

- **Arithmetic operation error** الاخطاء في العمليات الحسابية

### نظرية (1) Theorem

الخطا المطلق في حاصل جمع ( طرح ) عددين مقربين اقل من او يساوي مجموع الاخطاء

البرهان:

ليكن  $x_0$  هي القيمة المقربة للعدد  $x$  , و  $y_0$  هي القيمة المقربة للعدد  $y$  , ونحسب الخطاء في عملية الجمع والطرح للعددين.

وليكن :

$$z_0 = x_0 + y_0$$

$$z = x + y$$

$$\begin{aligned}\Delta z &= z - z_0 = (x + y) - (x_0 + y_0) = (x - x_0) + (y - y_0) \\ &= \Delta x + \Delta y\end{aligned}$$

$$|\Delta z| = |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

مثال : لنفرض لدينا العددين  $x = 3.221$  ,  $y = 3.222$  , اوجدني الخطاء المطلق والنسبي الناتج في عملية جمع وطرح العددين.

الحل

الخطاء المطلق الناتج من تقريب او تدوير العدد هو:

$$\Delta x = \Delta y = 5 \times 10^{-4}$$

ومنه فان الخطاء المطلق المرتكب في عمليتي الجمع والطرح للعددين يكون:

$$|\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-4} = 0.001$$

$$|\Delta x - \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-4} = 0.001$$

ويكون الخطأ النسبي في حالة الجمع

$$R = \frac{|\Delta x + \Delta y|}{x + y} = \frac{0.001}{6.443} = 0.00015526$$

أما الخطأ النسبي في حالة الطرح

$$R = \frac{|\Delta x - \Delta y|}{|x - y|} = \frac{0.001}{0.001} = 1$$

2- الخطأ النسبي لضرب عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية للعددين.

الإثبات :

لتكن  $x_0$  قيمة تقريبية لـ  $x$

و  $y_0$  قيمة تقريبية لـ  $y$

وبفرض أن  $z_0 = x_0 \cdot y_0$  قيمة تقريبية لـ  $z = x \cdot y$

$$\begin{aligned} z &= x \cdot y = (x_0 + \Delta x) (y_0 + \Delta y) && \text{فإن} \\ &= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

وبإهمال الحد  $\Delta x \Delta y$  الذي هو مقدار صغير فإن

$$\begin{aligned} \Delta z &= z - z_0 = x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x - x_0 y_0 \\ &= x_0 \Delta y + y_0 \Delta x \end{aligned}$$

$$\Delta = |\Delta z| = |x_0 \Delta y + y_0 \Delta x| \quad \text{الخطأ المطلق}$$

$$R_{x \cdot y} = \frac{\Delta}{x_0 y_0} = \frac{|x_0 \Delta y + y_0 \Delta x|}{x_0 y_0} \quad \text{الخطأ النسبي}$$

$$\leq \frac{|x_0 \Delta y| + |y_0 \Delta x|}{x_0 y_0} = \frac{|\Delta y|}{y_0} + \frac{|\Delta x|}{x_0}$$

$$R_{x \cdot y} \leq R_x + R_y \quad \text{أي أن :}$$

مثال (1-7) :

عين الخطأ النسبي لحاصل ضرب العددين التقريبيين  
 $x = 3.7148$  ,  $y = 0.281$

الحل :

حاصل الضرب هو

$$x \cdot y = 1.0438588$$

الخطاء الناتج من تقريب العددين:

$$\Delta x \leq 5 \times 10^{-5} , \Delta y \leq 5 \times 10^{-4}$$

الخطاء النسبي :

$$\begin{aligned} R_{x \cdot y} &\leq R_x + R_y = \frac{|\Delta x|}{x} + \frac{|\Delta y|}{y} \\ &= \frac{0.00005}{3.7148} + \frac{0.0005}{0.281} = 0.0017929 \end{aligned}$$

ويمكن استنتاج الخطأ المطلق كما يلي :

$$R_{x \cdot y} = \frac{|\Delta (x \cdot y)|}{x \cdot y}$$

$$\begin{aligned} |\Delta (x \cdot y)| &= (x \cdot y) R_{x \cdot y} && \text{ومنه} \\ &= (1.0438588) (0.0017929) \\ &= 0.0018715 \end{aligned}$$

وهي قيمة الخطأ المطلق.

3- الخطأ النسبي في حاصل قسمة عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية للعددين.

الإثبات :

لتكن  $x_0$  قيمة تقريبية لـ  $x$

$y_0$  قيمة تقريبية لـ  $y$

بفرض أن  $z_0 = \frac{x_0}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ) قيمة تقريبية لـ  $z = \frac{x}{y}$

فإن :

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0 + \Delta x}{y_0 + \Delta y} - \frac{x_0}{y_0} \\ &= \frac{x_0 y_0 + y_0 \Delta x - x_0 y_0 - x_0 \Delta y}{y_0 (y_0 + \Delta y)} \\ &= \frac{y_0 \Delta x - x_0 \Delta y}{y_0 (y_0 + \Delta y)}\end{aligned}$$

$$|\Delta z| = \left| \Delta \left( \frac{x}{y} \right) \right| = \left| \frac{y_0 \Delta x - x_0 \Delta y}{y_0 (y_0 + \Delta y)} \right| \quad \text{الخطأ المطلق}$$

$$R_{\frac{x}{y}} = \frac{\left| \frac{y_0 \Delta x - x_0 \Delta y}{y_0 (y_0 + \Delta y)} \right|}{\frac{x_0}{y_0}} = \left| \frac{y_0 \Delta x - x_0 \Delta y}{x_0 (y_0 + \Delta y)} \right| \quad \text{والخطأ النسبي}$$

$$\leq \left| \frac{\Delta x}{x_0} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y_0} \right| = R_x + R_y$$

مثال (8-1) :

عين الخطأ التقريبي والخطأ المطلق المركب في ناتج قسمة العددين التقريبيين

$$x_0 = 12.4 , y_0 = 1.25$$

الحل :

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{12.4}{1.25} = 9.92$$

والخطأ المركب في  $x_0$  هو  $\Delta x \leq 5 \times 10^{-2} = 0.05$ والخطأ المركب في  $y_0$  هو  $\Delta y \leq 5 \times 10^{-3} = 0.005$ 

والخطأ النسبي المركب في حاصل القسمة هو

$$\begin{aligned} R_{\frac{x}{y}} &\leq R_x + R_y = \frac{0.05}{12.4} + \frac{0.005}{1.25} \\ &= 0.004 + 0.004 = 0.008 \end{aligned}$$

والخطأ المطلق المركب في حاصل القسمة هو :

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{x}{y}\right) &= \left(\frac{x_0}{y_0}\right) R_{\frac{x}{y}} \\ &= (9.92)(0.008) = 0.07936 \end{aligned}$$

مثال (9-1) :

لنكن لدينا الأعداد المدورة التالية :

$$x = 3.219 , y = 2.73 , z = 1.842 , s = 8.7193$$

احسب  $L$  واحسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق المركبين حيث :

$$L = \frac{x + y \cdot z}{s}$$

الحل :

$$y \cdot z = (2.73) (1.842) = 5.02866$$

$$x + y \cdot z = 3.219 + 5.02866 = 8.24766$$

$$L = \frac{x + y \cdot z}{s} = \frac{8.24766}{8.7193} = 0.9459085$$

الخطأ النسبي لـ  $y \cdot z$ 

$$R_{y \cdot z} = \frac{0.005}{2.73} + \frac{0.0005}{1.842} = 0.002130$$

الخطأ المطلق لـ  $y \cdot z$ 

$$\Delta (y \cdot z) = (0.002130) (5.02866) = 0.010575$$

الخطأ المطلق لـ  $x + y \cdot z$ 

$$\Delta (x + y \cdot z) \leq 0.0005 + 0.010575 = 0.011075$$

$$R_{x+y \cdot z} = \frac{0.011075}{8.24766} = 0.001343 \quad \text{الخطأ النسبي لـ } x + y \cdot z$$

$$R_L \leq 0.001343 + \frac{0.00005}{8.7193} = 0.001349 \quad \text{الخطأ النسبي لـ } L$$

$$\Delta (L) = (0.001349) (0.9459085) = 0.001276 \quad \text{الخطأ المطلق لـ } L$$

ملاحظة (3-1) :

إذا رمزنا للخطأ النسبي المرتكب في حساب القيمة التقريبية  $x_0$  بالرمز  $\frac{\Delta x}{x_0}$  حيث  $\Delta x = [x - x_0]$  القيمة الحقيقية (الفعلية) فإنه يمكن أن

$$y = x^n \Rightarrow \frac{\Delta y}{y_0} = n \frac{\Delta x}{x_0} \quad \text{نكتب}$$

وبشكل عام إذا كان لدينا  $u = \frac{x^a \cdot y^b}{z^c}$  فإن الخطأ النسبي يعطى بالعلاقة

$$\frac{\Delta u}{u_0} = a \frac{\Delta x}{x_0} + b \frac{\Delta y}{y_0} + c \frac{\Delta z}{z_0}$$

مهما تكن قيم  $a, b, c$  صحيحة أو كسرية، موجبة أو سالبة على أن تؤخذ بقيمتها المطلقة.

ملاحظة (1-4) :

عندما نقول أن العدد  $x_0$  هو قيمة تقريبية للعدد  $x$  بخطأ لا يتجاوز  $10^{-n}$  أو بدقة حتى  $10^{-n}$  فإن هذا يعني أن :

$$[x - x_0] \leq \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$$

مثال (1-10) :

احسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق في حساب القيمة

$$u = \frac{x^2 \cdot y}{z}$$

$$x = 8 \mp 0.08, \quad y = 5 \mp 0.1, \quad z = 10 \mp 0.1$$

حيث

الحل :

الخطأ النسبي هو

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u}{u_0} &= 2 \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0} + \frac{\Delta z}{z_0} \\ \frac{\Delta u}{u_0} &= 2 \frac{0.08}{8} + \frac{0.1}{5} + \frac{0.1}{10} \\ &= \frac{2}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100} = \frac{5}{100} \end{aligned}$$

ومنه الخطأ المطلق المرتكب

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_0 \left( \frac{5}{100} \right) = \frac{x_0^2 y_0}{z_0} \left( \frac{5}{100} \right) \\ &= \frac{(64)(5)}{10} \left( \frac{5}{100} \right) = 1.6 \end{aligned}$$

وبذلك يمكن أن نكتب :

$$u = \frac{(64)(5)}{10} \mp 1.6 = 32 \mp 1.6$$

مثال (11-1) : احسب  $y = \sqrt[3]{x^2}$  حيث  $x = 8000 \mp 3$

الحل :

$$y_0 = x_0^{\frac{2}{3}} = (8000)^{\frac{2}{3}} = 400$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{2}{3} \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{2}{3} \frac{3}{8000} = \frac{1}{4000}$$

$$\Delta y = (400) \frac{1}{4000} = \frac{1}{10} = 0.1$$

ومنه

$$y = 400 \mp 0.1$$

إذن