0 + \frac{m^2-m}{6}\mu\delta^3 y_0 + \frac{m^4-m^2}{24}\delta^4 y_0 + \cdots$$
$$\frac{dy}{dm} = \mu\delta y_0 + m\delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - \frac{1}{6})\mu\delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{m}{12})\delta^4 y_0 + \cdots$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.\frac{dy}{dm}.$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\mu\delta y_0 + m\delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - \frac{1}{6})\mu\delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{m}{12})\delta^4 y_0 + \cdots)$.....(4)
if $m = 0$,
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.\frac{dy}{dm} = \frac{1}{h}.(\mu\delta y_0 - \frac{1}{6}\mu\delta^3 y_0 + \cdots)$. ..... (40).

Example 6 :

Find the function $f'(1.022), f'(1.018)$of the following table use the **Stirling's formulas differences .**

x	1	1. 01	1. 02	1.03	1.04
y	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

Prof. Dr. Areej Tawfeen Hameed

Solution:

use the **Stirling's formulas differences.**

x	y	δ	δ^2	δ^3	δ^4
1	3.10				
		0.02			
1.01	3.12		0		
		0.02		0.02	
1.02	3.14		0.02		-0.02
		0.04		0	
1.03	3.18		0.02		
		0.06			
1.04	3.24				

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{1.022-1.02}{2} = \frac{0.002}{2} = 0.001.$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\mu\delta y_0 + m\delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - \frac{1}{6})\mu\delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{m}{12})\delta^4 y_0 + \cdots).$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.022)} = \frac{1}{0.01}.\left(\left(\frac{0.02+0.04}{2}\right) + (0.001)(0.02) + \left(\frac{(0.001)^2}{2} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{0.02+0}{2}\right) + \left(\frac{(0.001)^3}{6} - \frac{(0.001)}{12}\right)(-0.02)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.022)} = \frac{1}{0.01}.\left((0.03) + (0.001)(0.02) + (0.0000005 - 0.1667)(0.01) + (1.6667 * 10^{-10} - 0.000083)(-0.02)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.022)} = \frac{1}{0.01}.\left(0.03 + 0.00002 + (-0.1666995)(0.01)\right)$$

$\frac{dy}{dx}_{(1.022)} = \frac{1}{0.01}.(0.03 + 0.00002 - 0.001666995) = \frac{1}{0.01}.(0.028353005) = 2.8353005.$

$m = \frac{x_m - x_0}{h} \implies m = \frac{1.018-1.02}{2} = \frac{-0.002}{2} = -0.001.$

Prof.Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}.(\mu\delta y_0 + m\delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - \frac{1}{6})\mu\delta^3 y_0 + (\frac{m^3}{6} - \frac{m}{12})\delta^4 y_0 + \cdots).$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.018)} = \frac{1}{0.01}.\left(\left(\frac{0.02 + 0.04}{2}\right) + (-0.001)(0.02) + \left(\frac{(-0.001)^2}{2} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{0.02 + 0}{2}\right) + \left(\frac{(-0.001)^3}{6} - \frac{(-0.001)}{12}\right)(-0.02)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.018)} = \frac{1}{0.01}.\big((0.03) + (-0.001)(0.02) + (-0.0000005 + 0.1667)(0.01) + (-1.6667 * 10^{-10} + 0.000083)(-0.02)\big)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.018)} = \frac{1}{0.01}.\big(0.03 - 0.00002 + (0.1666995)(0.01)\big)$$

$$\frac{dy}{dx}_{(1.018)} = \frac{1}{0.01}.(0.03 - 0.00002 + 0.001666995) = \frac{1}{0.01}.(0.031646995) = 3.1646995 .$$

Homework

Find the function $f'(0.63), f'(0.54), f'(0.69), f'(0.58)$of the following table use the **Stirling's formulas differences .**

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0.9799	0.9178	0.8080	0.6386	0.3843

Numerical Integration التكامل العددي :

التكامل العددي هو دراسة لكيفية العثور على تقديرات تقريبية لتكامل معين.

هناك أسباب عديدة للتكامل العددي:

1- عدم العثور على القيمة الحقيقية للتكامل.

2- عندما تكون عملية إيجاد قيمة التكامل الحقيقي ممكنة ولكن الدالة قد تكون معقدة وتحتاج إلى جهد ووقت طويل..

