# ايجاد جذورالمعادلات

## طرق حل المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

### المعادلات الخطية وغير الخطية

المعادلة الخطية هي المعادلة على الصورة $y = f(x) = ax + b$ وهي ابسط المعادلات الخطية وتعتبر المعادلة خطية إذا كانت $x$ من الدرجة الأولى، أما المعادلات التي يكون فيها درجة $x$ أكبر من 1 فتسمى غير خطية مثل المعادلات من الدرجة الثانية فتكون على الصورة $y = f(x) = ax^2 + bx + c$، وبشكل عام تعرف معادلة أو كثيرة الحدود من الدرجة $n$ هي المعادلة على الشكل

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$$

### المعادلات التصاعدية Transcendental

وهي المعادلات التي تحتوي حدود غير $x^n$ مثل ... $\cos x, \sin x, \ln x$ مثل

$$f(x) = x^2 + \cos x - e^x$$

### المعادلات الجبرية

وهي عبارة عن معادلات كسرية أو نسبية لحدوديتين على الشكل $f(x) = \frac{g(x)}{p(x)}$ حيث $g(x), p(x)$ هي حدوديات.

**جذر المعادلة:** هو القيمة $x$ التي تجعل قيمة $f(x) = 0$ أو هي قيمة $x$ التي يمر عندها خط المنحنى بمحور السينات.

وبالتالي سيكون جذر أو حل المعادلة الخطية السابقة هو $x = -\frac{b}{a}$، ويكون جذر معادلة الدرجة الثانية على الشكل $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ وهناك معادلات من الدرجة الثالثة إلخ... .

## طرق ايجاد جذور المعادلة

### الطريقة الاولى: طريقة التنصيف Bisection Method

تتلخص هذه الطريقةبما يلي:

اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة مستمرة ومعرفة للفترة $[x_1,x_2]$ وتحوي على جذر في هذه الفترة هذا يعني ان اشارة الدالة تتغير من الموجب الى السالب و بالعكس اي ان:

$$f(x_1).f(x_2) < 0$$

لنفرض أننا نريد حل المعادلة

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

تحسب قيمة الدالة عند نهاية الفترة $x_1$ , $x_2$ , من أجل ذلك $f(x_2)$ و$f(x_1)$ لهما إشارتين مختلفتين أي أن:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

لذلك يوجد حل ( جذر) للمعادلة (1) ضمن هذا المجال ولنحاول الآن إيجاد القيمة التقريبية للحل.

أسهل طريقة هي اختيار قيمة نقطة المنتصف للدالة , اي أن:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (2)$$

و لنحسب $f(x_3)$ ، هناك احتمالين:

1- إذا كان: $f(x_1).f(x_3) < 0$

هذا يعني ان الجذر يقع في النصف الاول من الفترة اي بين بداية الفترة $x_1$ ونقطة النتصف $x_3$ . نختار قيمة جديدة $x_4$ تمثل نقطة النتصف بين $x_1$ , $x_3$ بحيث يكون

$$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2}$$

1- أما إذا كان $f(x_1).f(x_2) > 0$

هذا يعني ان الجذر يقع في النصف الثاني من الفترة اي بين نهاية الفترة $x_2$ ونقطة المنتصف $x_3$ نختار قيمة جديدة $x_4$ تمثل نقطة النتصف بين $x_2 , x_3$ بحيث يكون

ونختار

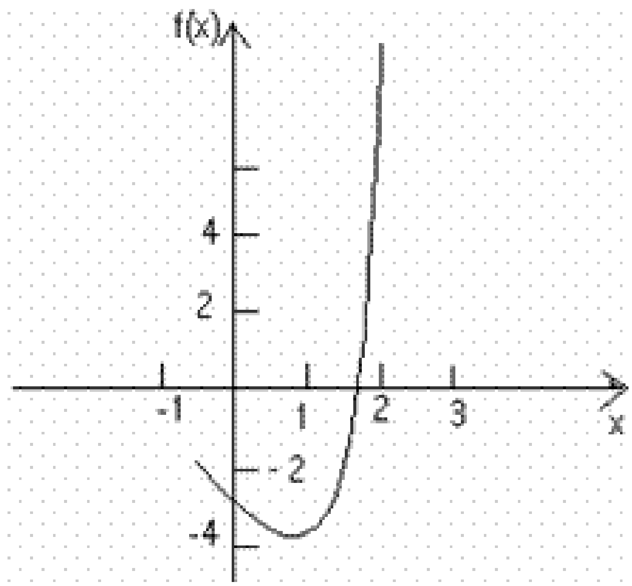
$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

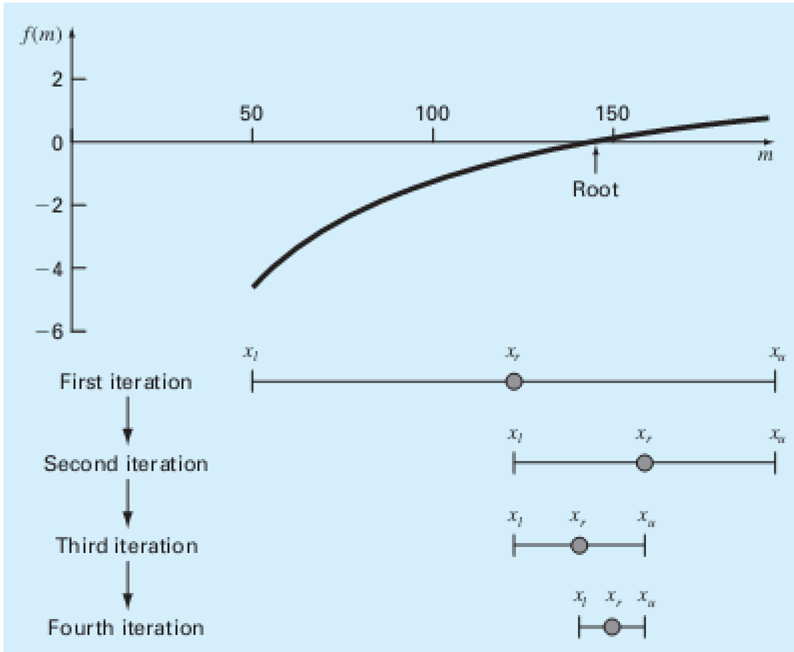
و نستمر بنفس الطريقة حتى نحصل على $|f(x_N)|$ بحيث تكون إما صغيرة جداً و قريبة من الصفر بالقدر الكافي أو :

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

حيث أن $\varepsilon$ قيمة صغيرة ( قيمة الاقتراب من الجذر ) .

إن هذه الطريقة تعرف باسم التنصيف أو طريقة تقسيم المجال .






مثال -1 اذا كان جذر المعادلة $f(x) = x^2 - 5x + 4$ هو 4 , جد جذر هذه المعادلة عدديا باستخدام طريقة التنصيف بحيث يكون الخطا اقل من 0.1 . للفترة [2,8]

| A | B | $c = \frac{A+B}{2}$ | f(A) | f( c) | $sign(f(A) . f(c))$ | root=c | err = $\lvert 4-c \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 5 | -2 | 4 | -1 | 5 | 1 |
| 2 | 5 | 3.5 | -2 | -1.25 | 1 | 3.5 | 0.5 |
| 3.5 | 5 | 4.25 | -1.25 | 0.8125 | -1 | 4.25 | 0.25 |
| 3.5 | 4.25 | 3.875 | -1.25 | -0.359 | 1 | 3.875 | 0.125 |
| 3.875 | 4.25 | 4.0625 | -0.359375 | 0.1914 | -1 | 4.0625 | 0.063 |
| 3.875 | 4.0625 | 3.9688 | -0.359375 | -0.093 | 1 | 3.9688 | 0.031 |
| 3.9688 | 4.0625 | 4.0156 | -0.092773 | 0.0471 | -1 | 4.0156 | 0.016 |

مثال -2- جدي جذر الدالة $x \epsilon [1,2]$ $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10,$ بحيث يكون الخطاء

$$|x_{n+1} - x_n| = 0.01$$

| A | B | C | f(A) | f(c) | $sign(f(A) \cdot f(c))$ | root | error = $\lvert A - c\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1.5 | -5 | 2.375 | -1 | 1.5 | 0.5 |
| 1 | 1.5 | 1.25 | -5 | -1.797 | 1 | 1.25 | 0.25 |
| 1.25 | 1.5 | 1.375 | -1.796875 | 0.1621 | -1 | 1.375 | 0.125 |
| 1.25 | 1.375 | 1.3125 | -1.796875 | -0.848 | 1 | 1.3125 | 0.063 |
| 1.3125 | 1.375 | 1.3438 | -0.848388672 | -0.351 | 1 | 1.3438 | 0.031 |
| 1.3438 | 1.375 | 1.3594 | -0.350982666 | -0.096 | 1 | 1.3594 | 0.016 |
| 1.3594 | 1.375 | 1.3672 | -0.096408844 | 0.0324 | -1 | 1.3672 | 0.008 |

مثال -3- جدي جذر الدالة $x\epsilon[0,1]$ $f(x) = \sqrt{x} - cosx,$ بحيث يكون: $error = 0.01$

| A | B | C=(A+B)/2 | f(A) | f(c) | Sign f(A). f(c) | root=c | error= C-A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.5 | -1 | -0.1705 | 1 | 0.5 | 0.5 |
| 0.5 | 1 | 0.75 | -8.875 | 0.1343 | -1 | 0.75 | 0.25 |
| 0.5 | 0.75 | 0.625 | -8.875 | -0.0204 | 1 | 0.625 | 0.125 |
| 0.625 | 0.75 | 0.6875 | -8.19335 | 0.0563 | -1 | 0.6875 | 0.0625 |
| 0.625 | 0.6875 | 0.65625 | -8.193355 | 0.0178 | -1 | 0.6562 | 0.0325 |
| 0.625 | 0.6562 | 0.64063 | -8.19335 | -0.0013 | 1 | 0.6406 | 0.0153 |
| 0.6406 | 0.6562 | 0.64844 | -8.095485 | 0.0082 | -1 | 0.6484 | 0.0071 |
| 0.6406 | 0.6484 | 0.64453 | -8.095485 | 0.0034 | -1 | 0.6445 | 0.0039 |
| 0.6406 | 0.6445 | 0.64258 | -8.095485 | 0.0010 | -1 | 0.6425 | 0.0019 |