الفصل الخامس

الاهتزاز القسري Forced Oscillation

1.5 الاهتزاز القسري (الإجباري)

2.5 معادلة الحركة للاهتزاز القسري

3.5 حل معادلة الحركة للاهتزاز القسري

4.5 الرنين

5.5 سعة الاهتزاز القسري عند الرنين

6.5 أمثلة عملية على الرنين

1.5 الاهتزاز القسري (الإجباري)

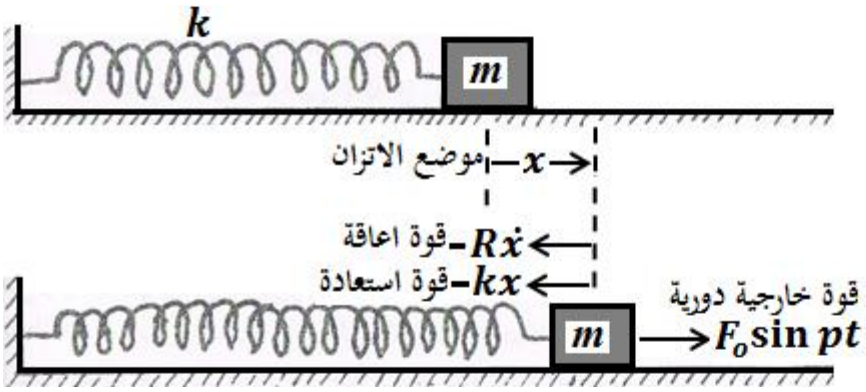
ناقشنا في الفصل الثاني الحركة التوافقية البسيطة والتي عرفت على انها حركة الجسم الناشئة بسبب قوة استعادة متناسبة خطيا مع مقدار الإزاحة عن موضع الاتزان ويكون اتجاهها دائما باتجاه موضع الاتزان، وتم إهمال تأثير أية قوى أخرى (اهتزاز حر)، وتردد الاهتزاز في هذه الحالة يسمى بالتردد الطبيعي (Natural frequency, ω_o)، وكانت الطاقة الكلية للجسم محفوظة. لاحظنا في الفصل الرابع ان الحركة التوافقية البسيطة هي حالة مثالية، فبالإضافة لقوة الاستعادة التي تسبب الحركة هناك قوى أخرى تحاول ان تعرقل (تقاوم) حركة الجسم، ولكي يستمر الجسم في حركته لابد من ان يبذل شغلا ليتغلب على قوى الإعاقة وهذا الشغل المبذول يكون على حساب الطاقة الكلية للجسم ولا يمكن استرداده، وبالنتيجة تتناقص طاقة الجسم مع مرور الزمن إلى ان يتوقف عن الحركة تماما (اهتزاز توافقي مضمحل)، ولكي يستمر الجسم في حركته الاهتزازية لابد من تسليط قوة خارجية دورية تعوض الفقد الحاصل في طاقة المهتز وتسمى حركة الجسم في هذه الحالة بالاهتزاز القسري (Forced Oscillations). من ذلك يمكننا تعريف الاهتزاز القسري بانه **حركة الجسم بتأثير قوة خارجية دورية تعمل على تعويض الفقد الحاصل في طاقة المهتز نتيجة لتأثير القوى المعيقة لحركته.**

تعتبر حركة الأرجوحة من ابسط تطبيقات الاهتزاز القسري، فالأرجوحة المهتزة اذا ما تركت وشأنها فإنها سوف تتوقف عن الاهتزاز بعد فترة لن تطول وذلك بسبب الفقدان المستمر للطاقة نتيجة الاحتكاك، ولكن اذا ما أعطيت دفعات صغيرة متعاقبة وعلى فترات زمنية مناسبة فانها سوف تستمر في الاهتزاز نتيجة التعويض المستمر للطاقة المفقودة، ومن الأمثلة الأخرى اهتزاز الجسر تحت ضربات أقدام طابور عسكري عند العبور، اهتزاز هيكل السيارة نتيجة الضربات الدورية للمكابس داخل أسطوانة الاحتراق، واهتزاز الآلات الموسيقية بأنواعها الوترية والهوائية وذات الأغشية الرقيقة عند الإثارة الميكانيكية أو الكهربائية.

ان مسألة الاهتزاز القسري هي مسألة عامة في الفيزياء، و حل هذه المسألة لا تقتصر فائدتها على الحركات الاهتزازية والموجية فقط بل يتعداها إلى مجالات أخرى مختلفة مثل الصوتيات، دوائر التيار المتناوب و الفيزياء الذرية.

2.5 معادلة الحركة للاهتزاز القسري

نفرض ان لدينا جسم كتلته (m) متصل بطرف نابض حلزوني ثابته (k) موضوع على سطح أفقي املس ومثبت طرفه الآخر بإحكام، عند إزاحة الجسم إزاحة بسيطة (x) وتركه فان الجسم سيتحرك بتأثير قوة الاستعادة $(-kx)$ ويعاني اثناء حركته من قوة اعاقة مع الهواء المحيط $(-R\dot{x})$، وللتعويض عن فقدان الطاقة الناتجة من قوة الإعاقة نفرض انه تم تسليط قوة خارجية دورية مقدارها $(F_o \sin pt)$ باتجاه الازاحة الآنية، حيث (p) هو التردد الزاوي للقوة الخارجية كما هو موضح بالشكل التالي:



من الشكل نلاحظ ان محصلة القوى المؤثرة على الجسم تعطى بالعلاقة:

$$\sum F = -R\dot{x} - kx + F_o \sin pt$$

لإيجاد معادلة الحركة نقوم بتطبيق قانون نيوتن الثاني ومنه نحصل على:

$$m\ddot{x} = -R\dot{x} - kx + F_o \sin pt$$

بقسمة على الكتلة وترتيب الحدود نحصل على:

$$\ddot{x} + \frac{R}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m} \sin pt$$

$$let \quad \frac{R}{m} = 2r \ , \ \frac{k}{m} = \omega_o^2 \quad , \quad f_o = \frac{F_o}{m}$$

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = f_o \sin pt$$

المعادلة الأخيرة تمثل معادلة الحركة للمهتز التوافقي القسري، وهي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية وغير متجانسة.

3.5 حل معادلة الحركة للاهتزاز القسري

ان الحل العام (دالة الإزاحة الآنية $x_{(t)}$) للمهتز التوافقي القسري يعطى بالصيغة:

$$x_{(t)} = x_{h(t)} + x_{i(t)}$$

حيث تمثل $x_{h(t)}$ الحل العام للجزء المتجانس من معادلة الحركة $(\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = 0)$ والتي سبق ان ناقشناها في الفصل السابق (الاهتزاز المضمحل)، اما $x_{i(t)}$ فتمثل الحل الخاص للجزء غير المتجانس.

نفرض ان الحل الخاص للجزء غير المتجانس معرف بالصيغة:

$$x_i = A \sin(pt + \emptyset)$$

حيث تمثل $A , \emptyset$ ثوابت .

بما ان x_i تمثل حل لمعادلة الحركة القسرية (بالفرض) لذا فانها تحققها، ولأجل ذلك نجد $(\dot{x}, \ddot{x})$ ونعوضها في معادلة الحركة وكما يلي:

$$\dot{x} = Ap \cos(pt + \emptyset)$$

$$\ddot{x} = -Ap^2 \sin(pt + \emptyset)$$

بالتعويض عن $(\dot{x}, \ddot{x})$ في معادلة الحركة $(\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = f_o \sin pt)$ نحصل على:

$$-Ap^2 \sin(pt + \emptyset) + 2rAp \cos(pt + \emptyset) + \omega_o^2 A \sin(pt + \emptyset) = f_o \sin pt$$

$$(-Ap^2 + \omega_o^2 A) \sin(pt + \emptyset) + 2rAp \cos(pt + \emptyset) = f_o \sin pt$$

بترتيب الحدود نحصل على:

$$A(\omega_o^2 - p^2) \sin(pt + \emptyset) + 2rAp \cos(pt + \emptyset) = f_o \sin pt$$

المعادلة الأخيرة يمكن تبسيطها باستعمال مفكوك جيب وجيب تمام حاصل جمع زاويتين:

$$\sin(pt + \emptyset) = \sin pt \cos \emptyset + \cos pt \sin \emptyset$$

$$\cos(pt + \emptyset) = \cos pt \cos \emptyset - \sin pt \sin \emptyset$$

بالتعويض نحصل على:

$$A(\omega_o^2 - p^2) [\sin pt \cos \emptyset + \cos pt \sin \emptyset] + 2rAp [\cos pt \cos \emptyset - \sin pt \sin \emptyset] = f_o \sin pt$$

بترتيب الحدود نحصل على:

$$[A(\omega_o^2 - p^2) \cos \emptyset - 2rAp \sin \emptyset] \sin pt + [A(\omega_o^2 - p^2) \sin \emptyset + 2rAp \cos \emptyset] \cos pt = f_o \sin pt$$

بمساواات معاملي $\sin pt$ و $\cos pt$ بين طرفي المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$A(\omega_o^2 - p^2) \cos \emptyset - 2rAp \sin \emptyset = f_o \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$A(\omega_o^2 - p^2) \sin \emptyset + 2rAp \cos \emptyset = 0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

نقوم بحل المعادلتين (1) و (2) لإيجاد الثابتين $A, \emptyset$ وكما يلي:

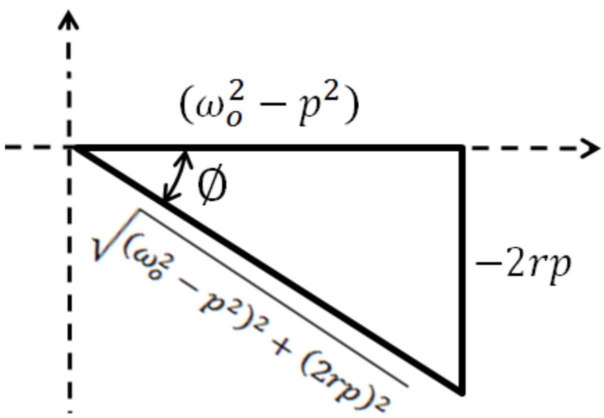
بقسمة طرفي المعادلة (2) على A وترتيب الحدود نحصل على:

$$(\omega_o^2 - p^2) \sin \emptyset = -2rp \cos \emptyset$$

بالقسمة على $[(\omega_o^2 - p^2) co\, \emptyset]$ نحصل على:

$$\tan \emptyset = \left(\frac{-2rp}{\omega_o^2 - p^2}\right) \longrightarrow \emptyset = \tan^{-1}\left(\frac{-2rp}{\omega_o^2 - p^2}\right)$$

العلاقة الأخيرة يمكن تمثيلها بالشكل المجاور ، ومنه يمكننا استنتاج العلاقتين:



$$\sin \emptyset = \frac{-2rp}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

$$\cos \emptyset = \frac{(\omega_o^2 - p^2)}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

من المعادلة (1) لدينا:

$$A = \frac{f_o}{(\omega_o^2 - p^2)\cos\emptyset - 2rp\sin\emptyset}$$

بالتعويض عن $\sin\emptyset$ و $\cos\emptyset$ نحصل على:

$$A = \frac{f_o}{(\omega_o^2 - p^2)\dfrac{(\omega_o^2 - p^2)}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} - 2rp\dfrac{(-2rp)}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}}$$

بتوحيد المقامات وترتيب الحدود نحصل على:

$$A = \frac{f_o}{\dfrac{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}} = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

وبعد إيجاد قيمة الثابتين $A\,,\emptyset$ فان الحل الخاص يمكن التعبير عنه بالصيغة:

$$x_i = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}\sin(pt + \emptyset)$$

العلاقة الأخيرة تمثل الحل الخاص للجزء غير المتجانس حيث $\emptyset$ ثابت يعطى بالصيغة:

$$\emptyset = \tan^{-1}\left(\frac{-2rp}{\omega_o^2 - p^2}\right)$$

بعد إيجاد الحل الخاص$\left[x_{h(t)}\right]$ فان الحل العام لمعادلة المهتز القسري $\left[x_{(t)} = x_{h(t)} + x_{i(t)}\right]$ يمكن التعبير عنه بثلاث حالات مختلفة تبعا لقيمة ثابت الاضمحلال (r) قياسا بالتردد الطبيعي (ω_o) وكما يلي:

أولاً: في حالة كون $(r < \omega_o)$ فان الحل العام للاهتزاز القسري يكون بالصيغة:

$$x_{(t)} = Ce^{-rt}\sin(\omega t + \theta) + \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}\sin(pt + \emptyset)\ ,\omega = \sqrt{\omega_o^2 - r^2}$$

ثانياً: في حالة كون $(r > \omega_o)$ فان الحل العام للاهتزاز القسري يكون بالصيغة:

$$x_{(t)} = e^{-rt}\left[C_1 e^{\sqrt{r^2 - \omega_o^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{r^2 - \omega_o^2}\,t}\right] + \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}\sin(pt + \emptyset)$$

ثالثاً: في حالة كون $(r = \omega_o)$ فان الحل العام للاهتزاز القسري يكون بالصيغة:

$$x_{(t)} = (C_1 + C_2 t)e^{-rt} + \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}\sin(pt + \emptyset)$$

يلاحظ ان الحل العام في الحالات الثلاث يتكون من مجموع حدين، الحد الأول يمثل حل الحالة المضمحلة التي تتبع لها الحركة (بغياب القوة الخارجية) والتي قد تكون اما زائدة أو ناقصة أو حرجة الاضمحلال

وتتضمن ثوابت اختيارية (C, θ, C_1, C_2) والتي يتم تحديدها بتطبيق الشروط الابتدائية وحسب نوع الاضمحلال ويسمى الحد الاول بالحد الزائل (او العابر Transient) وذلك لان هذا الحد (الإزاحة الآنية للحالة المضمحلة) سرعان ما يزول مع مرور الزمن (اهتزاز مضمحل)، اما الحد الثاني فهو نفسه في الحالات الثلاث، ويلاحظ انه لا يعتمد على الحالة الابتدائية للحركة (لا يحتوي ثوابت اختيارية)، ويسمى هذا الحد بحد الحالة المستقرة (steady–state). عند دراسة الاهتزاز القسري يهمل عادة الجزء العابر من الحل العام بعد مرور فترة زمنية قصيرة من بدأ الاهتزاز، ويتركز الاهتمام بعد ذلك على حل الحالة المستقرة الذي يتحكم تماما بسلوك المهتز.

4.5 الرنين، التردد الرنيني وسعة الاهتزاز عند الرنين

تعتبر ظاهرة الرنين (Resonance) من الظواهر المهمة في الفيزياء ولها تطبيقات واسعة في مجالات مختلفة مثل الاهتزازات الميكانيكية، الصوت، الفيزياء النووية، البصريات، المغناطيسية ودوائر التيار المتناوب.

الرنين هي حالة خاصة من الاهتزاز القسري وتحدث عندما يكون تردد قوة خارجية المسلطة قريبة من التردد الطبيعي للجسم المهتز وعندها تكون سعة الاهتزاز القسري في قيمتها القصوى.

التردد الرنيني هو تردد القوة الخارجية المسلطة التي تحدث عندها ظاهرة الرنين، ويمكن اشتقاق الصيغة الرياضية الخاصة بالتردد الرنيني وكما يلي:

ان دالة الإزاحة الآنية للمهتز القسري في الحالة المستقرة تعطى بالصيغة:

$$x = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} sin(pt + \emptyset) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

حيث تمثل ω_o التردد الطبيعي، r ثابت الاضمحلال، p تردد القوة الخارجية المسلطة، f_o و $\emptyset$ ثوابت.

المعادلة (1) يمكن كتابتها بالصورة:

$$x = A\, sin(pt + \emptyset) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

حيث A تمثل سعة الاهتزاز القسري والتي تعرف بالصيغة:

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

لإيجاد صيغة التردد الرنيني نبحث عن قيمة تردد القوة الخارجية $(p = p_r)$ الذي يجعل سعة الاهتزاز في قيمتها القصوى $(A = A_{max})$.

من ملاحظة معادلة سعة الاهتزاز (المعادلة 3) ان سعة الاهتزاز تكون في قيمتها العظمى عندما يكون المقام في قيمته الصغرى، ولتبسيط التعامل الرياضي نفرض ان:

$$y = (\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2$$

وبالنتيجة المعادلة (3) يمكن كتابتها بالصورة:

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{y}}$$

من العلاقة الأخيرة نجد ان السعة تكون قيمتها العظمى عندما تكون الكمية (y) في قيمتها الصغرى.

نبحث الآن في قيمة (p) التي تجعل (y) في قيمتها الصغرى، ولتحقيق ذلك نستفيد من بعض المفاهيم الرياضية المتعلقة بإيجاد النهايات العظمى والصغرى للدوال، ويتم ذلك بالتسلسل التالي:

1- يتم أولا إيجاد نقاط الانقلاب للدالة $[y = f(p)]$ وهي نقاط تمثل جذور المعادلة $\left(\frac{dy}{dp} = 0\right)$ اي ايجاد قيم(p) التي تجعل المشتقة الاولى مساوية للصفر، وقيم (p) في هذه الحالة هي التي تجعل(y) في نهايتها العظمى او الصغرى (نقاط انقلاب).

2- لتحديد كون نقطة الانقلاب نهاية عظمى ام صغرى يتم اختبار إشارة المشتقة الثانية $\left(\frac{d^2y}{dp^2}\right)$ عند نقطة الانقلاب، فاذا كانت اشارة المشتقة الثانية موجبة$\left(\frac{d^2y}{dp^2} > 0\right)$ فالنقطة تمثل نهاية صغرى، واذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة فالنقطة تمثل نهاية عظمى$\left(\frac{d^2y}{dp^2} < 0\right)$.

نجد أولا المشتقة الأولى:

$$y = (\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2$$

$$\frac{dy}{dp} = 2(\omega_o^2 - p^2)(-2p) + 2(2rp)(2r)$$

$$\frac{dy}{dp} = -4p(\omega_o^2 - p^2) + 8r^2p$$

$$\frac{dy}{dp} = -4p\omega_o^2 + 4p^3 + 8r^2p$$

نساوي دالة المشتقة بالصفر ونجد جذورها (قيم p التي تجعل المشتقة تساوي صفر):

$$\frac{dy}{dp} = 0$$

$$-4p\omega_o^2 + 4p^3 + 8r^2p = 0$$

$$4p(-\omega_o^2 + p^2 + 2r^2) = 0$$

بالقسمة على (4) نحصل على:

$$p(-\omega_o^2 + p^2 + 2r^2) = 0$$

اما $p = 0$

او $(-\omega_o^2 + p^2 + 2r^2) = 0$

ان الاحتمال $(p = 0)$ يهمل لان القوة الخارجية المسلطة هي دورية (تردد صفر يعني ان القوة الخارجية ثابتة القيمة اي لا تتغير مع الزمن)، من الجذر الثاني لدينا:

$$p^2 = \omega_o^2 - 2r^2$$

$$p = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}$$

نبحث الآن في كون الحالة $\left(p = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}\right)$ نهاية عظمى ام صغرى ويتم ذلك باختبار اشارة المشتقة الثانية عند تلك النقطة، ولذلك نجد اولا المشتقة الثانية وكما يلي:

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4\omega_o^2 + 12p^2 + 8r^2$$

نعوض عن $\left(p = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}\right)$ في معادلة المشتقة الثانية فنحصل على:

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4\omega_o^2 + 12(\omega_o^2 - 2r^2) + 8r^2$$

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4\omega_o^2 + 12\omega_o^2 - 24r^2 + 8r^2 = 8\omega_o^2 - 16r^2$$

$$\frac{d^2y}{dp^2} = 8(\omega_o^2 - 2r^2)$$

$$\frac{d^2y}{dp^2} > 0$$

وبما ان شارة المشتقة الثانية موجبة عند$\left(p = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}\right)$ لذا فان النقطة تمثل نهاية صغرى، اي ان $(y = y_{max})$ عندما $\left(p = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}\right)$ ، اي ان السعة تكون في قيمتها القصوى عند ذلك التردد، ومنه نجد ان التردد الرنيني يعطى بالصيغة:

$$p_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}$$

من العلاقة الأخيرة نجد ان التردد الرنيني يكون دائما اقل من التردد الطبيعي، وكلما كان ثابت الاضمحلال صغير كلما اقترب قيمة تردد الرنين من التردد الطبيعي.

5.5 سعة الاهتزاز القسري عند الرنين

ان سعة المهتز القسري في الحالة المستقرة تعطى بالصيغة:

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان سعة المهتز القسري تعتمد على كل من: التردد الطبيعي ω_o، ثابت بالاضمحلال r ، تردد القوة الخارجية المسلطةp ، وكذلك على قيمة f_o التي تعتمد على مقدار القوة الخارجية وكتلة الجسم المهتز.

وحيث ان اعظم سعة للاهتزاز القسري تحدث عند الرنين، نعوض عن تردد القوة الخارجية بالتردد الرنيني ومنه نحصل على الصيغة الخاصة بالسعة عند الرنين:

$$A = A_{max} \ \ when \ \ p = p_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}$$

$$A_{max} = \frac{f_o}{\sqrt{[\omega_o^2 - (\omega_o^2 - 2r^2)]^2 + \left(2r\sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}\right)^2}}$$

$$A_{max} = \frac{f_o}{\sqrt{[\omega_o^2 - \omega_o^2 + 2r^2]^2 + 4r^2(\omega_o^2 - 2r^2)}}$$

$$A_{max} = \frac{f_o}{\sqrt{4r^4 + 4r^2\omega_o^2 - 8r^4}} = \frac{f_o}{\sqrt{4r^2\omega_o^2 - 4r^4}}$$

$$A_{max} = \frac{f_o}{2r\sqrt{\omega_o^2 - r^2}}$$

لعلاقة الأخيرة تمثل سعة الاهتزاز القسري عند الرنين وهي تمثل اعظم سعة.

في حالة خاصة اذا كان ثابت الاضمحلال صغيرا بالمقارنة مع التردد الطبيعي $(r < \omega_o)$ وكان $(r < 1)$ فانه يمكن اهمال r^2 بالمقارنة مع ω_o^2 (اي اعتبار $\omega_o^2 - r^2 \approx \omega_o^2$) عندها يكون:

$$A_{max} \approx \frac{f_o}{2r\omega_o} \ \ , But \ we \ have: f_o = \frac{F_o}{m} \ \ , 2r = \frac{R}{m}$$

$$A_{max} \approx \frac{\frac{F_o}{m}}{\frac{R}{m}\omega_o} \approx \frac{F_o}{R\omega_o}$$

من العلاقة الأخيرة نجد ان سعة الاهتزاز عند الرنين تتناسب عكسيا مع مقدار قوة الإعاقة أي انه كلما زادت قوة الإعاقة قلت سعة الاهتزاز عند الرنين وتكون سعة الاهتزاز كبيرة جدا عندما تقترب قيمة قوة الإعاقة من الصفر.

6.5 أمثلة عملية على الرنين

ان استجابة أي مهتز لتأثير قوة خارجية دورية يتوقف على العلاقة بين تردد القوة المؤثرة والتردد الطبيعي للمهتز، والمهتز قد يكون بسيطا فيكون له تردد طبيعي واحد أو قد يكون معقدا فيكون له عدة ترددات طبيعية، واذا ما أثرت قوة دورية لها تردد محدد على مهتز فانها تسبب اهتزازه بنفس ترددها، ومتى ما اقترب تردد القوة الخارجية من احد الترددات الطبيعية للمهتز فان الرنين يحدث ويصبح الاهتزاز عنيفا وقد ينتج من دفعات صغيرة متوالية قد أحسن توقيتها على مهتز اهتزازا رنينياً خطيراً، بينما قد لا يكون كذلك اذا ما استخدمت دفعات كبيرة متعاقبة لم يحسن توقيتها، ومن هذا يتضح انه لكي يكون الرنين فعالا يجب ان يتوفر شرطان أساسيان:

1- ان يكون تردد القوة المثيرة للاهتزاز قريبا من التردد الطبيعي للمهتز.
2- ان يكون طور القوة المؤثرة متفقا مع طور الحركة للمهتز.

فيما يلي بعض الأمثلة لظاهرة الرنين:

أولاً: رنين الأرجوحة

عندما يسلط طفل دفعات دورية متتالية على أرجوحة ليهزها فان سعة الاهتزاز تزداد تدريجيا وعندما يكون تردد الدفعات التي يسلطها الطفل على الأرجوحة قريب من التردد الطبيعي للأرجوحة فان الرنين يحدث وتكون سعة التأرجح كبيرة نسبيا، وهذا يتطلب كذلك ان يكون طور الدفعات مساويا لطور تذبذب الأرجوحة ليكون كفاءة انتقال الطاقة من المؤثر الخارجي إلى الأرجوحة في افضل حالة.

ثانياً: رنين الجسور المعلقة

الجسر المعلق عبارة عن مهتز معقد يسهل هزه بسبب صغر عوامل الاضمحلال فيه نوعا ما، فاذا سار طابور من الجند على جسر معلق بخطوات منتظمة، فان ضربات الأقدام المتتالية التي تدك الجسر بنفس الطور وعلى فترات زمنية منتظمة تعمل عمل قوة دورية مؤثرة في الجسر. فاذا انطبق وقع سير الجند مع احد الترددات الطبيعية للجسر فان رنيناً عنيفاً يحدث وقد تكون سعة الاهتزاز من الكبر بحيث يؤدي إلى انهيار الجسر، ولهذا السبب يؤمر الجند حتى وان كانوا جماعة صغيرة بالتخلي عن نظام سيرهم العسكري عند عبورهم للجسور المعلقة.

كما ان الرياح القوية يمكن ان تسبب تذبذبات عنيفة للجسور المعلقة مما قد يسبب دمارها، ومن اشهر تلك الحوادث انهيار جسر تاكوما (Tacoma) بولاية واشطن والذي كان يعد الجسر الثالث في ترتيبه العالمي آنذاك (1940) وحدث ذلك بسبب قوة الرياح والتي هي في العادة لا تكون قوية لتدمير جسر بشكل مباشر، ولكن عندما تؤثر الرياح بصورة دورية على جسر ما وبتردد قريب من احد الترددات الطبيعية للجسر فان ظاهرة الرنين تحدث مما تسبب في اهتزاز الجسر بسعات عالية مما تؤدي إلى تحطمه، في الشكل التالي صورة فوتوغرافية تبين اهتزاز ذلك الجسر بفعل الرياح ومن ثم تحطمه.

(أ) تأرجح الجسر القسري بفعل قوة الرياح

(ب) تحطم الجسر بسبب ظاهرة الرنين

ثالثا: رنين عمود الهواء

رابعا: رنين الشوكتين الرنانتين

مثال: جسم كتلته$(20kg)$ علق بطرف نابض حلزوني فادى إلى استطالته بمقدار $(0.2m)$ وكانت قوة المقاومة لحركة الجسم والناتجة من اللزوجة تساوي $(F_R = -120\dot{x}\ N)$، حيث $(\dot{x})$ هي السرعة الآنية للجسم المهتز، فاذا سحب الجسم مسافة $(0.4m)$ عن موضع الاتزان ثم ترك ليتحرك من السكون بالإضافة إلى تعرضه لقوة خارجية دورية مقدارها$(40\,sin\,2t\ N)$ أوجد:

أ- معادلة الحركة للجسم

ب- الحل العام لمعادلة الحركة

جـ- دالة الإزاحة الآنية في الحالة المستقرة

د- التردد الرنيني وسعة الاهتزاز عند الرنين

الحل:

أ- معادلة الحركة للجسم

معادلة الحركة يتم إيجادها بتطبيق قانون نيوتن الثاني والذي يتطلب أولا إيجاد محصلة القوى المؤثرة على الجسم، والتي يمكن التعبير عنها في حالة الاهتزاز القسري بالصيغة:

$$\sum F = F_R + F_s + F_o\,sin\,pt$$

قوة الاستعادة $(F_s = -kx)$ لم تعطى بشكل مباشر لذا ينبغي ايجادها من معطيات المسألة:

$$F_s = -kx$$

ثابت النابض(k) يتم ايجاده بتطبيق قانون هوك:

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{mg}{\Delta x}$$

$$k = \frac{20 \times 9.8}{0.2} = 980\frac{N}{m}$$

$$F_s = -980x \quad N$$

$$\sum F = -120\dot{x} - 980x + 40\,sin\,2t$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة:

$$ma = \sum F$$

$$20\ddot{x} = -120\dot{x} - 980x + 40\,sin\,2t$$

$$2\ddot{x} = -12\dot{x} - 98x + 4\sin 2t$$
$$2\ddot{x} + 12\dot{x} + 98x = 4\sin 2t$$
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 49x = 2\sin 2t$$

ب- الحل العام لمعادلة الحركة

بالمقارنة مع الصيغة العامة لمعادلة الحركة للاهتزاز القسري$(\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = f_o \sin pt)$ نجد:

$$2r = 6 \longrightarrow r = \frac{6}{2} = 3\ sec^{-1}$$
$$\omega_o^2 = 49 \longrightarrow \omega_o = \sqrt{49} = 7\frac{rad}{sec}$$
$$f_o = 2\frac{N}{kg} \quad , \quad p = 2\ \frac{rad}{sec}$$

بالمقارنة بين قيمتي r و ω_o نجد ان $(r < \omega_o)$ والحل العام يعطى بالصيغة:

$$x_{(t)} = Ce^{-rt}\sin(\omega t + \theta) + \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}\sin(pt + \emptyset)$$
$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - r^2} = \sqrt{(7)^2 - (3)^2}$$
$$\omega = \sqrt{40}\ \frac{rad}{sec}$$
$$x_{(t)} = Ce^{-3t}\sin\left(\sqrt{40}t + \theta\right) + \frac{2}{\sqrt{[(7)^2 - (2)^2]^2 + [2(3)(2)]^2}}\sin(2t + \emptyset)$$
$$x_{(t)} = Ce^{-3t}\sin\left(\sqrt{40}t + \theta\right) + \frac{2}{\sqrt{[49 - 4]^2 + [12]^2}}\sin(2t + \emptyset)$$
$$x_{(t)} = Ce^{-3t}\sin\left(\sqrt{40}t + \theta\right) + \frac{2}{\sqrt{[45]^2 + [12]^2}}\sin(2t + \emptyset)$$
$$x_{(t)} = Ce^{-3t}\sin\left(\sqrt{40}t + \theta\right) + \frac{2}{\sqrt{2169}}\sin(2t + \emptyset)$$
$$x_{(t)} = Ce^{-3t}\sin\left(\sqrt{40}t + \theta\right) + 0.043\sin(2t + \emptyset)$$
$$\emptyset = tan^{-1}\left(\frac{-2rp}{\omega_o^2 - p^2}\right) = tan^{-1}\left[\frac{-2(3)(2)}{(7)^2 - (2)^2}\right] = tan^{-1}\left[\frac{-12}{45}\right]$$
$$\emptyset = -14.9^o$$
$$x_{(t)} = Ce^{-3t}\sin\left(\sqrt{40}t + \theta\right) + 0.043\sin(2t - 14.9^o)\ m$$

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة الثابتين C و θ من خلال تطبيق الشروط الابتدائية الواردة في منطوق السؤال.

جـ- دالة الإزاحة الآنية في الحالة المستقرة

في الحالة المستقرة فان دالة الإزاحة الآنية يعبر عنها بالصيغة:

$$x_{(t)} = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} sin(pt + \emptyset)$$

$$x_{(t)} = 0.043\, sin(2t - 14.9^o)\, m$$

ملاحظة: في هذا الجزء تم الاستفادة من النتيجة التي وجدناها في المطلب السابق (الحل العام)، فدالة الحالة المستقرة هي نفسها الحل العام بعد حذف الحل العابر، ولكن في حالة كون المطلوب دالة الإزاحة في الحالة المستقرة فقط ولم يطلب الحل العام، عندها يجب التعويض قيم (f_o, ω_o, r, p) في المعادلة وإيجاد قيمة (φ) والتعويض عنها لإيجاد الدالة في الحالة المستقرة.

د- التردد الرنيني وسعة الاهتزاز عند الرنين

$$p_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}$$

$$p_r = \sqrt{(7)^2 - 2(3)^2} = \sqrt{49 - 18}$$

$$p_r = \sqrt{31} \frac{rad}{sec}$$

$$A_{max} = \frac{f_o}{2r\sqrt{\omega_o^2 - r^2}}$$

$$A_{max} = \frac{2}{2(3)\sqrt{(7)^2 - (3)^2}} = \frac{2}{6\sqrt{40}}$$

$$A_{max} = \frac{1}{3\sqrt{40}} = 0.053\, m$$

أسئلة الفصل الخامس

س1: اشتق معادلة الحركة للمهتز القسري ثم اكتب ثلاثة حلول عامة لتلك المعادلة.

س2: اكتب دالة الإزاحة الآنية للمهتز القسري في الحالة المستقرة، ومنها اشتق الصيغة الرياضية للتردد الذي يجعل سعة الاهتزاز في قيمتها القصوى (التردد الرنيني).

س3: اثبت ان اعظم قيمة لسعة الاهتزاز في حالة الرنين هي $(A_{max} \approx F_o/R\omega_o)$.

س4: جسم كتلته (15kg) علق بطرف نابض حلزوني فادى الى استطالته بمقدار $(0.05m)$ وكانت قوة المقاومة لحركة الجسم والناتجة من اللزوجة تساوي $(120\dot{x}\,N)$، حيث $(\dot{x})$ هي السرعة الآنية للجسم المهتز، فاذا سحب الجسم مسافة $(0.3m)$ عن موضع الاتزان ثم ترك ليتحرك من السكون بالإضافة الى تعرضه لقوة خارجية دورية مقدارها$(120\,sin\,3t\,N)$ اوجد:

أ- معادلة الحركة للجسم. ب - الحل العام لمعادلة الحركة. جـ- دالة الإزاحة الآنية في الحالة المستقرة.
د- التردد الرنيني للاهتزاز هـ- سعة الاهتزاز عند الرنين

س5: مهتز يتألف من جسم ونابض حلزوني، يعاني أثناء اهتزازه على امتداد المحور السيني قوتين، القوة الأولى هي قوة استعادة ومقدارها يتناسب مع الإزاحة الآنية (x) والقوة الثانية هي قوة إخماد ومقدارها يتناسب مع السرعة الآنية $(\dot{x})$ فاذا كانت قوة الاستعادة تساوي عددياً $(300x\,dyn)$ وقوة الإخماد تساوي $(720\,dyn)$ في اللحظة التي تكون فيها سرعته الآنية $\left(10\frac{cm}{sec}\right)$ ويتعرض لقوة خارجية دورية مقدارها$(75\,sin\,2t\,dyn)$ على فرض ان كتلة الجسم (12g) وانه قد بدأ حركته من السكون عند نقطة تبعد $(45cm)$ عن موضع الاتزان أوجد ما يلي:

أ-المعادلة التفاضلية لحركة المهتز. ب-الموضع الآني في الحالة المستقرة. جـ-الحل العام لمعادلة الحركة.