3- يمكن تعريف دالة التكامل على أنها جدول القيم.

To find the value of Numerical integration, the function can be written in the form of a power series as follows:

لإيجاد قيمة التكامل العددي يمكن كتابة الدالة على شكل متسلسلة قوى كما يلي:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots$$

If the closed interval $[a,b]$is a continuous on the function and be within the convergence of the series, we get إذا كانت الفترة المغلقة [a,b] متصلة على الدالة وضمن تقارب المتسلسلة نحصل على

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$I_{f(x)} = \int_a^b f(x)dx = c_0 \int_a^b dx + c_1 \int_a^b (x - x_0)\, dx + c_2 \int_a^b (x - x_0)^2\, dx + c_3 \int_a^b (x - x_0)^3\, dx + \dots + c_n \int_a^b (x - x_0)^n\, dx + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_a^b (x - x_0)^i\, dx$$

Example 1 :

Find the approximate value of integration $\int_0^1 \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ for four term.

Solation : $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$$I_{f(x)} = \int_0^1 \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{4!} - \frac{x^{\frac{11}{2}}}{6!} + \cdots\right) dx$$

$$= \left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!.\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{4!.\left(\frac{11}{2}\right)} - \frac{x^{\frac{13}{2}}}{6!.\left(\frac{13}{2}\right)}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{108} - \frac{1}{4680} + \cdots = 1.809045584 \cong 1.8090$$

Example 2 :

Find the approximate value of the determinate integration of the interval [0.5,2.5], $\left(\int_{0.5}^{2.5} f(x)dx\right)$ on the function defined in the following table.

x	0.05	0.10	0.20	0.26
y	0.05	0.0999	0.1987	0.2571

Solation :

x	y	$\Delta = \nabla = \delta$	Δ^2	Δ^3

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

0.05	0.05			
		0.9980		
0.10	0.09999		-0.0667	
		0.9880		-0.1200
0.20	0.1987		-0.0919	
		0.9733		
0.26	0.2571			

$$f(x_m) = y_m$$
$$= y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$f(x) = 0.05 + (x - 0.05)(0.9980) + (x - 0.05)(x - 0.1)(-0.0667) + (x - 0.05)(x - 0.1)(x - 0.20)(-0.1200)$$

$$f(x) = -0.119x^3 - 0.025x^2 + 1.004x$$
$$I_{f(x)} = \int_{0.5}^{2.5} f(x)dx = \int_{0.5}^{2.5} (-0.119x^3 - 0.025x^2 + 1.004x)dx$$
$$= \frac{-0.119x^4}{4}\Big|_{0.5}^{2.5} - \frac{0.025x^3}{3}\Big|_{0.5}^{2.5} + \frac{1.004x^2}{2}\Big|_{0.5}^{2.5} = -0.0299.$$

Homework

1- Find the approximate value of integration $\int_1^{1.7} \frac{e^x}{x^2} dx$ for four .

2- Find the approximate value of the determinate integration of the interval [2,3], $\left(\int_2^3 f(x)dx\right)$ on the function defined in the following table.

x	0	1	2	3	4
y	1	2	9	28	65

Newton-Cotes Formulas صيغ نيوتن-كوتس

Newton-Coates formulas are the most important methods of numerical integration.
تعتبر صيغ نيوتن-كوتس من أهم طرق التكامل العددي

a- Trapezoidal Rule. القاعدة شبه المنحرف

Let n Number of partial interval (sub-interval) and $h = \frac{b-a}{n}$.
لتكن n و عدد الفترات الجزئي (الفترات الفرعي) $h = \frac{b-a}{n}$.

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

When n=1 then The trapezoidal rule of integration $\int_a^b f(x)dx$ is
فإن قاعدة التكامل شبه المنحرف هي n=1 عندما يكون

When n=1 , $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f(a)+f(b))$, $h=\frac{b-a}{1}$

When n=2 , $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f(a)+2f(a+h)+f(b))$, $h=\frac{b-a}{2}$

When n=3 , $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+f(b))$, $h=\frac{b-a}{3}$

Then the general formula of the trapezoidal rule
ثم الصيغة العامة لقاعدة شبه المنحرف

$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+2f(a+3h)+\cdots+2f(a+(n-1)h)+f(b)]$, $h=\frac{b-a}{n}$.

$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)+f(b)]+E_T(h)$.

$E_T(h)$ is The error formula for the trapezoidal rule $E_T(h)=\frac{-h^3}{12}f''(\lambda)$, $a<\lambda<b$
هي صيغة الخطأ لقاعدة شبه المنحرف

Example 3 :

Find the approximate value of integration $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ by using the trapezoidal rule when n=4

Solation :

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = ln\,x|_1^2 = ln\,2 - ln\,1 = ln\,2 = 0.6931$, $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{4}=0.25$.

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$y=f(x)$	1	0.8	0.6667	0.5714	0.5

$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{3} f(a+ih)+f(b)\right]+E_T(h)$.

$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+2f(a+3h)+f(b)]$

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{0.25}{2}[1+2(0.8+0.6667+0.5714)+0.5] = 0.6970$

$e_x = |0.6931-0.6970| = 0.0039$.

Example 4 :

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Find the approximate value of integration $\int_0^{10} 3x^2\,dx$ by using the **trapezoidal rule** when n=10

Solation :

$\int_0^{10} 3x^2\,dx = x^3|_0^{10} = 1000$,$h = \frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{10} = 1.$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	1	12	27	48	75	108	147	192	243	300

$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{9} f(a+ih) + f(b)\right] + E_T(h).$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a) + 2(f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \cdots f(a+9h)) + f(b)]$$

$$\int_0^{10} 3x^2dx \cong \frac{1}{2}[0 + 2(3 + 12 + 27 + 48 + 75 + 108 + 147 + 192 + 243) + 300] = 1005$$

$e_x = |1000 - 1005| = 5.$

Homework

Find the approximate value of integration $\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ by using the **trapezoidal rule** when n=10

b-Mid-point Rule قاعدة النقطة الوسطى .

Let n Number of partial interval (sub- interval) and $h = \frac{b-a}{n}$.

لتكن n عدد الفترات الجزئية (الفترات الفرعي) و هو $\int_a^b f(x)dx$

When n=1 then The Mid- point rule of integration $\int_a^b f(x)dx$ is

فإن قاعدة النقطة الوسطى للتكامل هي n=1 عندما يكون

If n=1 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \cong h\left(f(a+\frac{h}{2})\right)$, $h = \frac{b-a}{1}$,

If n=2 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \cong h\left(f(a+\frac{1}{2}h) + f(a+\frac{3}{2}h)\right)$, $h = \frac{b-a}{2}$

If n=3 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \cong h\left(f(a+\frac{1}{2}h) + f(a+\frac{3}{2}h) + f(a+\frac{5}{2}h)\right)$, $h = \frac{b-a}{3}$.

Then the general formula of the Mid- point rule:- الصيغة العامة لقاعدة النقطة الوسطى

Prof. Dr Areej Tawfeeq Hameed

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\left(f\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f\left(a+\frac{3}{2}h\right)+f\left(a+\frac{5}{2}h\right)+\cdots + f\left(a+\frac{(2n-1)}{2}h\right)\right)+E_S(h),$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{(2i-1)}{2}h\right)+E_M(h).$$

$E_M(h)$ is The error formula for the Mid- point rule $E_M(h)=\frac{h^3}{6}f''(\beta)$, $a<\beta<b$

هي صيغة الخطأ لقاعدة النقطة الوسطى

Example 5 :

Find the approximate value of integration $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ by using the **Mid- point rule** when n=4

Solation :

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = ln\,x|_1^2 = ln\,2 - ln\,1 = ln\,2 = 0.6931$,$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{4}=0.25.$

x	1.125	1.375	1.625	1.875
$y=f(x)$	0.8889	0.7273	0.6154	0.5333

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\sum_{i=1}^{4} f\left(a+\frac{(2i-1)}{2}h\right)+E_M(h).$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\left[f(a+\frac{1}{2}h)+f(a+\frac{3}{2}h)+f(a+\frac{5}{2}h)+f(a+\frac{7}{2}h)\right]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong (0.25)[0.8889+0.7273+0.6154+0.5333]=0.6912$$

$e_x = |\,0.6931 - 0.6912| = 0.0019.$

Example 6 :

