الفصل الثالث: ديناميكية الشبيكة Lattice Dynamics

اهتزازات الشبيكة، الموجات المرنة، اهتزاز الشبيكة ذات ذرة واحدة في بعد واحد، اهتزاز الشبيكة ذات الذرتين في بعد واحد، أنماط التذبذب للشبيكة الخطية ذات الذرتين، تكمم الموجات المرنة، سرعة الموجة وسرعة المجموعة، زخم الفونونات، الاستطارة غير المرنة للفونونات.

اهتزازات الشبيكة:

يعد موضوع حركية الشبيكة في فيزياء الحالة الصعبة ذات اهمية بالغة جداً وذلك لتداخله في تفسير مفاهيم الخواص الفيزيائية للمواد الصلبة. ويقصد بحركية الشبيكة هو دراسة اهتزازات ذرات الشبيكة. ان دراسة الحركة الاهتزازية للذرات المكونة للشبيكة البلورية تمكننا من وصف السلوك الاجمالي للمادة الصلبة من خلال الخواص الحرارية او الكهربائية او الميكانيكية او غيرها.

الذرات داخل البنية البلورية تكون في حالة حركة اهتزازية، اي انها تتحرك حركة توافقية بسيطة دون ان تنتقل من موقعها الى موقع اخر. تعتمد الحركة التوافقية البسيطة للذرات على درجات الحرارة. ولو فرضنا ان الذرات داخل الشبيكة تكون عند درجة الصفر المطلق فانها ستستقر في مواقع الاتزان في حالة سكون. وعند رفع درجة الحرارة تبدأ الذرات بالتذبذب حول مواقع الاتزان بإزاحة تتوقف على درجة الحرارة.

ان انماط الاهتزاز "Vibrational modes" للذرات في داخل التركيب البلوري يعبر عنه بموجب النظرية الكلاسيكية على انها موجات صوتية مرنة تسير في وسط مستمر على نسق معين ويمتد سريانه خلال بلوره غير محددة اما في النظريات الحديثة فتعتبر انماط الاهتزاز مجموعة من جسيمات يتعذر تميزها تدعى الفونونات "Phonons".

ان الصفات الحرارية للمواد الصلبة والسعة الحرارية والتوصيل الحراري وكذلك الاستطاره غير المرنة للنيوترونات او الاشعة السينية بواسطة البلورات وغيرها تفسر جميعها من خلال اهتزاز الشبيكة والحاصل عنها فونونات.

تكمم اهتزازات الشبيكة:

بموجب النظرية الكلاسيكية يعبر عن أنماط الاهتزاز في بلورة بوصفها موجات مرنة في وسط مستمر على نسق معين ويمتد جريانها خلال بلورة غير محددة. اما النظرية الحديثة **فتعتبر أنماط الاهتزاز مجموعة من الدقائق يتعذر تمييزها تدعى الفونونات.** كلمة فونانات مشابهة لكلمة فوتونات.

والفونونات تمتلك طاقة محددة $\hbar\omega$ ولكن لا يمكن القول انها تملك زخماً حقيقاً. ان الكمية الاتجاهية $\hbar\vec{K}$ (حيث $\vec{K}$ يمثل متجه الموجة الحاصلة من الاهتزاز)، تكون كمية صغيرة جدا في تفاعلات بين الفونونات واشعاعا خارجياً.

ان الفوتون والفونون يخضعان لاحصاء بوز- اينشتين. واذا اردنا ان نعطي تعريف مبسط للفونون نقول. ان الازاحات الدورية للذرات عن مواضع اتزانها (موجات مرنة) يمكن وصفها عن طريق **الفونون وهو وحدة طاقة مكممة quantized لاهتزاز ذرات البلورة (او كم طاقة اهتزاز الشبيكة)**، له طاقة E تساوي $\hbar\omega$ وزخم او شبه زخم $\vec{P}$ وسرعة المجموعة $\left(v_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{dE}{dP}\right)$ وطول موجي ومتجه موجة $\vec{\mathrm{K}}$ وتردد وسرعة انتشار نمط الاهتزاز او سرعة الطور $\left(v = \frac{\omega}{K}\right)$ وفضلاً عن ذلك يخضع الفونون لقوانين حفظ الزخم والطاقة.

ان جميع الأفكار المطبقة على الفوتون كازدواج صفة الموجة وصفة الدقيقة وتكممية الفوتون يمكن ان تطبق على الفونون. فهنالك الكثير من المعلومات التجريبية تشير الى اهتزاز الشبيكة وهذا الاهتزاز ممثلاً بالفونون يكون مكمماً حيث ان كثير من الصفات الحرارية للمواد الصلبة كالسعة الحرارية والتوصيل الحراري وكذلك الاستطارة غير المرنة للنيوترونات او الاشعة السينية بواسطة البلورات وغيرها تقدم دلائل قوية على ان اهتزاز الشبيكة يكون مكمم. **ويطلق عادة على الاهتزاز في بلورة والحاصل من مؤثرات حرارية بالفونونات المهيجة حرارياً.**

الاستطاره غير المرنة للفوتونات (فوتونات الاشعة السينية) بواسطة الفونونات:

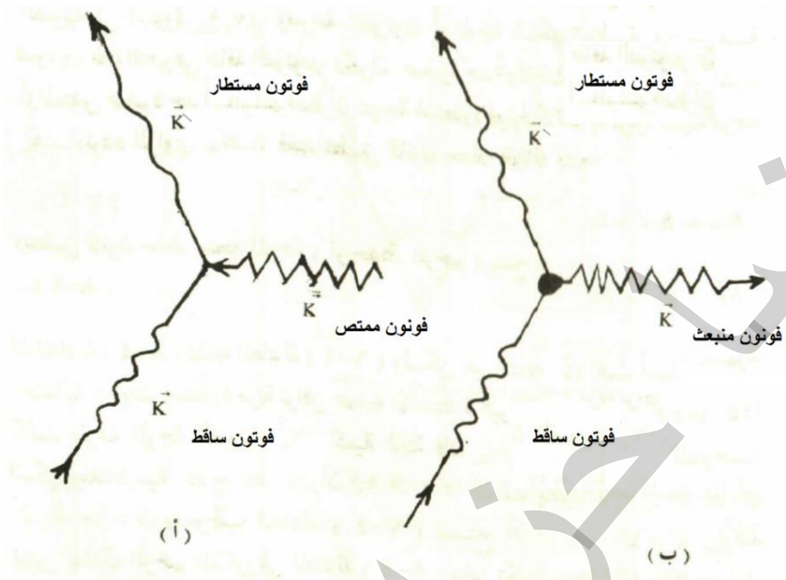
حيود براك (استطاره مرنة) للأشعة السينية بواسطة بلورة يخضع لقانون حفظ متجه الموجه اي ان:

$$\vec{k'} - \vec{k} = \vec{G}$$

$\vec{k}$هو متجه الفوتون (الموجه) الساقطة & $\vec{k'}$ هو متجه الفوتون المستطير & $\vec{G}$ متجه الشبيكة المقلوبة. وهذه الاستطارة هي استطارة مرنة. وقد تحدث استطارة غير مرنة بين الاشعة السينية (الفوتونات) الساقطة على البلورة والموجات (الفونونات) الحاصلة من اهتزاز ذرات البلورة مما يسبب انبعاثاً او تولد (creation) او فناء (annihilation) فونون ذو متجه $\vec{K}$ وباستخدام قانون حفظ متجه الموجه نحصل على:

$$\vec{k'} - \vec{k} = \vec{G} \mp \vec{K}$$

حيث ان الاشارة السالبة تشير الى تولد فونون والاشارة الموجبة الى فناء او امتصاص فونون.



ان المجال الكهربائي للفوتون الساقط على البلورة يولد اجهادا ميكانيكيا دوريا داخل البلورة مما يسبب تغير الصفات المرنة للبلورة في هذا النوع من التفاعل يمكن للفوتون ان يولد او يمتص فونونا.

وبذلك يتغير $\vec{k}$ (متجه الفوتون "الموجه" الساقطة الذي تردده الزاوي (ω) الى $\vec{k'}$ (متجه الفوتون المستطير الذي تردده الزاوي ´ω).

فان هذا التغير في قيمة واتجاه متجه موجة الفوتون وكذلك طاقته، نتيجة تولد او فناء فونونات صوتية (acoustic phonons) هو السبب في اعتبار عملية التفاعل هذه **استطارة غير مرنة** ويطلق على هذه العملية **تشتت او استطارة برليون (Brillauim scattering)** ولكن بسبب الفرق الكبير بين سرعة الموجه الصوتية في البلوة (v_s.) وسرعة الفوتون او الموجه الكهرومغناطيسية c (سرعة الضوء) فان التغير في طاقة الفوتون تكون صغيرة جدا ولذلك تكون طاقة الفونون المتولد او الممتص صغيرة جدا.

فلو افترضنا ان نتيجة استطارة فوتون كانت تولد فونونا متجه موجه $\vec{K}$ وتردده الزاوي ω_o ، فعند تطبيق قانون حفظ الطاقة ينتج :

$$\hbar\omega = \hbar\omega' + \hbar\omega_o \;\ldots..1$$

وبتطبيق قانون حفظ متجه الموجه (او حفظ الزخم) ينتج:

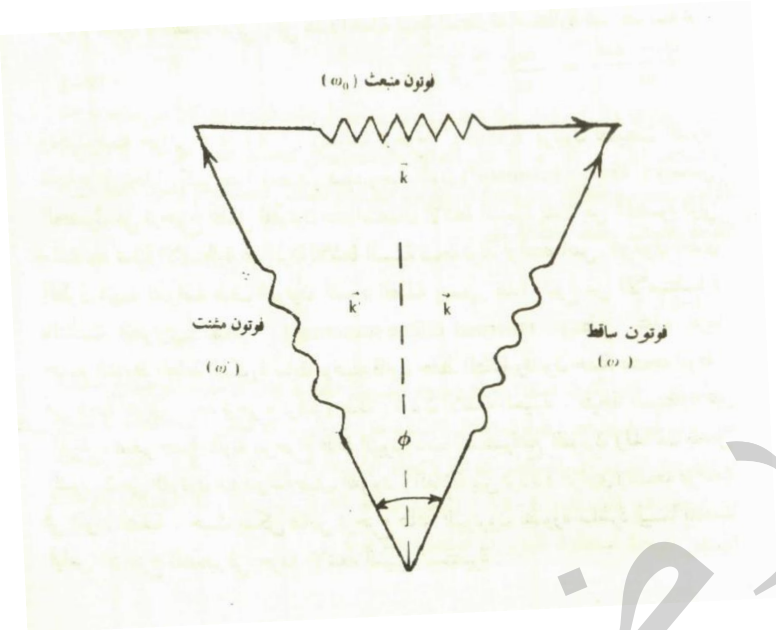
$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \hbar\vec{K} \;\ldots\ldots2$$

ان سرعة الموجه الصوتيةv_sهي كمية ثابتة فان $\vec{K}v_s = \omega_o$

اما بالنسبة للموجه الكهرومغناطيسية $kc = \omega$ وان $c \gg v_s$ لذلك يكون $ck \gg v_s K$ أي ان $\omega \gg \omega_o$ ومن المعادلة الاولى (1) نستنتج ان:

$$k = k' \quad ، \quad \omega = \omega'$$

وعند تمثيل تعادل الزخم في (2) بيانيا تكون النتيجة مثلث متساوي الساقين تقريبا:



$$\vec{K} = 2k \sin\frac{\emptyset}{2} \ldots\ldots (3)$$

حيث $\emptyset$ تمثل زاوية الاستطارة. ويمكن كتابة معادلة (3) بدلالة معامل الانكسار للبلورة " n " النسبة بين سرعة الفوتون في الفراغ وسرعته في البلورة حيث ان

$$n = \left(\frac{c}{\frac{\omega}{k}}\right) \ldots\ldots (4)$$

وبذلك تصبح معادلة " 3 " بعد ضرب طرفيها بسرعة الموجه الصوتية في البلورة v_s كالاتي:

$$v_s K \cong 2 v_s \omega n c^{-1} sin\frac{\emptyset}{2} \ldots\ldots (5)$$

ولكن $\omega_o = v_s K$ يكافئ تردد الفونون المنبعث (ω_o) لذلك فان المعادلة " 5 " تكتب بالصيغة الاتية:

$$\omega_o \cong 2 v_s \omega n c^{-1} sin\frac{\emptyset}{2} \ldots\ldots (6)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على علاقة تقريبية لتردد فونونات متولدة في بلورة عند استطارة فوتونات استطارة غير مرنة عند زاوية φ.

ان اقصى تغير نسبي لتردد الفوتون (الضوء المرئي) في هذه العملية نتيجة استطارته استطارة غير مرنة هو

$$\boldsymbol{\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{\omega_o}{\omega} \cong 2 v_s n c^{-1} \ldots\ldots (7)}$$

يعد تزحزح تردد (طاقة) فوتون الاشعة السينية نتيجة استطارته غير المرنة صغير جدا مقارنة بتزحزح طاقة النيوترونات المستطيره مع الفونون لذلك يفضل النيوترون على الفوتون عند دراسة طيف الفونون (العلاقة بين تردده الزاوي ومتجه موجته) في المواد الصلب.

حيث يمكن قياس تزحزح طاقة النيوترون بصورة مباشرة بينما تصعب قياس التزحزح الصغير في حزمة الاشعة السينية المستطيره.

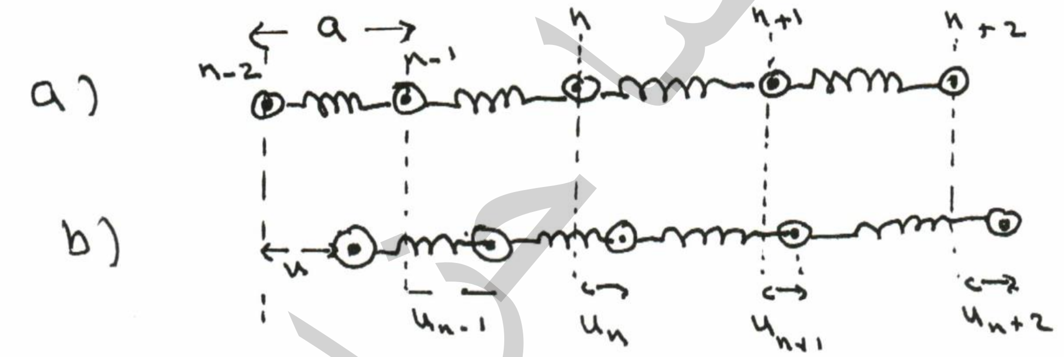
انماط الاهتزاز لشبيكة خطية احادية الذرات:

يمكن ايجاد علاقة التفريق بين التردد الزاوي (ω) للذرة المهتزة ومتجه الموجه (K) للموجه الحاصلة من ذلك الاهتزاز نفترض سلسلة خطية طويلة جدا من الذرات المتشابهة حيث ان:

m = كتلة كل ذرة من ذرات السلسلة.
a = فسحة الاتزان بين أي ذرتين متجاورتين (ثابت السلسلة).
C = ثابت قوة بين أي ذرتين متجاورتين (ثابت المرونة).
U_n = ازاحة الذرة "n" عن موضع الاتزان وهي دالة للزمن.
N = العدد الكلي لذرات السلسلة.
F_n = محصلة القوى المؤثرة على الذرة n.

يمكن اعتبار(على افتراض) السلسلة الذرية الخطية عبارة عن مجموعة من الكرات المتشابهة المربوطة بعضها مع بعض بنوابض افقية بحيث تكون حركة كل كرة باتجاه موازي للسلسلة وبذلك تكون الموجات الحاصلة من الاهتزاز موجات طولية فقط.

فاذا كانت استطالة او انكباس احد هذين النابضين اكثر من الاخر فسوف تتعجل الذرة الواقعة بينهما، أي تكون الذرة في حالة اهتزاز بقوة تتناسب مع الفرق بين اجهادي النابضين. ويمكن حساب محصلة القوة المؤثرة في الذرة n(F_n) في الشكل التالي لحساب المركبة من جهة اليسار [F_L] ومن جهة اليمين [F_R]



الشكل: (a) سلسلة خطية من الذرات المتشابهة في مواضع اتزانها.
(b) ازاحات الذرات عن مواضع اتزانها.

$$F_R = c(u_{n+1} - u_n)$$
$$F_L = c(u_n - u_{n-1})$$
$$F_n = F_{(R)} - F_{(l)}$$
$$F_n = c\,[u_{n+1} - u_n - u_n + u_{n-1}]$$
$$F_n = c[u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n] \quad \dots\dots\dots (1)$$

ان المعادلة (1) تمثل هذا تعبير خطي لكل الازاحات بصيغة قانون هوك تحت تأثير اقرب الجيران فقط. ويمكن تمثيل انتقال موجه طولية في صلب متجانس باتجاه معين مثلx

$$u = Ae^{[i(Kx-\omega t)]}$$

حيث x تمثل موضع استقرار الذرة المهتزة عن نقطة الأصل و بما ان ازاحة الذرة "n" عن موضع استقرارها عن نقطة الأصل x يساوي na عندئذ يمكن كتابة المعادلة (13) كما يلي:

$$u_n = Ae^{[i(Kna-\omega t)]}$$

وباشتقاق الازاحة بالنسبة الى الزمن مرتين نحصل على تعجيل هذه الذرة وكما يلي:

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} = -\omega^2 Ae^{[i(Kna-\omega t)]} \qquad \frac{d^2u_n}{dt^2} = -\omega^2 u_n$$

وهذا يعني ان اتجاه التعجيل او اتجاه القوة المسـببة للتعجيل يكون معاكسـا لاتجاه الازاحة، أي ان القوة المعيدة المؤثرة في الذرة n هي:

$$F_n = -m\omega^2 u_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبربط المعادلتين (1) (2) نحصل معادلة الحركة لاي ذرة في المستوى على

$$-m\omega^2 u_n = c\,[u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n] \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

$$-m\omega^2 = c\,[\frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{2u_n}{u_n}]$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m}[2 - \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_{n-1}}{u_n}]$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{Ae^{[iK(n+1)a - i\omega t]}}{Ae^{[iK(na) - i\omega t]}} = e^{iKa}$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m}[2 - e^{iKa} - e^{-iKa}]$$

$$= \frac{c}{m}[2 - (\cos ka + i\sin ka) - (\cos ka - i\sin ka)]$$

$$= \frac{c}{m}[2 - 2\cos ka] = \frac{2c}{m}(1 - \cos ka)$$

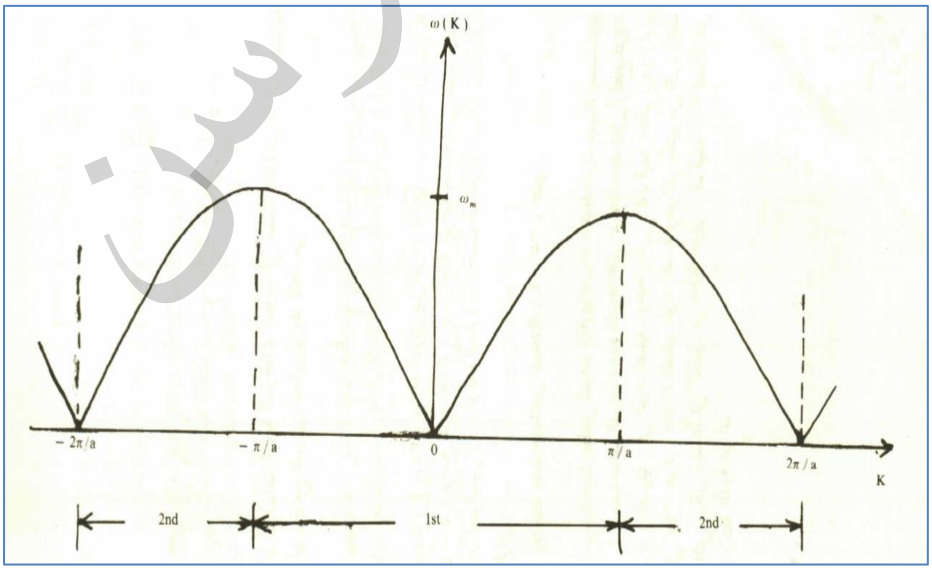
$(1-\cos ka) = 2\sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)$ $\quad$ $\boldsymbol{\omega^2 = \frac{4c}{m}\sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}$

$$\omega = \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \text{علاقةالتفريق} \ldots\ldots\ldots (3)$$

$\omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$ ……………… ω_{max} القيمة العظمى للتردد الزاوي

$$\omega = \mp\omega_m \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \text{علاقةالتفريق} \ldots\ldots\ldots (3)$$

والمعادلة (3) تمثل علاقة التفريق بين التردد الزاوي (ω) وقيمة متجه الموجه [K] لسـلسـلة احادية الذرات. والشـكل ادناه يوضـح هذه العلاقة، ان الاشـارة الموجبة والسـالبة تعين اتجاه انتقال الموجه اذا كان نـحو اليـمين (+) او نحو اليسـار (-) حيث الحركة عند أي نقطة تـكـون دوريـة مـع الزمن.



ويمكن ملاحظة الخصائص التالية للمعادلة (3) اهمها:

-1 وجود قيمة عظمى للتردد الزاوي (ω_m) عندما تكون قيم K تساوي $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ او مضاعفاتها الفردية وهذا يعني ان هناك **حد اعلى او قطع لتردد الموجات المرنة (الصوتية)** في المواد الصلبة. ان قيمة (ω_m) تعتمد على ثابت القوة وكتلة الذرة أي ان

$$\omega = \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) \dots\dots\dots \text{علاقةالتفريق} \dots\dots\dots.(3)$$

وجود قيمة عظمى للتردد الزاوي (ω_m) عندما تكون قيم K تساوي $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ او مضاعفاتها الفردية وهذا يعني ان هناك **حد اعلى او قطع لتردد الموجات المرنة (الصوتية)** في المواد الصلبة.

$$\omega = \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) = \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi a}{2a}\right) = \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \& \ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{\omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \dots\dots\dots\dots.(4) \quad \textbf{(تردد القطع)}$$

-2 لكل متجه موجه K يقابله تردد زاوي وان جميع الاهتزازات المحتملة تحدد بقيم K في المدى

$$-\frac{\pi}{a} \le K \le \frac{\pi}{a} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \textit{حدود منطقة برليون الاولى}$$

ويدعى هذا المدى بنطاق او منطقة برليون الأولى (1st B.Z.) (First Brillauin Zone) للشبيكة الخطية، اما المدى الذي يلي مدى منطقة برليون الاولى وبنصف دوره $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ لكل من جهتيها فيدعى بمنطقة برليون الثانية(2st B.Z.)

$$\frac{\pi}{a} \le K \le \frac{2\pi}{a} \qquad -\frac{2\pi}{a} \le K \le -\frac{\pi}{a} \quad \dots\dots\dots \textit{حدود منطقة برليون الثانية}$$

تتبعها منطقة برليون الثالثة على نفس المنوال وهكذا بقية مناطق برليون الرابعة والخامسة. ان الكمية $\left(\frac{2\pi}{a}\right)$ تمثل قيمة متجه الشبيكة المقلوبة $(\vec{G})$ لشبيكة او سلسلة احادية الذرات ذات بعد واحد، وهذا المتجه يربط بين أي نقطتين متكافئتين في منطقتين مختلفتين من مناطق برليون (ان فضاء برليون هو فضاء متجه الموجه أي فضاء شبيكة مقلوبة).

اذا فرضنا ان $\vec{K}$، $\vec{K'}$ تمثل متجهات موجه داخل وخارج منطقة برليون على التوالي فان:

$$\boldsymbol{K = K' + G} \qquad K = K' \mp n\left(\frac{2\pi}{a}\right)$$

بعد اهمال صفة الاتجاهية لانهما يقعان على خط واحد، حيث n عدد صحيح

-3 ان التناسب بين التردد الزاوي (ω) ومتجه الموجهK **لقيم صغيرة جداً اي ان (Ka<< 1) (أي عند منطقة اطياف موجات طويلة)** ويماثل ذلك للموجات المرنة في وسط مستمر متجانس اي ان:

$$\omega = \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \dots \text{علاقةالتفريق} \dots (3)$$

وبما ان قيمة K صغيرة جدا فعليه تكون الزاوية $\left(\frac{ka}{2}\right)$ ستكون صغيرة جدا وعند ذلك سيكون جيب الزاوية يساوي الزاوية

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{عندما تكون الزاوية صغيرة}$$

$$\omega \approx \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ka}{2}\right) \qquad \omega \approx \mp\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

وهذا يعني ان كان الطول الموجي للاهتزاز (او الاضطراب) اكبر بكثير من ثابت السلسلة (a) فان سلسلة الذرات تتصرف كانها سلك مستمر كما يصفه الميكانيك الكلاسيكي حيث تكون سرعة انتشار الموجه كمية ثابتة لا تعتمد على الطول الموجي

أي انه عندما يكون $Ka << 1$ فان $K << \frac{1}{a}$ بما ان $\frac{1}{\lambda} = K$ فان $\lambda >> a$

أي عند (منطقة اطياف موجات طويلة) ولذلك تتناسب (ω) خطيا مع K تقريبا اي ان:

$\omega = \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$ ... علاقةالتفريق ... (3)

وبما ان قيمة K صغيرة جدا فعليه تكون الزاوية $\left(\frac{ka}{2}\right)$ ستكون صغيرة جدا وعند ذلك سيكون جيب الزاوية يساوي الزاوية

$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right)$ .... عندما تكون الزاوية صغيرة

$\omega \approx \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ka}{2}\right)$ $\omega \approx \mp \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka = 2\pi v$ ... ... (5)

$\mathcal{V}$ = نيو (Nu) يمثل تردد الموجه التي طولها λ.

$$\lambda v = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} a = V_\circ$$

$\omega \approx \mp \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka = V_\circ K$ $\omega \approx V_o K$

وايضاً $\left(V_\circ = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} a\right)$ حيث $V_\circ$ هي سرعة انتشار الموجة الصوتية او المرنة في منطقة أطياف الموجات الطويلة لسلسلة خطية من الذرات المتشابهة وهي كمية ثابتة تقريبا كما هو الحال لسرعة انتشار موجة طولية في وسط مستمر مرن ومتجانس ذو بعد واحد. بالنسبة للموجات ذات الاطوال الموجية الكبيرة (أي عندما تكون λ كبيرة) (بعبارة أخرى عندما تكون K صغير) تنتقل ترددات هذه الموجات خلال الشبيكة، بينما الترددات الأخرى سوف تتلاشى بسرعة وبذلك تعمل الشبيكة عمل مرشح ميكانيكي للتخلص من الترددات الواطئة.

وبما ان قيمة K صغيرة جدا فعليه يمكن اعتبار جيب الزاوية مساوياً للزاوية أي ان:

$\omega = \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$ ... ... علاقةالتفريق ... ... (3)

$\omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$ .... القيمة العظمى للتردد الزاوي

$\omega = \mp \omega_m \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$ ... ... علاقةالتفريق ... ... (3)

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right)$$

$\omega = \omega_m\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{\omega_m a}{2}\right)k$ $\because \quad \omega = V_o k$ $\therefore \quad V_o = \frac{\omega_m a}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{\omega_m = \frac{2V_o}{a}}$

وايضاً يمكن ان نستنتج:

$V_o = \frac{\omega_m a}{2}$ $\because \quad \omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$ $\therefore \quad V_o = a\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$

اما عند قيم K أكبر من ذلك فان سرعة انتشار الموجه لا تكون ثابتة بل تتناقص كلما ازداد متجه الموجه (او صغر الطول الموجي). وعندما تصبح قيمة K مساوية الى $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ فهذا يعني ان الطول الموجي اصبح يساوي (2a) والدالة ω_k تنحني الى مماس افقي وتصبح قيمتها: $\left(\boldsymbol{\omega_m = \frac{2V_o}{a}}\right)$

ان هذا التباين في سرعة انتقال الموجه بسبب تباين اطوالها الموجيه نتيجة انتقالها من وسط مفرق او مشتت (dispersive) يقودنا الى التمييز بين سرعة الطور υ (Phase velocity) وسرعة المجموعة υ_g (group velocity) حيث يمكن التعبير عنها بصورة عامة باستخدام المعادلة (3) التي تمثل علاقة التفريق:

$$\omega = \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad \text{... علاقةالتفريق ...} \quad (3) \qquad V_\circ = a\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \frac{\omega}{K} = \frac{2}{K}\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) = \frac{2a}{Ka}\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) = \frac{2}{K}\left(\frac{V_\circ}{a}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{Ka}{2}\right)}{\left(\frac{Ka}{2}\right)}\right]$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial K} = V_\circ \cos\left(\frac{Ka}{2}\right) v = V_\circ \left[\frac{\sin\left(\frac{Ka}{2}\right)}{\left(\frac{Ka}{2}\right)}\right]$$

في منطقة الترددات الواطئة فان كلا من سرعة الطور v وسرعة المجموعة v_g تساوي $V_\circ$ أي ان

$$\left[v = v_g = V_\circ = a\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

وهي سرعة الموجة الصوتية المنتشرة في تلك المنطقة، حيث تكون قيم $Ka << 1$.

وهذه النتيجة مطابقة تماما لسرعة انتشار الموجة الصوتية في وسط مرن ومستمر. ومن الناحية العملية يمكن معرفة ثابت القوة C عند قياس سرعة الموجات الصوتية الطويلة في مادة صلبة.

كلما ابتعدنا عن منطقة الترددات الواطئة حيث تزداد القيم المطلقة لمتجه الموجه K اكثر فاكثر (موجات قصيرة) فان سرعة الطور (υ) هي دالة لمتجه الموجه، تقل حتى تبلغ اقل قيمة لها $\left(\frac{2V_o}{\pi}\right)$ عندما تكون $\left(K = \mp\frac{\pi}{a}\right)$ والتردد الزاوي اعظم ما يمكن $\left[\omega_m = 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

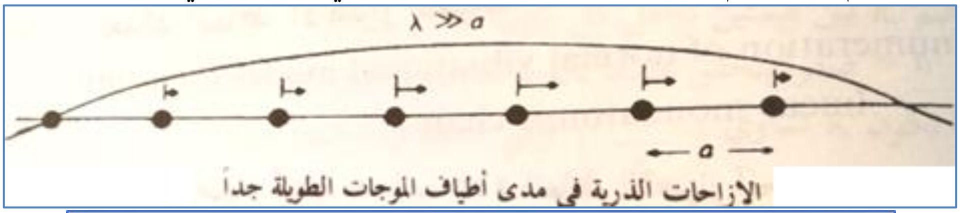
اما سرعة المجموعة (υ_g) فهي كذلك تقل بازدياد القيم المطلقة ل K حتى تبلغ قيمتها الصفر عندما تكون $K = \mp\frac{\pi}{a}$. ان سرعة المجموعة عندما تكون صفر ($\upsilon_g=0$) تعني ان الموجه الحاصلة من الاهتزاز ليست موجه متنقلة بل موجه واقفة عند حدود منطقة برليون حيث الازاحة عند تلك الحدود هي $K = \left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$.

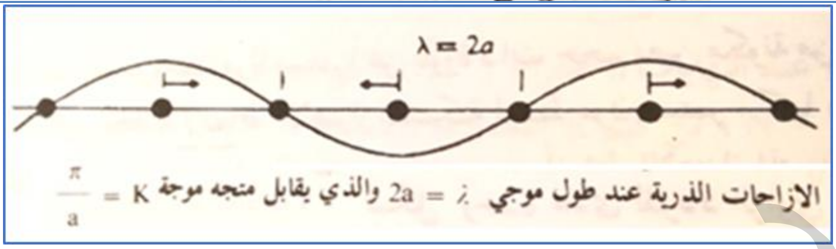
$$u_n = Ae^{[i(Kna-\omega t)]} \quad \& \quad K = \left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$$

$$u_n = Ae^{-i\omega t}\cos n\pi \qquad\qquad u_n = \mp Ae^{-i\omega t}$$

حيث ان الإشارة الموجبة تكون لقيم n الزوجية والاشارة السالبة تكون لقيم n الفردية. فمثلا إزاحة الذرة الرابعة تساوي وتعاكس إزاحة الذرة التي قبلها (الثالثة) او التي تليها (الخامسة). أي ان الذرات المتجاورة تتحرك بأطوار متعاكسة كما في الشكل:

وبذلك فان نمط الاهتزاز عند حدود منطقة برليون الاولى لا يمكن ان ينتشر خلال السلسلة الخطية بل ينعكس الى الخلف ثم الى الامام على التعاقب كموجه واقفة كما في الشكل الاتي:





خلاصة ما تقدم:

- ✓ هي عندما تكون K صغيرة فان λ>>a فتتحرك جميع الذرات في الطور نفسه بعضها بالنسبة للبعض الاخر وان القوة المعيدة الموثرة في ذرة بسبب تفاعلها مع جيرانها الأوائل تكون صغيرة ولهذا السبب تكون ω صغيرة كذلك.
- ✓ وعندما تكون K=0 تكون $\lambda = \infty$ ولذلك تتحرك الشبيكة الخطية برمتها بوصفها (جسما صلدا ذا اجزاء غير قابلة للاهتزاز (rigidbody) بسبب ضألة القوة المعيدة. مما يفسر بسبب كون ω = 0 عندما تكون K = 0
- ✓ وعندما تكون $K = \frac{\pi}{a}$ حيث λ = 2a تتحرك الذرات المتجاورة بأطوار متعاكسة وبعد ذلك تكون القوة المعيدة والتردد الزاوي اعظم ما يكون وتكون (موجات واقفة).

السرع في الحركة الموجية:

هنالك ثلاث سرع في الحركة الموجية متميزة عن بعضها تماما وهي:

1- سرعة الذرة: وهي السرعة التوافقية للذرة حول موقع الاتزان، وهي مقدار متغير فهي تكون في غايتها العظمى في لحظة مرور الذرة في موقع الاتزان. وتكون صفراً عندما تكون في اقصى إزاحة عن موقع الاتزان.

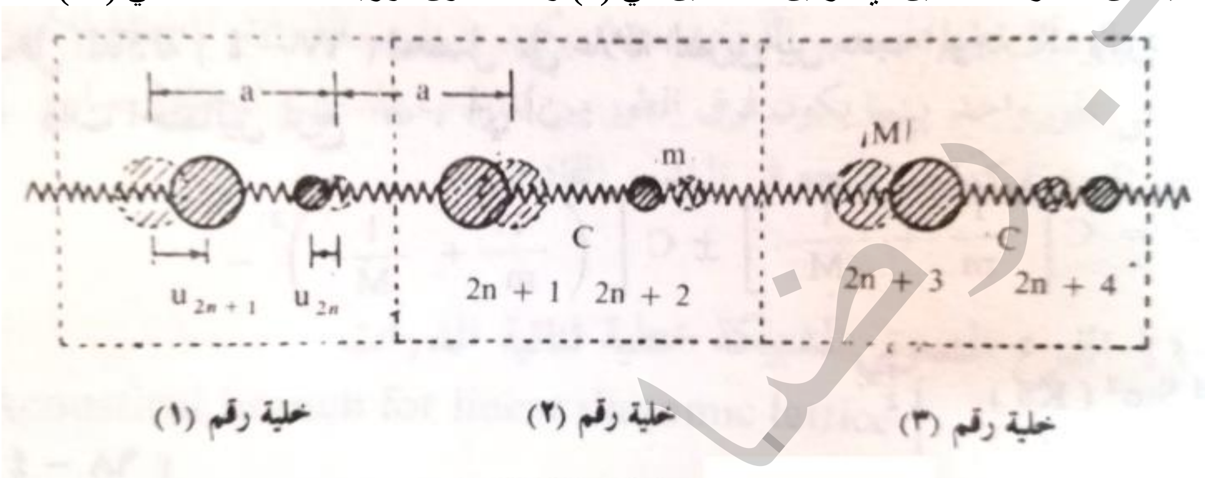
2- سرعة الطور(v) : وهي سرعة تقدم طور معين للموجة المفردة وهي مقدار ثابت في الوسط الواحد والتي يمكن التعبير عنها رياضياً بالعلاقة التالية: $\left(v = \frac{\omega}{K}\right)$

أي ان سرعة الطور هي عبارة عن سرعة انتشار موجة نقية ذات تردد معين (ω) ومتجه موجي K

3- سرعة المجموعة (v_g): عبارة عن سرعة انتشار عدد غير محدود من الترددات. أي ان سرعة المجموعة تمثل سرعة النبضة (Pulse) والتي متوسط ترددها (ω) ومتجه الموجة **K.** والتي يمكن التعبير عنها رياضياً بالعرقة التالية: $\left(v_g = \frac{\partial \omega}{\partial K}\right)$

انماط الاهتزاز لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

هنا ترافق نقطة الشبيكة الواحدة ذرتان قد تكونان متشابهتين في الكتلة كما في الماس او مختلفتين في الكتلة كما في (Nacl) في هذه الحالة فان علاقة التفريق بين ω & K لكل نمط من الاستقطاب. يظهر فرعان رئيسان هما الفرع الصوتي (acoustical branch) والفرع البصري (optical branch) وكل منهما يضم موجات طولية ومستعرضة. وهذا يعني انه يمكن الحصول على موجات او فونونات:
صوتية مستعرضة (TA) وصوتية طولية (LA) وبصرية مستعرضة (TO) وبصرية طولية (LO).
الان نفترض وجود سلسلة تحوي **نوعين من الذرات الصغيرة (m) والذرات الكبيرة (M)** مرتبة بالتعاقب بحيث ان اقصر مسافة بين اي ذرتين متعاقبتين هي (a) وبذلك تكون دورية فضاء السلسلة هي (2a).



سلسلة خطية ثنائية الذرات

تنتشر الموجه الطولية على طول السلسلة. عندئذ يمكن كتابة ازاحات الذرات المتباينة الاتية وهي تمثل موجات منتقلة وكما يلي:

$$\left.\begin{aligned} u_{2n} &= A\exp\{i[K(2n)a - \omega t\ ]\} \\ u_{2n+1} &= B\exp\{i[K(2n+1)a - \omega t]\} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

حيث ان A،B تمثلان سعة اهتزاز الذرات الصغيرة والكبيرة على التوالي وتكون عادة ذات قيم متباينة، وعلى فرض :

1- ان ثابت القوة (c) متساو في جميع ازواج هذه السلسة. أي ان الثابت المرن لأية اصرة كمية ثابتة.
2- وان القوة المعيدة للجيران الاوائل هي المؤثرة فقط في اية ذرة في السلسلة.
3- وقوع الازاحات الذرية ضمن المدى المرن لقانون هوك

فبذلك يمكن كتابة معادلات الحركة لكل من M،m هي:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2u_{2n}}{dt^2}\right) &= m\left(-\omega^2 u_{2n}\right) = c\left[u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_{2n}\right] \\ M\left(\frac{d^2u_{2n+1}}{dt^2}\right) &= M\left(-\omega^2 u_{2n+1}\right) = c\left[u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ومن خلال تعويض الازاحات الذرية u_{2n+1}& u_{2n} من المعادلة (7) في (8) ينتج:

$$\left.\begin{aligned} -m\omega^2 A &= cB[\exp(iKa)+\exp(-iKa)]-2cA \\ -M\omega^2 B &= cA[\exp(iKa)+\exp(-iKa)]-2cB \end{aligned}\right\}$$

$$\exp(iKa)+\exp(-iKa)=2\cos Ka$$

$$\left.\begin{aligned} (m\omega^2-2c)A+2cB\cos Ka &= 0 \\ (M\omega^2-2c)B+2cA\cos Ka &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(9)$$

المعادلة (9) تمثل معادلتين خطيتين متجانستين ويمكن حلهما آنياً للتخلص من المجاهيل A , B لنحصل:

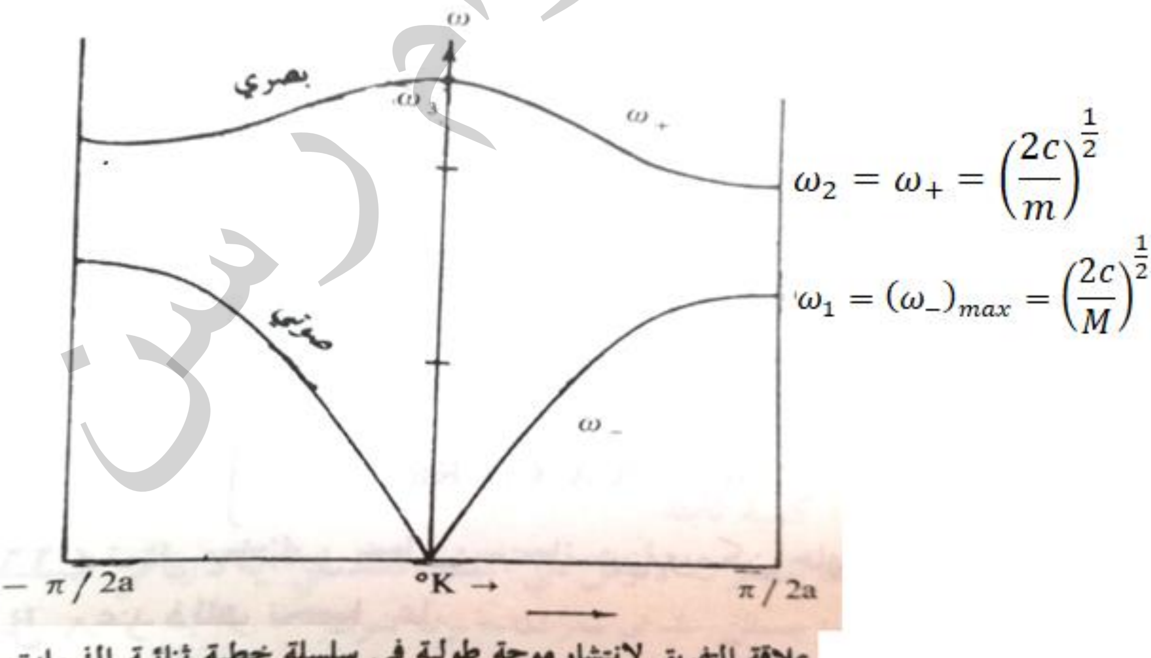
$$\therefore (2c-m\omega^2)(2c-M\omega^2)=4c^2\cos^2 Ka\ldots\ldots$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على علاقة التفريق بين متجه الموجة K والتردد الزاوي ω

$$\boldsymbol{\omega_{\pm}^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{حفظ} \quad (10)$$

المعادلة (10) تمثل علاقة التفريق لشبيكة خطية ثنائية الذرات.

الشكل التالي يوضح الفرع الصوتي (المنحني السفلي) والفرع البصري (العلوي) لسلسلة خطية ثنائية الذرات ويعود السبب في هذه التسمية الى طور تذبذب الذرات حيث يكون تذبذب الذرات المختلفة للأنماط الصوتية في طور واحد، بينما يكون فرق الطور بين تذبذب الذرات المختلفة مساويا ل (π) للأنماط البصرية.



علاقة التفريق لانتشار موجة طولية في سلسلة خطية ثنائية الذرات

يتضح من هذه المعادلة (10)

- ان التردد الزاوي هو دالة دورية لمتجه الموجة (K) ولما كانت قيمة (ω) كمية موجبة دائما، فان اية قيمة من قيم (ω^2) تؤدي الى قيمة واحدة لـ (ω) وهذا يعني وجود قيمتين للتردد الزاوي ω– ، ω+ لكل قيمة واحدة لمتجه الموجة (K) .
- وهذا يعني وجود فرعين لطيف اهتزاز سلسلة خطية ثنائية الذرات احدهما يمثل جميع الاختيارات لقيم (ω-) للمعادلة (10) اي مجاميع الانماط الصوتية ويدعى بالفرع الصوتي. والاخر يمثل جميع الاختيارات الموجبة لقيم (ω+) للمعادلة (10) اي مجاميع الانماط البصرية ويدعى بالفرع البصري.

الفرع الصوتي لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

الفرع الصوتي لشبيكة خطية ثنائية الذرات مشابه لمنحني التفريق في شبيكة خطية أحادية الذرات. ولكن توجد بعض الاختلافات الأساسية بين هذين المنحنين. في المعادلة (10) تعتمد (ω^2) على ($\sin^2 Ka$)

علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

$$\boldsymbol{\omega_{\pm}^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{\omega_{-}^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) - C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{للفرع الصوتي}$$

عند $\boldsymbol{K = \pm\frac{\pi}{2a}}$

$$\boldsymbol{\sin^2(Ka) = \sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2a}a\right) = \sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1}$$

$$\boldsymbol{\omega_{-}^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) - C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{\omega_{-}^2(k) = C\left(\frac{M+m}{mM}\right) - C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{\omega_{-}^2(k) = C\left(\frac{M+m}{mM}\right) - C\left(\frac{M-m}{mM}\right)}$$

عند $\left(\boldsymbol{K = \pm\frac{\pi}{2a}}\right)$ .... $\omega_1 = \omega_{-}(\mathrm{K}) = \left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$

اي ان قيمة (ω^2) يكون ضـــمن مدى لمتجه الموجه K من $\left(\frac{\pi}{2a}\right)$ الى $\left(-\frac{\pi}{2a}\right)$ للفرع الصـــوتي (الاختيار السالب) او الفرع البصري (الاختيار الموجب). وهذا المدى يمثل حدود منطقة برليون الاولى :

مدى منطقة برايون الاولى $\left(-\frac{\pi}{2a}\right) \le K \le \left(\frac{\pi}{2a}\right)$

وتقابل $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ لشـــبيكة خطية احادية الذرات. وهذا الاختلاف يعني ان مدى منطقة برليون الاولى يعتمد على دورية الشبيكة لان (دورية الشبيكة الاحادية هي "a" ودورية الشبيكة الثنائية هي "2a").

وعند تعويض عن قيمة $\left(K = \mp\frac{\pi}{2a}\right)$ في المعادلة (10) لغرض الحصـــول على اعظم قيمة ممكنة للتردد الزاوي ω_1 :

$$\omega_1 = (\omega_{-})_{max} = \left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (11)$$

نرى بوضوح ان اعظم تردد زاوي لاهتزازات الانماط الصوتية لا يعتمد على كتلة الذرة الصغيرة (m) بل يعتمد فقط على كتلة الذرة الكبيرة (M) حيث انه عند تساوي كتل ذرات السلسلة (m = M) تتحول الشبيكة الى شبيكة أحادية. اما المعنى الفيزياوي للمعادلة (11) فيمكن توضيحه من المعادلة (12) حيث نرى ان النسبة بين سعة الذرة الكبيرة (B) الى سعة الذرة الصغيرة (A) هي:

$$\frac{B}{A}=\left[\frac{2c-m\omega_-^2}{2c\cos(Ka)}\right] \quad \text{So} \quad \frac{B}{A}=\frac{2c\cos(Ka)}{2c-M\omega_-^2} \quad \text{.........} (12)$$

✓ وتقترب هذه النسبة من الواحد عندما تقترب قيمة (K) من الصفر وهذا يعني ان جميع الذرات الصغيرة والكبيرة في السلسلة تتحرك بالاتجاه نفسه او بالطور نفسه في منطقة الترددات الواطئة او الاطوال الموجية الطويلة. وبهذا نجد ان الموجات الصوتية تحقق الشروط التالية:

$$|K|\ll\frac{\pi}{2a} \qquad v_o=\left[\frac{2Ca^2}{M+m}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \omega=Kv_o\ll\left[\frac{2C}{M}\right]^{\frac{1}{2}}$$

متجه الموجة **السرعة** **التردد الزاوي**

✓ ولكن عندما تكون قيم (K) صغيرة بحيث يمكن التعويض عن قيمة $\sin^2(Ka)$ في المعادلة 10 بقيمة (K^2a^2) فان التردد الزاوي ω_- يتناسب طرديا مع قيمة متجه الموجه (K) عندئذ تكون سرعة انتشار الموجه الصوتية (V_0) كمية ثابتة وكأن الانتشار في وسط مرن مستمر اي ان

$$\omega_-\cong\left(\frac{2c}{m+M}\right)^{1/2}Ka \qquad V_0=\frac{\omega_-}{K}=\left(\frac{2c}{m+M}\right)^{1/2}a \quad \text{.............}(13)$$

وكلما زادت قيمة (K) تزداد قيم ω_-) ولكن بنســـب متفاوتة اي ان زيادة قيمة (K) بنسب معينة ما تسبب في زيادة قيمة (ω_-) ولكن بنسبة اقل، لان العلاقة ليست خطية بل تعتمد على (Sin Ka) اي ان نسبة السعات ستزداد بازدياد (K).

وعند الوصول الى اقصى قيمة لمتجه الموجه (حدود منطقة برليون) $\left(\mp\frac{\pi}{2a}\right)$ فان (ω_-) تقترب من (ω_1) وبذلك تقترب السعات $\left(\frac{B}{A}\right)$ من اللانهاية وتقترب سرعة المجموعة من الصفر اي ان:

$$K=\mp\frac{\pi}{2a} \qquad \omega_1\rightarrow(\omega_-)_{max}=\left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{B}{A}=+\infty$$

$$\frac{\omega}{K}=\left(\frac{8\,ca^2}{\pi^2 M}\right)^{1/2}, \qquad \frac{d\omega}{dK}=0 \quad \text{.....................}(14)$$

يمكن تفسير المعادلة (14) فيزيائيا كالاتي:

- عند بلوغ اعلى تردد زاوي للأنماط الصوتية (ω_1) فان اهتزاز الذرة الصغيرة (m) يضمحل وتصبح سعة اهتزازها (A) تساوي صفر اي تتوقف عن الحركة بغض النظر عن قيمة سعة اهتزاز الذرة الكبيرة (B) ولذلك لا تعتمد (ω_1) على كتلة الذرة الصغيرة بل تعتمد على كتلة الذرة الكبيرة وثابت القوة (c).

- من جهة اخرى لما كانت ســـرعة المجموعة تســـاوي صـــفر عند اعلى قيمة للتردد الزاوي معنى ذلك ان الموجه المنتقلة قد اصبحت واقفة وتنعكس بزاوية (180) بموجب قانون براك للحيود

ان المنطقة الفاصلة بين الفرع الصوتي والبصري في الشكل السابق هي منطقة التردد المحظور او الطاقة المحضورة، بسبب عدم وجود قيم ل ω_- اكبر من ω_1.

الفرع البصري لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

ان الفرع البصـري يشـمل جميع الترددات الزاوية (ω_+) في الشـكل السـابق والحاصـلة من الاختيارات الموجبة للمعادلة (10). **علاقة التفريق لشبيكة خطية ثنائية الذرات:**

$$\omega_\pm^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$ **للفرع البصري**

عندما $K \cong 0$ فان التردد الزاوي (ω_3) يكون اعظم ما يمكن والانماط الصوتية = صفر اي عندما

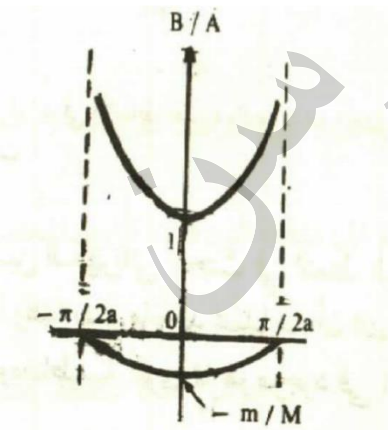
$$\left.\begin{aligned} &K \Rightarrow 0, \quad \omega_+ \rightarrow \omega_3 = \left[2c\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]^{1/2} \\ &\frac{\omega}{K} \rightarrow \infty, \quad \frac{d\omega}{dK} \Rightarrow 0, \quad \frac{B}{A} \rightarrow -\frac{m}{M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(15)$$

وهذا يعني ان للأطوال الموجيه الطويلة ذات الاهتزاز البصـــري تتحرك الذرات المتجاورة باتجاهات متعاكســـة او بفرق طور (π) بحيث ان مركز الكتلة لأية ذرتين متجاورتين يبقى ســـاكنا اي كأن الجزيئة الثنائية في كل خلية تهتز بصورة مستقلة عن جيرانها من الجزيئات مع بقاء مركز الخلية ساكناً.

ان نسبة السعات $\left(\frac{B}{A}\right)$ تبقى سالبة خلال الفرع البصري ولكنها تقترب من الصفر عندما تقترب قيمة (K) من اعظم قيمة لها $\left(\frac{\pi}{2a}\right)$ وتقترب (ω_+) من اقل تردد زاوي (ω_2) حيث يكون طول الموجه اقصــر ما يمكن ($4a = \lambda$).

$$K = \frac{\pi}{2a} \qquad \omega_2 = \omega_+ = \left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{B}{A} = 0$$

$$\frac{\omega}{K} = \left(\frac{8ca^2}{\pi^2 m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \frac{d\omega}{dk} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$



ان نسبة السعات اصبحت صفرا في هذه الحالة وهذا يعني ان سعة اهتزاز الذرة الكبيرة (B) اصـبحت صـفرا بغض النظر عن سـعة اهتزاز الذرة الصــغيرة (A) اي ان الذرة الكبيرة توقفت عن الحركة ولذلك تعتمد ω_2 فقط على كتلة الذرة الصغيرة (m) وثابت القوة (c).

- ❖ في هذا الشـكل نلاحظ ان النسـبة بين سـعات الذرات المختلفة الكتلة لأنماط الاهتزاز الصــوتية تتغير من واحد (للموجات الطويلة جدا) الى مالا نهاية (لأقصر موجه ممكنة).
- ❖ بينما تتغير هذه النســبة لأنماط الاهتزاز البصــرية من $\left(\frac{-m}{M}\right)$ (للموجات الطويلة جدا) الى صفر(لأقصر طول موجه ممكنة).
- ❖ ان النمط البصــري يظهر انبعاثـاً او امتصـــاصـــا للموجـات الكهرومغناطيسية اقوى مما هو موجود في النمط الصوتي.
- ❖ يمكن اثارة الانماط البصــرية بوســاطة المجال الكهربائي لموجه ضوئية. وللسبب نفسه تعود تسمية هذه الانماط بالأنماط البصرية.

❖ نعود الى المنطقة المحضورة، ان عرض هذه المنطقة يعتمد على نسبة كتل الذرتين $\left(\frac{m}{M}\right)$. فعند تقارب كتل الذرتين تضيق منطقة الترددات المحضورة ثم تنعدم هذه المنطقة عندما $(\omega_1 = \omega_2)$ عندما تتساوى كتل هاتين الذرتين والعكس صحيح حيث يزداد عرض المنطقة بازدياد نسبة كتلتيهما $\left(\frac{m}{M}\right)$.

❖ ان مدى الترددات للفرع البصري $(\omega_3\text{-}\omega_2)$ يعتمد على نسبة الكتل $\left(\frac{m}{M}\right)$ فعند تقارب كتل الذرتين تضيق منطقة الترددات المحضورة ليتسع مدى ترددات الفرع البصري وتكون $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ حوالي 40% أكبر من ω_2.

وتتقيد جميع اهتزازات الفرع البصري في مدى ضيق جداً ذات تردد زاوي مقارب الى (ω_2) وهذا يعني ان التردد الزاوي للفرع البصري لا يعتمد على متجه الموجه تقريبا وان $\left(\frac{d\omega}{dK}\right)$ تكون مقاربة للصفر.

أسئلة ومسائل

س) عرف: - الفونون، تردد القطع، سرعة الطور، سرعة المجموعة، تشتت برليون (استطارة برليون)، الفونونات المهيجة حراريا.

س) علل ما يأتي:

1- في تشتت او استطارة برليون يكون التغير في طاقة الفوتون تكون صغيرة جدا؟

ج) بسبب الفرق الكبير بين سرعة الموجه الصوتية في البلوة $(v_{S.})$ وسرعة الفوتون او الموجه الكهرومغناطيسية c (سرعة الضوء) فان التغير في طاقة الفوتون تكون صغيرة جدا ولذلك تكون طاقة الفونون المتولد او الممتص صغيرة جدا

2- علل: في تشتت او استطارة برليون تكون طاقة الفونون المتولد او الممتص صغيرة جدا؟

ج) بسبب الفرق الكبير بين سرعة الموجه الصوتية في البلوة $(v_{S.})$ وسرعة الفوتون او الموجه الكهرومغناطيسية c (سرعة الضوء) فان التغير في طاقة الفوتون تكون صغيرة جدا ولذلك تكون طاقة الفونون المتولد او الممتص صغيرة جدا

3- علل: يفضل النيوترون على الفوتون عند دراسة طيف الفونون؟

يعد تزحزح تردد (طاقة) فوتون الاشعة السينية نتيجة استطارته غير المرنة صغير جدا مقارنة بتزحزح طاقة النيوترونات المستطيره مع الفونون لذلك يفضل النيوترون على الفونون عند دراسة طيف الفونون (العلاقة بين تردده الزاوي ومتجه موجته) في المواد الصلب. حيث يمكن قياس تزحزح طاقة النيوترون بصورة مباشرة بينما تصعب قياس التزحزح الصغير في حزمة الاشعة السينية المستطيره.

4- علل: سرعة المجموعة هي الأكثر أهمية فيزيائياً من سرعة الطور؟

الجواب: وبما ان الطاقة والزخم تنقل عملياً بواسطة النبضات وليس الموجات النقية لذا فان سرعة المجموعة هي الأكثر أهمية فيزيائياً.

سؤال 1 في كتاب فيزياء الحالة الصلبة د. مؤيد جبرائيل:

س1) فوتون ضوئي طول موجته في الفراغ $5*10^{-7}$ m يستطير بواسطة بلورة معامل انكسارها 1.5 وسرعة الصوت فيها $4.5*10^{3}$ m/s احسب. 1-اقصى تردد زاوي ومتجه موجة الفونون المتولد عن هذه الاستطارة؟. 2- اقصى تغير نسبي للتردد الزاوي للفوتون نتيجة الاستطارة؟

(1)

$$\omega_o \cong 2v_s\omega nc^{-1}\sin\frac{\emptyset}{2} \quad \& \quad \omega_{omax} \cong 2v_s\omega nc^{-1} \quad \& \quad \sin\frac{\emptyset}{2} = \sin\left(\frac{180}{2}\right) = 1$$

ω_o تردد الفونون المنبعث & ω الترردد الزاوي لمتجه الفوتون الساقط

v_s سرعة الموجه الصوتية & c سرعة الضوء & $\emptyset$ تمثل زاوية الاستطارة

$$\omega = 2\pi f = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)$$

$$\omega_o \cong \frac{2v_s\omega n}{c} = \frac{2v_s n}{c}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) = \frac{4\pi v_s n}{\lambda}$$

$$= \frac{4\times\pi\times4.5\times10^{3}\times1.5}{5\times10^{-7}} = 16.9\times10^{10}\ \text{Hz} = 1.69\times10^{11}\ \text{Hz}$$ **اقصى تردد زاوي**

(2)

$$v_sK \cong 2v_s\omega nc^{-1}\sin\frac{\emptyset}{2}$$ K يمثل متجه موجة الفونون

$$K \cong 2\omega nc^{-1}\sin\frac{\emptyset}{2}$$

$$K \cong 2\omega nc^{-1} = \frac{2\omega n}{c} = \frac{2n}{c}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) = \frac{4\pi n}{\lambda}$$

$$= \frac{4\times3.14\times1.5}{5\times10^{-7}} = 37.68\times10^{6}\ \text{m}^{-1}$$ متجه موجة الفونون المتولد نتيجة الاستطارة

2) ان اقصى تغير نسبي لتردد الفوتون (الضوء المرئي) في هذه العملية نتيجة استطارته استطارة غير مرنة هو

$$\frac{\omega-\omega'}{\omega} = \frac{\omega_o}{\omega} \cong 2v_snc^{-1} \qquad \frac{\omega_o}{\omega} \cong \frac{2v_sn}{c} = \frac{2\times4.5\times10^{3}\times1.5}{3\times10^{8}} = 45\times10^{-6}$$

ولهذا قلنا بان تزحزح تردد (طاقة) فوتون الاشعة السينية نتيجة استطارته غير المرنة يكون صغير جدا. حيث يصعب قياس التزحزح الصغير في حزمة الاشعة السينية المستطيره.

س2) لشبيكة خطية أحادية الذرات وعند منطقة الأمواج الطويلة اثبت ان: $\omega \approx \mp\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}Ka$

الجواب:

ان التناسب بين التردد الزاوي (ω) ومتجه الموجهK لقيم صغيرة جداً اي ان (Ka<< 1) (أي عند منطقة اطياف موجات طويلة) ويماثل ذلك للموجات المرنة في وسط مستمر متجانس اي ان:

$$\omega = \mp2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right) \ldots$$ علاقةالتفريق ... (3)

وبما ان قيمة K صغيرة جدا فعليه تكون الزاوية $\left(\frac{ka}{2}\right)$ ستكون صغيرة جدا وعند ذلك سيكون جيب الزاوية يساوي الزاوية

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right)$$ .... عندما تكون الزاوية صغيرة

$$\omega \approx \mp2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ka}{2}\right) \qquad \omega \approx \mp\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}Ka \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

س3) لشبيكة خطية أحادية الذرات وعند منطقة الأمواج الطويلة اثبت ان: $\omega \approx V_o K$

عندما يكون $Ka << 1$ فان $K << \frac{1}{a}$ أو $\lambda >> a$

أي عند (منطقة اطياف موجات طويلة) ولذلك تتناسب (ω) خطيا مع K تقريبا اي ان:

$$\omega = \mp 2 (\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \ldots \text{ علاقةالتفريق } \ldots (3)$$

وبما ان قيمة K صـــغيرة جدا فعليه تكون الزاوية $\left(\frac{ka}{2}\right)$ ســتكون صــغيرة جدا وعند ذلك ســيكون جيب الزاوية يساوي الزاوية

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ عندما تكون الزاوية صغيرة}$$

$$\omega \approx \mp 2 \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{ka}{2}\right) \qquad \omega \approx \mp \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka = 2\pi\nu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ν = نيو (Nu) يمثل تردد الموجه التي طولها λ.

$$\lambda\nu = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} a = V_\circ \qquad \omega \approx \mp \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka = V_\circ K \qquad \omega \approx V_o K$$

س 4) سلسلة ذرية خطية احادي الذرات ذات مسافة بينية ($a=3*10^{-10}$ m) فاذا كانت سرعة الصوت تساوي 300 m/sec ، احسب تردد القطع؟

$$\omega = \mp 2 (\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \text{ علاقةالتفريق } \ldots\ldots\ldots. (3)$$

وجود قيمة عظمى للتردد الزاوي (ω_m) عندما تكون قيم K تساوي $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ او مضاعفاتها الفردية وهذا يعني ان هناك حد اعلى او قطع لتردد الموجات المرنة (الصوتية) في المواد الصلبة.

$$\omega = \mp 2 (\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \mp 2 (\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi a}{2a}\right)$$

$$= \mp 2 (\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \& \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\omega_m = 2 \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots. (4) \quad \text{(اعلى تردد) او (تردد القطع)}$$

$$\because \ V_\circ = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} a \qquad \frac{V_\circ}{a} = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \omega_m = 2 \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{V_\circ}{a}\right)$$

$$\omega_m = 2\left(\frac{V_\circ}{a}\right) = 2 \times \left(\frac{300}{3 \times 10^{-10}}\right) = 2 \times 10^{12} \ (S^{-1})$$

طـريـقـة أخـرى لـلـحـل الســؤال الـرابـع س4:

$\omega = \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$ ……… علاقةالتفريق ……… (3)

الـقـيـمـة الـعـظـمـى لـلـتـردد الـزاوي …………… $\omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$

$\omega = \mp\omega_m \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$ ……… علاقةالتفريق ……… (3)

بالنسـبة للموجات ذات الاطوال الموجية الكبيرة (أي عندما تكون λ كبيرة) (بعبارة أخرى عندما تكون K صغير) تنتقل ترددات هذه الموجات خلال الشبيكة، بينما الترددات الأخرى سوف تتلاشى بسرعة وبذلك تعمل الشـبيكة عمل مرشـح ميكانيكي للتخلص من الترددات الواطئة. وبما ان قيمة K صـغيرة جدا فعليه يمكن اعتبار جيب الزاوية مساوياً للزاوية أي ان:

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\omega = \omega_m\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{\omega_m a}{2}\right)k \qquad \because\ \omega = V_o k \qquad \therefore\ V_o = \frac{\omega_m a}{2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\omega_m = \frac{2V_o}{a}} \qquad \omega_m = 2\left(\frac{V_\circ}{a}\right) = 2\times\left(\frac{300}{3\times10^{-10}}\right) = 2\times10^{12}\ (S^{-1})$$

س5) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع الصوتي_ω ، اثبت ان علاقة التفريق عند $\left(K = \pm\frac{\pi}{2a}\right)$ تصبح:

اعظم قيمة ممكنة للتردد الزاوي في الفرع الصوتي $\boldsymbol{\omega_1 = (\omega_-)_{max} = \left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}}}$

الجواب:

علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

$$\omega_\pm^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

$$\omega_-^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) - C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$ للفرع الصوتي

عند $K = \pm\frac{\pi}{2a}$

$$\sin^2(Ka) = \sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2a}a\right) = \sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm1$$

$$\omega_-^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) - C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_-^2(k) = C\left(\frac{M+m}{mM}\right) - C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_-^2(k) = C\left(\frac{M+m}{mM}\right) - C\left(\frac{M-m}{mM}\right) \qquad \therefore\ \omega_1 = \omega_-^2(K) = \left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

س6) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع الصوتي ω_- ، اثبت ان: $K = 0$ عندما $\omega = 0$

تمثل علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات $\omega_{\pm}^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$

وللفرع الصوتي نستعمل (ω_-) $at\ (K=0)$

$$\omega_-^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) - C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - 0\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_-^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) - C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) = 0$$

س7) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع البصري ω_+ ، اثبت ان علاقة التفريق تصبح:

$$\boldsymbol{\omega_3 = \omega_{+max} = \left[2C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$ **عندما** $\boldsymbol{K = 0}$

علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

$$\omega_{\pm}^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$ للفرع البصري

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - 0\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$$

$$\omega_+^2(k) = \left[2C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]$$

$$\omega_3 = \omega_+(k) = \left[2C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

س8) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع البصري ω_+ ، اثبت ان علاقة التفريق تصبح:

$$\boldsymbol{K = \mp\frac{\pi}{2a}}$$ **عندما** $$\boldsymbol{\omega_2 = \omega_+ = \left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

$$\omega_{\pm}^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$ للفرع البصري

$K = \pm\frac{\pi}{2a}$ عند $\sin^2(Ka) = \sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2a}a\right) = \sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{M+m}{mM}\right) + C\left(\frac{M-m}{mM}\right) = \frac{2C}{m}$$ $$\omega_2 = \omega_+ = \left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}1$$