

## مقدمة عن التحليل العددي وتحليل الاخطاء

## Numerical Analysis

## التحليل العددي

## التحليل العددي

العديد من المسائل في الرياضيات لا يمكن حلها باستخدام الرياضيات التحليلية اي بمعنى آخر لا توجد طريقة أو قاعدة تعطي الحل الدقيق أو الصحيح). من أمثلة ذلك إيجاد تكامل

$$\int e^{x^2} dx$$

وحل معادلة كثير الحدود العامة من الدرجة الخامسة فما فوق

في هذه الحالات يمكن البحث عن حل عددي .

التحليل العددي : هو علم يهتم باشتقاق ووصف وتحليل طرق الحصول على حلول عددية لمسائل رياضية يصعب عادة حلها بالطرق التحليلية الجبرية المعتادة ..

## مقدمة :

التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات الهامة وهو الذي يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الآلي ويستخدم عادة في إيجاد حلول بعض المسائل والمشاكل التي لا يمكن حلها بالرياضيات التحليلية حيث تكون النتيجة التي نحصل عليها نتيجة تقريبية. بما أننا نحصل على نتيجة تقريبية أو حل تقريبي هذا يعني أنه يوجد خطأ علينا حساب الخطأ إلا أنه لو استطعنا إيجاد الخطأ لاستطعنا إيجاد الحل الفعلي (الحقيقي) الأمر الذي يعني أن إيجاد الخطأ غير ممكن ونسعى بالتالي إلى إيجاد تقرب للخطأ أو حجم الخطأ أي تلك القيمة التي لا يتجاوزها الخطأ. وتتلخص مهمة التحليل العددي في إيجاد الحل التقريبي لمسألة ما وتقويم الخطأ.

إن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية، لأنها غالباً ما تمثل أطوال وقياسات أو قيم لمقادير فيزيائية بنتيجة القياس وهي بحد ذاتها تقريبية. كذلك فإن الكثير من الأعداد الحقيقية لا يمكن التعبير عنها بعدد منته من الأرقام فمثلاً العدد  $\pi$  يساوي تقريباً 3.14159.

### تقدير الأخطاء :

تنشأ الأخطاء في التحليل العددي من أكثر من مصدر. فهناك أخطاء تنشأ من استعمال الصيغ التقريبية ذاتها. وعادة ما تكون النظرية قد وضعت صيغة لهذا الخطأ. وهناك أخطاء ناشئة من استعمال هذه الصيغ فمثلاً نكتفي برقمين عشريين (بمنزلتين) بعد الفاصلة في الحسابات فينشأ خطأ التقريب وأحياناً نكتفي بعدد معين من حدود المتسلسلة اللانهائية فينشأ خطأ الاقتطاع وهكذا تنشأ العديد من الأخطاء سنكتفي بتعريف البعض منها.

### الخطأ المطلق والخطأ النسبي :

إذا كانت  $x$  القيمة الفعلية (التامة) لعدد ما و  $x_0$  القيمة التقريبية لهذا العدد فإن

العدد :

$$\Delta x = x_0 - x$$

هو الخطأ المرتكب في حساب  $x_0$

تكون إشارة  $\Delta x$  موجبة أو سالبة لذلك نعرف ما يسمى بالخطأ المطلق.

### الخطأ المطلق (Absolute error) ( $\Delta$ )

هو القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الحقيقية للعدد  $x$  والقيمة التقريبية له  $x_0$  أي ان:

$$\Delta = |\Delta x| = |x_0 - x| = |x - x_0|$$

غالباً ما يكون العدد الفعلي  $x$  غير معلوم، عندئذ لا يمكن تعيين الخطأ المطلق

من أجل ذلك نلجأ إلى إيجاد حد أعلى لهذا الخطأ مثل  $\epsilon_x$  ويحقق المتباينة :

$$|\Delta x| = |x_0 - x| \leq \epsilon_x$$

وهكذا نحصل على :

$$x_0 - \epsilon_x \leq x \leq x_0 + \epsilon_x$$

أي أن العدد الفعلي يقع بين العددين  $x_0 + \varepsilon_x$  و  $x_0 - \varepsilon_x$  حيث القيمة  $x_0 + \varepsilon_x$  تمثل تقريب العدد  $x$  بالزيادة والقيمة  $x_0 - \varepsilon_x$  تمثل تقريبه بالنقصان.

مثال (1-1) :

بفرض أعطي طول غرفة  $a_1 = 5.43$  m وعرضها  $b_1 = 3.82$  m بدقة تتراوح حتى 1cm ، أحسب الحد الأعلى للخطأ المرتكب في حساب مساحة الغرفة.

الحل :

$$s_1 = a_1 \cdot b_1 = 20.7426 \text{ m}^2$$

$$\Delta b_1 = 0.01 \text{ m} , \Delta a_1 = 0.01 \text{ m} \quad \text{وبما أن}$$

فإن القيم الحدودية المحتملة للمساحة هي :

$$(a_1 + \Delta a_1) (b_1 + \Delta b_1) = (5.43 + 0.01) (3.82 + 0.01) = 20.8352 \text{ m}^2$$

$$(a_1 - \Delta a_1) (b_1 - \Delta b_1) = (5.43 - 0.01) (3.82 - 0.01) = 20.6502 \text{ m}^2$$

وبمقارنتها مع القيمة المحسوبة  $s_1$  نحصل على :

$$20.7426 - 20.6502 \leq s_1 - s \leq 20.8352 - 20.7426$$

$$0.0914 \leq s_1 - s \leq 0.0926$$

$$|s_1 - s| \leq 0.0926 \quad \text{ومنه نجد}$$

ملاحظة (1-1) :

الخطأ المطلق لا يكون كافياً لتمييز دقة التقريب أو الحساب لمقدار ما فإذا كان الخطأ المطلق في قياس طولين مختلفين هو نفسه فهذا لا يدل أن القياس له نفس الدقة في الحاليتين.

تعريف (2-1)

الخطأ النسبي (R) Relative error

يعرف على أنه نسبة الخطأ مطلق  $\Delta$  المحسوب لعدد تقريبي  $x_0$  إلى القيمة المطلقة للعدد الفعلي

$x$  ( $x \neq 0$ ) أي أن :

$$R = \frac{\Delta}{|x|}$$

مثال (1-2) :

لتكن  $x=3.257$  ولتكن  $x_0 = 3.26$  قيمة تقريبية لـ  $x$  عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

الحل :

$$\begin{aligned} \Delta &= |\Delta x| = |x_0 - x| \\ &= |3.26 - 3.257| = 0.003 \end{aligned}$$

الخطأ المطلق

$$R = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0.003}{3.257} = 0.000921$$

الخطأ النسبي

تعريف (1-3):

الخطأ النسبي (E) percentage error : هو حاصل ضرب الخطأ النسبي في 100%:

$$E = R \times 100\%$$

مثال (1-3) :

إذا كانت  $x = 0.00004$  ،  $x_0 = 0.00005$  قيمة تقريبية لـ  $x$  عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي والخطأ المتوي.

الحل :

الخطأ المطلق

$$\Delta = |x_0 - x| = |0.00005 - 0.00004| = 0.00001$$

الخطأ النسبي

$$R = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0.00001}{0.00004} = 0.25$$

الخطأ المئوي

$$E = R \times 100\% = 0.25 \times 100\% = 25\%$$

أخطاء التدوير :

خطأ التدوير ينشأ من تدوير الأعداد وتقريبها أي الاكتفاء بعدد منته من الأرقام

العشرية (الأرقام التي على يمين الفاصلة) وقاعدة التدوير تتم على الشكل التالي :

إذا كان لدينا العدد  $x = 0.x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$  وأردنا الاكتفاء بـ  $(n-1)$  رقم على يمين

الفاصلة أي أن العدد المدور يكون كما يلي :

$$x_0 = 0.x_1 x_2 \dots x_{n-2} \bar{x}_{n-1}$$

فإن  $\bar{x}_{n-1}$  يتم تحديده بالشكل التالي :

$$\bar{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1 \quad \text{فإن} \quad x_n > 5 \quad \text{إذا كان}$$

$$\bar{x}_{n-1} = x_{n-1} \quad \text{فإن} \quad x_n < 5 \quad \text{وإذا كان}$$

أما إذا كان  $x_n = 5$  فإننا ننظر إلى  $x_{n-1}$  ونميز حالتين

$$1- \text{ إذا كان } x_{n-1} \text{ زوجياً فإن } \bar{x}_{n-1} = x_{n-1}$$

$$2- \text{ إذا كان } x_{n-1} \text{ فردياً فإن } \bar{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$$

عندئذ يكون الخطأ المرتكب والناجم عن عملية التدوير هو :

$$0.5 \times 10^{-(n-1)} = 0.5 \times 10^{-n+1} = 5 \times 10^{-n}$$

عندئذ يكون الخطأ المرتكب والناتج من عملية التدوير :

$$0.5 \times 10^{-(n-1)} = 0.5 \times 10^{-n+1} = 5 \times 10^{-n}$$

مثال (4-1)

دور العدد  $x = 7.2535$  الى ثلاث مراتب عشرية ثم مرتبتين عشريتين ثم الى مرتبة عشرية واحدة وما هو الخطأ المرتكب؟

الحل :

$$x_0 = 7.254 \text{ والخطأ المرتكب لا يتجاوز } 5 \times 10^{-4}$$

$$x_0 = 7.25 \text{ والخطأ المرتكب لا يتجاوز } 5 \times 10^{-3}$$

$$x_0 = 7.2 \text{ والخطأ المرتكب لا يتجاوز } 5 \times 10^{-2}$$

ولتمييز الأعداد المدورة نكتب عادة قيمة العدد زائداً أو ناقصاً نصف وحدة في المرتبة العشرية المدورة فنكتب مثلاً

$$7.254 \mp \frac{0.5}{10^3}$$

$$7.254 \mp \frac{5}{10^4} \quad \text{أو}$$

$$7.254 \mp 5 \times 10^{-4} \quad \text{أو}$$

مثال (5-1) :

بفرض أن  $x = 0.235$  عدد مدور عين الخطأ النسبي المرتكب.

الحل :

الخطأ المرتكب الناتج عن عملية التدوير هو

$$\Delta x \leq 5 \times 10^{-4}$$

$$R = \frac{\Delta x}{x} = \frac{5 \times 10^{-4}}{0.235} = 0.0021276 \quad \text{ومنه الخطأ النسبي}$$

ملاحظة (1-2) :

عند تطبيق العمليات الحسابية فإن الأخطاء المرتكبة تتراكم وتكبر ويمكن تقدير الحد الأعظمي لهذه الأخطاء.