Find the approximate value of integration $\int_0^{10} 3x^2\,dx$ by using the **Mid- point rule** when n=6

Solation :

$\int_0^{10} 3x^2\,dx = x^3|_0^{10} = 1000$,$h=\frac{b-a}{n}=\frac{10-0}{10}=1.$

x	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2	15/2	17/2	19/2
$f(x)$	0.75	6.75	18.75	36.75	60.75	90.75	126.75	168.75	216.75	270.75

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\sum_{i=1}^{10} f(a+\frac{(2i-1)}{2}h) + E_M(h)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\left[f(a+\frac{1}{2}h)+f(a+\frac{3}{2}h)+f(a+\frac{5}{2}h)+\cdots+f(a+\frac{19}{2}h)\right]$$

$$\int_0^{10} 3x^2dx \cong (1)[0.75+6.75+18.75+36.75+60.75+90.75+126.75$$
$$+168.75$$
$$+216.75+270.75] = 997.5$$

$e_x = |1000 - 997.5| = 2.5.$

Homework Find the approximate value of integration $\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$ by using the Mid -point rule when n=10

c- Simpson's Rule .قاعدة سمبسون

This rule deals with even interval (i.e n =2,4,6,8,…) When n=2 then The Simpsons'rule of integration $\int_a^b f(x)dx$,

إذن قاعدة التكامل الخاصة n = 2 عندما يكون n = 2,4,6,8,...) تتعامل هذه القاعدة مع الفترات الزوجية (أي بعائلة سمبسون

if n=2 then $h = \frac{b-a}{2} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}(f(a)+4f(a+h)+f(b))$

$if\ n=4, then\ h = \frac{b-a}{4} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$

$$\cong \frac{h}{3}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+f(b))$$

if n=6, then $h = \frac{b-a}{6}$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\big(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+2f(a+4h)$$
$$+4f(a+5h)+f(b)\big).$$

Then the general formula of the Simpson's rule

ثم الصيغة العامة لقاعدة سمبسون

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+\cdots+2f(a+(2n-2)h) + 4f(a+(2n-1)h)+f(b)]$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(a)+4(f(a+h)+f(a+3h)+\cdots+f(a+(2n-1)h)) + 2(f(a+2h)+f(a+4h)+\cdots+f(a+(2n-2)h))+f(b)] + E_S(h)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(a)+4\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h)\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih)+f(b)] + E_S(h)$$

$E_T(h)$ is The error formula for the Simpsons'rule be $E_S(h) = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta)$, $a < \theta < b$

هي صيغة الخطأ لقاعدة سمبسنز

Example 7 :

Find the approximate value of integration $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ by using the **Simpsons'rule** when n=4

Solution:-

$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = ln\, x|_1^2 = ln\, 2 - ln\, 1 = ln\, 2 = 0.6931$,$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = 0.25.$

x	1	1.25	1.5	1.75	2
y=f(x)	1	0.8	0.6667	0.5714	0.5

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih)+f(b)\right] + E_S(h)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{i=1}^{2} f(a+(2i-1)h)+2f(a+2h)+f(b)\right] + E_S(h)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(a)+4(f(a+h)+2f(a+3h))+2f(a+2h)+f(b)]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \cong \frac{0.25}{3}[1+4(0.8+0.5714)+2(0.6667)+0.5] = 0.6933$$

$e_x|0.6933-0.6933| = 0.0003.$

Example 8 :

Prof Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Find the approximate value of integration $\int_0^{10} 3x^2\,dx$ by using the **Simpsons'rule** when n=10

Solution:-

$\int_0^{10} 3x^2\,dx = x^3|_0^{10} = 1000 \quad ,h = \frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{10} = 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	1	12	27	0.548	75	108	147	192	243	300

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih) + f(b)\right) + E_S(h)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(a) + 4(f(a+h) + f(a+3h) + f(a+5h) + f(a+7h) + f(a+9h)) + 2(f(a+2h) + f(a+4h) + f(a+6h) + f(a+8h)) + f(b)]\ .$$

$$\int_0^{10} 3x^2dx \cong \frac{1}{3}[0 + 4(3+27+75+147+243) + 2(12+48+108+192) + 300] = 1000$$

Homework

Find the approximate value of integration $\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$ by using the **Simpsons'rule** when n=10

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed