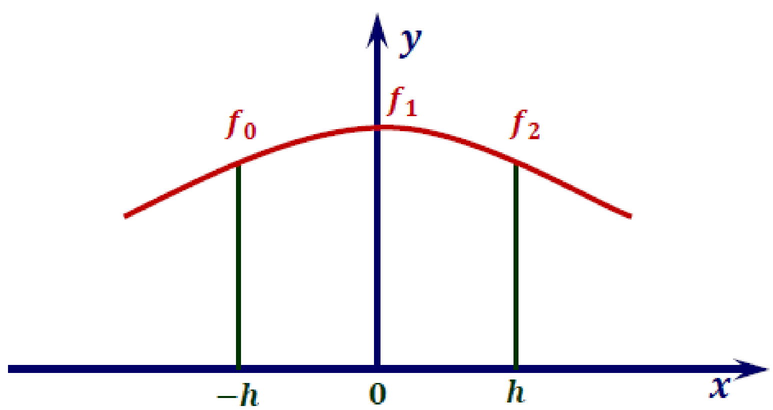
طريقة سمبسون لايجاد القيمة التقريبية للتكامل المحدد Simpson's Rule

طريقة سمبسون هي احدى طرق التحليل العددي لايجاد القيمة التقريبية للتكامل المحدد باستخدام متعددة حدود من الدرجة الثانية.

لنجد اولا المساحة تحت منحني القطع المكافئ $f = a + bx + cx^2$ الذي يمربالنقاط الثلاث التالية:

$(-h, f_0),\ (0, f_1)\ ,(h, f_2)$



$$I = \int_{-h}^{h} (a + bx + cx^2)\, dx$$

$$= \left(ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-h}^{h}$$

$$= \left(ah + b\frac{h^2}{2} + c\frac{h^3}{3} \right) - \left(-ah + b\frac{h^2}{2} - c\frac{h^3}{3} \right)$$

$$= 2ah + \frac{2c\, h^3}{3}$$

ولان النقاط $(-h, f_0), ((0, f_1), (h, f_2)$ تقع على منحني القطع المكافئ لذلك فهي تحقق معادلته $f = a + bx + cx^2$ ولذلك فان:

$$f_0 = a + b(-h) + c(-h)^2 = a - bh + ch^2 \qquad (1)$$

$$f_1 = a + b(0) + c(0)^2 = a \qquad (2)$$

$$f_2 = a + b(h) + c(h)^2 = a + bh + ch^2 \qquad (3)$$

وبتعويض المعادلة (2) في المعادلتين (1) و (3) نحصل على:

$$f_0 = f_1 - bh + ch^2$$

$$f_2 = f_1 + bh + ch^2$$

وبجمع هاتين المعادلتين نحصل على:

$$f_0 + f_2 = 2f_1 + 2ch^2$$

$$f_0 - 2f_1 + f_2 = 2ch^2 \qquad (4)$$

ولكن

$$I = 2ah + \frac{2c\,h^3}{3}$$

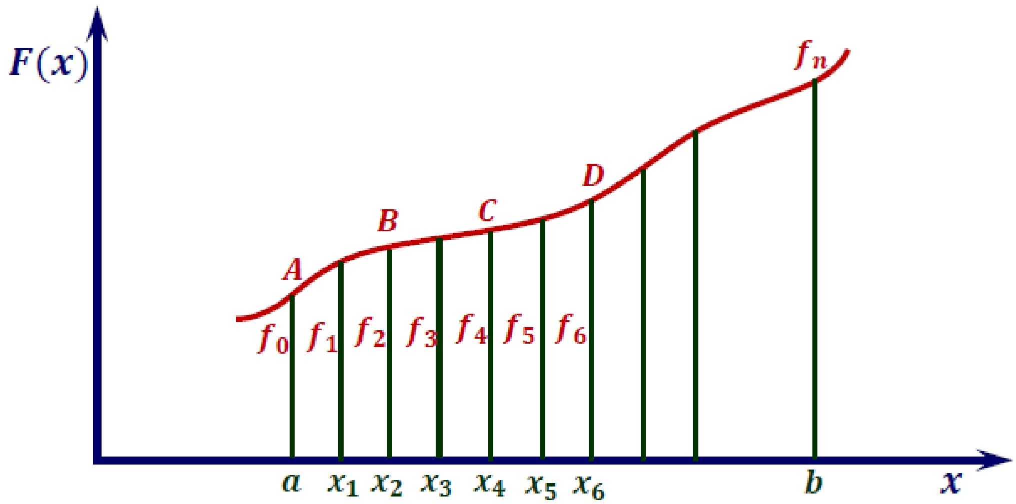
$$I = \frac{h}{3}\,[6a + 2ch^2] \qquad (5)$$

بتعويض المعادلتين (2) و (4) في المعادلة (5) نحصل على:

$$I = \frac{h}{3}\,[6f_1 + f_0 - 2f_1 + f_2]$$

$$\boxed{I = \frac{h}{3}\,[f_0 + 4f_1 + f_2] \qquad (6)}$$

وبالامكان تعميم المعادلة (6) لحساب مساحة تحت المنحني لتقسيمات متتالية لاي منحني مثل $y = f(x)$ للفترة $a \le x \le b$ كما موضح في الشكل التالي:



$$I_{AB} = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$$

$$I_{BC} = \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4]$$

$$I_{CD} = \frac{h}{3}[f_4 + 4f_5 + f_6]$$

$$\boxed{\therefore\ I = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + \cdots + f_n]}$$

مثال – 1- استخدمي طريقة سمبسون لايجاد القيمة التقريبية للتكامل المحدد التالي على فرض تقسيم الفترة الى اربع اقسام :

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

الحل:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

x	$f(x)$
0	0
$\pi/4$	0.707106
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	0.707106
π	0

$$I = \frac{\pi/4}{3}\,[4(0.707106) + 2(1) + 4(0.707106)] = 2.004558$$

$$\textit{exact solution} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi} \sin x \; dx = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$$

$$\textit{Trapezoidal}: \quad I = \frac{\pi}{4}\,[0.707106 + 1 + 0.707106] = 1.896118898$$

مثال – 2 – استخدمي طريقة سمبسون لايجاد الحل التقريبي للتكامل التالي:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\; dx$$

على فرض تقسيم الفترة الى 10 اقسام, قارني الحل مع الحل المضبوط وجدي مقدار الخطاء.

Solution

$h = \frac{1-0}{10} = 0.1 \quad , \qquad f(x) = e^{-x^2}$

x	$f(x)$		
0	1		
0.1		0.990050	
0.2			0.960789
0.3		0.913931	
0.4			0.852144
0.5		0.778801	
0.6			0.697676
0.7		0.612626	
0.8			0.527292
0.9		0.444858	
1	0.367879		
$\sum$	1.367879	3.740266	3.037901

$$I = \frac{0.1}{3}\left[(1.367879) + 4(3.740266) + 2(3.037901)\right] = 0.746825$$

مثال – 2 – استخدمي طريقة سمبسون لايجاد الحل اللتقريبي للتكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\ x^2}}\, dx$$

على فرض تقسيم الفترة الى ثمانية اقسام :

Solution

$h = \frac{1-0}{8} = 0.125$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+ x^2}}$

x	$f(x)$	$4 \times f(x)$	$2 \times f(x)$
0	1		
0.125		3.969112	
0.250			1.940285
0.375		3.745317	
0.5			1.788854
0.625		3.391993	
0.750			1.600000
0.875		3.010307	
1	0.707107		

$\sum$	1.707107	14.116729	5.329139

$$I = \frac{0.125}{3}[1.707107 + 14.116729 + 5.329139] = 0.881374$$

التكامل العددي Numerical integration

هناك العديد من الطرق العددية تستخدم في ايجاد الحل العددي للتكامل, وتستند هذه الطرق على اساس ان التكامل هو المساحة تحت المنحني. وسنتطرق الى بعض هذه الطرق.

1- طريقة شبه المنحرف

تتلخص هذه الطريقة بما يلي:
اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة مستمرة ومعرفة للفترة $a \le x \le b$.

ولاجل ايجاد حل للتكامل المحدد التالي:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

وبما ان تكامل الدالة هو المساحة المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات اي ان:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = Area\ under\ the\ curve$$

فعند ايجاد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات للفترة $a \le x \le b$ نقول ان التكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$ مساو لهذه المساحة.

وعادة ما تاخذ الدالة اشكالا مختلفة معقدة غير تقليدية , لذلك فان حساب المساحة عادة يكون تقريبي وفيه نسبة من الخطاء , ولذلك فان حساب التكامل بطرق التحليل العددي يكون تقريبيا فيه نسبة من الخطاء وغير مضبوط.

ولايجل ايجاد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات للفترة $a \le x \le b$

تقسم الفترة $a \le x \le b$ الى n من الشرائح الصغيرة عرض كل شريحة هو h حيث:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

كما موضح بالشكل التالي: