الفصل الثالث

تراكب الحركات التوافقية البسيطة

Superposition of Simple Harmonic Motions

1.3 مبدأ التراكب

2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد

1.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و لهما نفس التردد

2.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد ومختلفتين في التردد(الضربات)

3.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين

1.3.3 تراكب حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد

تناولنا في الفصل السابق الحركة التوافقية البسيطة وبعض من تطبيقاتها، ولكن في الواقع هناك أمثلة كثيرة في الفيزياء (وبخاصة في علم الصوت) تتراكب فيها حركتان توافقيتان بسيطتان أو اكثر في نفس الوقت، فغشاء طبلة الأذن غالباً ما يتأثر بأكثر من حركة توافقية بسيطة نتيجة لالتقاط الآذن أصوات متعددة بترددات مختلفة في نفس الوقت، وبصورة تتيح للإنسان ان يسمع ويميز أصوات مجموعة متكلمين في نفس الوقت، ومن الأمثلة الأخرى: اهتزاز غشاء السماعة (Speaker)، و اهتزاز غشاء اللاقط الصوتي (Microphone).

1.3 مبدأ التراكب (Superposition Principle):

لهذا المبدأ أهمية كبيرة في تحليل الحركات الموجية المعقدة إلى مركبات توافقية بسيطة، و ينص هذا المبدأ على انه **يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجتين أو اكثر ان تحدثا في نفس النقطة دون ان تؤثر احداهما في الأخرى، وتكون الإزاحة الآنية في تلك النقطة عبارة عن المجموع الجبري للازا حات الآنية للموجات المتراكبة.** وينطبق هذا المبدأ على الحركات التوافقية البسيطة.

يمكن أثبات ان حاصل تراكب أي حركتين توافقيتين بسيطتين هو حركة توافقية بسيطة، وكما يلي:

نفرض ان لدينا حركتين توافقيتين بسيطتين، الأولى معبر عنها بالدالة (x_1) والثانية معبر عنها بالدالة (x_2). بما ان الدالة (x_1) تمثل حركة توافقية بسيطة (بالفرض)، لذا فهي تحقق معادلة الحركة التوافقية البسيطة المعبر عنها بالصيغة $\left[\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_o^2x=0\right]$ ، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega_o^2x_1=0 \qquad (1)$$

وبنفس الطريقة فان الدالة (x_2) تحقق معادلة الحركة التوافقية البسيطة، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+\omega_o^2x_2=0 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)+\omega_o^2(x_1+x_2)=0 \qquad (3)$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان(x_1+x_2) تمثل حلاً لمعادلة المهتز التوافقي، وبتعبير آخر ان حاصل جمع حركتين توافقيتين هو أيضا حركة توافقية، وبشكل عام فان اي تركيب خطي يضم حركتين توافقيتين ينتج عنه حركة توافقية ثالثة.

2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد:

ان أي حركة توافقية بسيطة يتم وصفها بدلالة سعة (A) والتردد الزاوي (ω_o) والطور الابتدائي (θ_o) للاهتزاز $[x=A\sin(\omega_o t+\theta_o)]$، وللسهولة نبدأ أولا بدراسة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد ولهما نفس التردد، ومن ثم ندرس تراكب حركتين توافقيتين مختلفتين في التردد والتي ترتبط بظاهرة فيزيائية مهمة تعرف بالضربات.

1.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و لهما نفس التردد:

نفرض ان لدينا حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الزاوي على امتداد المحور x معرفين بالعلاقتين: $x_1 = a_1\, sin(\omega t + \theta_1),\ x_2 = a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$

حيث تمثل x_1 و x_2 الإزاحة الآنية للحركتين، a_1 و a_2 سعتي الحركتين، θ_1 , θ_2 زاويتي الطور الابتدائي للحركتين، ω هو التردد الزاوي للحركتين، ان تراكب الحركتين تعطى بالصيغة:

$$x = x_1 + x_2$$
$$x = a_1\, sin(\omega t + \theta_1) + a_2\, sin(\omega t + \theta_2) \qquad (1)$$

من المتطابقة المثلثية الخاصة بمفكوك جيب حاصل جمع زاويتين لدينا:

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

وبالتعويض عن المفكوك في العلاقة (1) نحصل على:

$$x = a_1[sin\omega t cos\theta_1 + cos\omega t sin\theta_1] + a_2[sin\omega t cos\theta_2 + cos\omega t sin\theta_2]$$
$$x = a_1 sin\omega t cos\theta_1 + a_1 cos\omega t sin\theta_1 + a_2 sin\omega t cos\theta_2 + a_2 cos\omega t sin\theta_2$$
$$x = [a_1 cos\theta_1 + a_2 cos\theta_2]sin\omega t + [a_1 sin\theta_1 + a_2 sin\theta_2]cos\omega t \qquad (2)$$

وحيث ان كل من $\theta_2 a_1$, θ_1 , a_2 , هي ثوابت ، لذا يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$A cos\theta = a_1 cos\theta_1 + a_2 cos\theta_2 \qquad (3)$$
$$A sin\theta = a_1 sin\theta_1 + a_2 sin\theta_2 \qquad (4)$$

حيث θA , هي ثوابت، وبتعويض المعادلة (3) و (4) في المعادلة (2) نحصل على:

$$x = A cos\theta sin\omega t + A sin\theta cos\omega t$$
$$x = A[sin\omega t cos\theta + cos\omega t sin\theta]$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة:

$$x = A sin(\omega t + \theta) \qquad (5)$$

العلاقة الأخيرة تعبر عن الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد في بعد واحد، ويلاحظ انها تشبه معادلة الحركتين الأصليتين حيث انها معادلة حركة توافقية لها نفس التردد الزاوي الحركتين الأصليتين (ω)، وتختلف عنهما بالسعة (A) والطور الابتدائي (θ). واللذان يمكن حسابهما بدلالة السعة والطور الابتدائي للحركتين الأصليتين وكما يلي:

لإيجاد السعة (A) نقوم أولا بتربيع طرفي المعادلة (3) و (4) فنحصل على:

$$A^2 cos^2\theta = a_1^2 cos^2\theta_1 + 2a_1 a_2 cos\theta_1 cos\theta_2 + a_2^2 cos^2\theta_2$$
$$A^2 sin^2\theta = a_1^2 sin^2\theta_1 + 2a_1 a_2 sin\theta_1 sin\theta_2 + a_2^2 sin^2\theta_2$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين وترتيب الحدود نحصل على:

$$A^2[sin^2\theta + cos^2\theta] = a_1^2[sin^2\theta_1 + cos^2\theta_1] + a_2^2[sin^2\theta_2 + cos^2\theta_2]$$
$$+2a_1 a_2[cos\theta_1 cos\theta_2 + sin\theta_1 sin\theta_2]$$

وبالاستفادة من المتطابقتين المثلثيتين:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad , \qquad cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

بالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)$$

حيث تمثل $(\theta_1 - \theta_2)$ زاوية الفرق بين الطورين الابتدائيين (θ_1 , θ_2) وبجذر الطرفين نحصل على:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (6)$$

العلاقة الأخيرة تعبر عن سعة الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين في بعد واحد، وهي تعتمد على سعة والطور الابتدائي للحركتين المتراكبتين الأصليتين.

اما بخصوص الطور الابتدائي للحركة التوافقية الناتجة من تراكب الحركتين، فيمكن حسابه من خلال قسمة المعادلة (4) على المعادلة (3) وكما يلي:

$$\frac{Asin\theta}{Acos\theta} = \frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}$$

$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}\right] \qquad (7)$$

المعادلة الأخيرة تعطي الطور الابتدائي للحركة الناتجة من تراكب الحركتين بدلالة سعتي و طوري الحركتين المتراكبتين الأصليتين.

نستنتج مما سبق ان تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد في بعد واحد، الأولى معرفة بالصيغة $x_1 = a_1\, sin(\omega t + \theta_1)$ والثانية معرفة بالصيغة $x_2 = a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$ هي حركة توافقية لها نفس التردد ويعبر عنها بالصيغة $x = A\, sin(\omega t + \theta)$ حيث يعطى السعة والطور الابتدائي لها بدلالة سعة والطور الابتدائي للحركات التوافقية الأصلية بالصيغة:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}\right]$$

وبالتالي يمكننا ان نجد الحركة التوافقية الناتجة من تراكب اي حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وفي بعد واحد، ولنناقش الآن تراكب حالتين خاصتين وهي:

أولاً: تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد والطور في بعد واحد

في هذه الحالة يكون للحركتين الأصليتين نفس التردد والطور $(\theta_1 = \theta_2 = \theta)$ وعندها يمكن التعبير عن الحركتين المتراكبتين بالصيغة: $x_1 = a_1\, sin(\omega t + \theta_1)$ $x_2 = a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$,

اما الحركة الناتجة من تراكب الحركتين فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

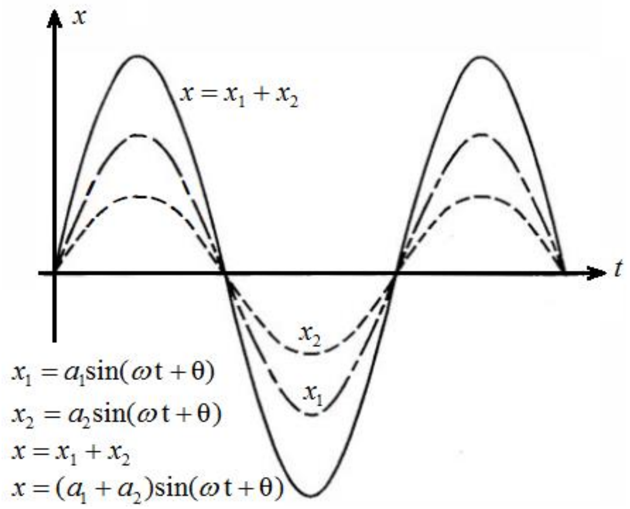
$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a_1\, sin(\omega t + \theta_1) + a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$$

But we have; $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$x = a_1\, sin(\omega t + \theta) + a_2\, sin(\omega t + \theta)$$

$$x = (a_1 + a_2)\, sin(\omega t + \theta)$$



من العلاقة الأخيرة نستنتج ان ناتج تراكب حركتين توافقيتين لها نفس التردد والطور في بعد واحد هو حركة توافقية لها نفس التردد والطور وبسعة تساوي المجموع الجبري لسعة الحركتين الأصليتين. ولهذا يسمى هذا النوع من التراكب بالتداخل البناء (constructive interference) وكما هو موضح بالشكل المجاور.

ثانياً: تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وبينهما فرق الطور (π) في بعد واحد

في هذه الحالة يكون للحركتين الأصليتين نفس التردد وبينهما فرق في الطور مقداره $(\Delta\theta = \pi)$ ويقال عندها ان الحركتين متعاكستين في الطور، فاذا فرضنا ان الحركة التوافقية الأولى معبر عنها بالصيغة:

$$x_1 = a_1\, sin(\omega t + \theta)$$

فان الحركة التوافقية الثانية يكون تعبيرها بالصيغة:

$$x_2 = a_2\, sin(\omega t + \theta - \pi)$$

اما الحركة الناتجة من تراكب الحركتين فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$x = x_1 + x_2 = a_1\, sin(\omega t + \theta) + a_2\, sin(\omega t + \theta - \pi)$$

من العلاقات المثلثية لدينا $sin(\omega t + \theta - \pi) = -\, sin(\omega t + \theta)$ نحصل على:

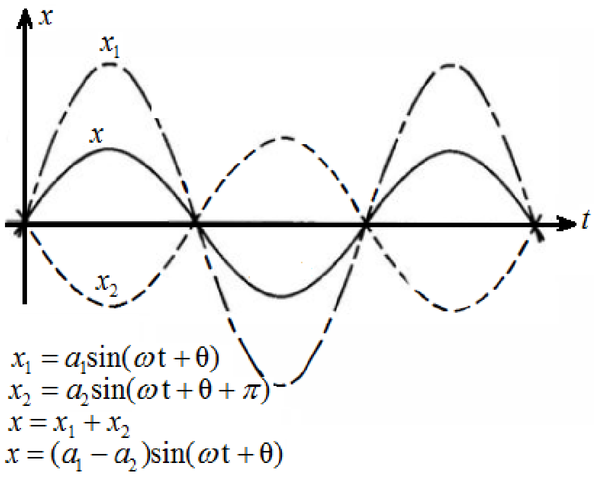
$$sin(\omega t + \theta - \pi) = -\, sin(\omega t + \theta)$$

وبالتعويض في معادلة الإزاحة الآنية نحصل على:

$$x = a_1\, sin(\omega t + \theta) - a_2\, sin(\omega t + \theta)$$

ومنه نحصل على:

$$x = (a_1 - a_2)\, sin(\omega t + \theta)$$



من العلاقة الأخيرة نستنتج ان ناتج تراكب حركتين توافقيتين لها نفس التردد وبينهما فرق طور (π) في بعد واحد هو حركة توافقية لها نفس التردد والطور وبسعة تساوي الفرق بين سعتي الحركتين الأصليتين. ولهذا يسمى هذا النوع من التراكب بالتداخل الاتلافي (الهدام) (destructive interference) وكما هو موضح بالشكل المجاور.

في حالة كون السعتين متساويتين $(a_1 = a_2)$ والتداخل اتلافي فان الحركتين تلغي احدهما الأخرى.

2.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و مختلفتين في التردد (الضربات)

يرتبط بهذا النوع من التراكب ظاهرة فيزيائية مهمة تسمى **الضربات (Beats)** والتي يمكن تعريفها على انها **نمط خاص من الحركة الدورية تحدث عندما يتأثر جسم آنياً بحركتين توافقيتين بسيطتين الفرق بين ترديهما قليل عندها تكون سعة الحركة الاهتزازية الناتجة للجسم تتناوب بين نهايتين عظمى وصغرى مع مرور الزمن.**

نفرض ان لدينا جسيم يتذبذب تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين مختلفتين قليلاً في التردد وعلى بعد واحد، نتيجة للاختلاف البسيط بين الترددين فان فرق الطور بين الحركتين يتغير باستمرار بصرف النظر عن الطور الابتدائي للحركتين، وبالتالي يمكننا تجاهل الطور الابتدائي للحركتين في هذه الحالة. ولذلك يمكننا التعبير عن الإزاحة الآنية للجسيم في اللحظة (t) بسبب تأثير الحركة التوافقية الأولى التي سعتها (A_1) وترددها الزاوي (ω_1) بالصيغة:

$$x_1 = A_1 sin\omega_1 t$$

وبنفس الطريقة يمكننا التعبير عن الإزاحة الآنية لنفس الجسيم في نفس اللحظة الزمنية (t) نتيجة تأثير الحركة التوافقية الثانية التي سعتها (A_2) وترددها الزاوي (ω_2) بالصيغة:

$$x_2 = A_2 sin\omega_2 t$$

وفقاً لمبدأ التراكب فان الإزاحة الآنية للجسيم يساوي المجموع الجبري للإزاحتين للحركتين المتراكبتين، اي ان:

$$x = A_1 sin\omega_1 t + A_2 sin\omega_2 t$$

للسهولة نفرض ان سعتي الحركتين المتراكبتين متساويتان $(A_1 = A_2 = A)$ ومنه نحصل على:

$$x = A(sin\omega_1 t + sin\omega_2 t) \qquad (1)$$

من المتطابقات المثلثية لدينا:

$$sin\alpha + sin\beta = 2cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right)$$

بالتعويض في معادلة الإزاحة الآنية (1) نحصل على:

$$x = 2Acos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) t\right] sin\left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right) t\right]$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها كدالة جيبية بالصورة:

$$x = Bsin\left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right) t\right]$$

حيث B سعة الاهتزاز وهي في هذه الحالة معتمدة على الزمن وتعطى بالعلاقة:

$$B = 2Acos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) t\right]$$

ان العلاقة الأخيرة تمثل سعة الاهتزاز في حالة الضربات (B)، ويلاحظ ان سعة الاهتزاز متغيرة مع الزمن، حيث تتراوح قيمتها من الصفر إلى اعظم قيمة وهي $(2A)$.

للتوصل إلى فهم اعمق لتغير السعة في حالة الضربات ستقوم بحساب الفترة الزمنية الفاصلة بين اكبر واصغر سعتين متتاليتين وكما يلي:

أولاً: حساب الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين في حالة الضربات

ان سعة الاهتزاز في حالة الضربات تعطى بالصيغة:

$$B = 2A\cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right]$$

ان اعظم قيمة للسعة هي $(B_{max} = \pm 2A)$ وتحدث عندما:

$$B_{max} = \pm 2A \qquad when \qquad \cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right] = \pm 1$$

من خواص دالة الجيب تمام لدينا:

$$\cos\alpha = \pm 1 \quad for\ \alpha = n\pi \quad where \quad n = 0,1,2,3,4,5,\dots\dots$$

اي ان اعظم قيمة للسعة تحدث عندما :

$$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t = n\pi \qquad , \qquad n = 0,1,2,3,4,5,\dots\dots$$

بالتعويض عن التردد الزاوي بدلالة التردد($\omega_1 = 2\pi f_1 , \omega_2 = 2\pi f_2$) نحصل على:

$$\left(\frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2}\right)t = n\pi$$

$$2\pi\left(\frac{f_2-f_1}{2}\right)t = n\pi$$

$$(f_2-f_1)t = n$$

$$t = \frac{n}{f_2-f_1} \qquad , \qquad n = 0,1,2,3,4,5,\dots\dots$$

$$t = 0, \frac{1}{f_2-f_1}, \frac{2}{f_2-f_1}, \frac{3}{f_2-f_1}, \frac{4}{f_2-f_1}, \frac{5}{f_2-f_1}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_2-f_1} - 0 = \frac{3}{f_2-f_1} - \frac{2}{f_2-f_1} = \frac{4}{f_2-f_1} - \frac{3}{f_2-f_1} = \frac{1}{f_2-f_1}$$

$$\Delta t_{max} = \left|\frac{1}{f_2-f_1}\right|$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين قيمة ثابتة تساوي $\left|\frac{1}{f_2-f_1}\right|$.

ثانياً: حساب الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين في حالة الضربات

ان سعة الاهتزاز في حالة الضربات تعطى بالصيغة:

$$B = 2A\cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right]$$

في حالة الضربات تكون السعة في قيمتها الدُنيا $(B_{min} = 0)$ في الحالة المعرفة بالصيغة:

$$B_{min} = 0 \quad , \quad when \qquad \cos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right] = 0$$

من خواص دالة الجيب تمام لدينا:

$$\cos\alpha = 0 \quad for \quad \alpha = (n+\frac{1}{2})\pi \quad where \quad n = 0,1,2,3,4,5,\dots\dots$$

في حالتنا فان السعة تكون صفراً عندما يتحقق الشرط:

$$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t=(n+\frac{1}{2})\pi \quad where \quad n=0,1,2,3,4,5,\dots\dots$$

بالتعويض عن التردد الزاوي بدلالة التردد($\omega_1=2\pi f_1$) و ($\omega_2=2\pi f_2$) نحصل على:

$$\left(\frac{2\pi f_2-2\pi f_1}{2}\right)t=(n+\frac{1}{2})\pi$$

$$2\pi\left(\frac{f_2-f_1}{2}\right)t=(n+\frac{1}{2})\pi$$

$$t=\frac{(n+\frac{1}{2})}{f_2-f_1} \qquad , \qquad n=0,1,2,3,4,5,\dots\dots$$

$$t=\frac{(0+\frac{1}{2})}{f_2-f_1},\frac{(1+\frac{1}{2})}{f_2-f_1},\frac{(2+\frac{1}{2})}{f_2-f_1},\frac{(3+\frac{1}{2})}{f_2-f_1},\frac{(4+\frac{1}{2})}{f_2-f_1},\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$t=\frac{(\frac{1}{2})}{f_2-f_1},\frac{(\frac{3}{2})}{f_2-f_1},\frac{(\frac{5}{2})}{f_2-f_1},\frac{(\frac{7}{2})}{f_2-f_1},\frac{(\frac{9}{2})}{f_2-f_1},\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta t_{min}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)-(\frac{1}{2})}{f_2-f_1},\frac{\left(\frac{5}{2}\right)-(\frac{3}{2})}{f_2-f_1},\frac{\left(\frac{7}{2}\right)-(\frac{5}{2})}{f_2-f_1},\frac{\left(\frac{9}{2}\right)-(\frac{7}{2})}{f_2-f_1},\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta t_{min}=\left|\frac{1}{f_2-f_1}\right|$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين قيمة ثابتة تساوي $\left|\frac{1}{f_2-f_1}\right|$.

نستنتج من الاشتقاق في أولاً و ثانياً ان الفترات الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين هو نفسه الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين ويساوي مقلوب الفرق في تردد الحركتين.

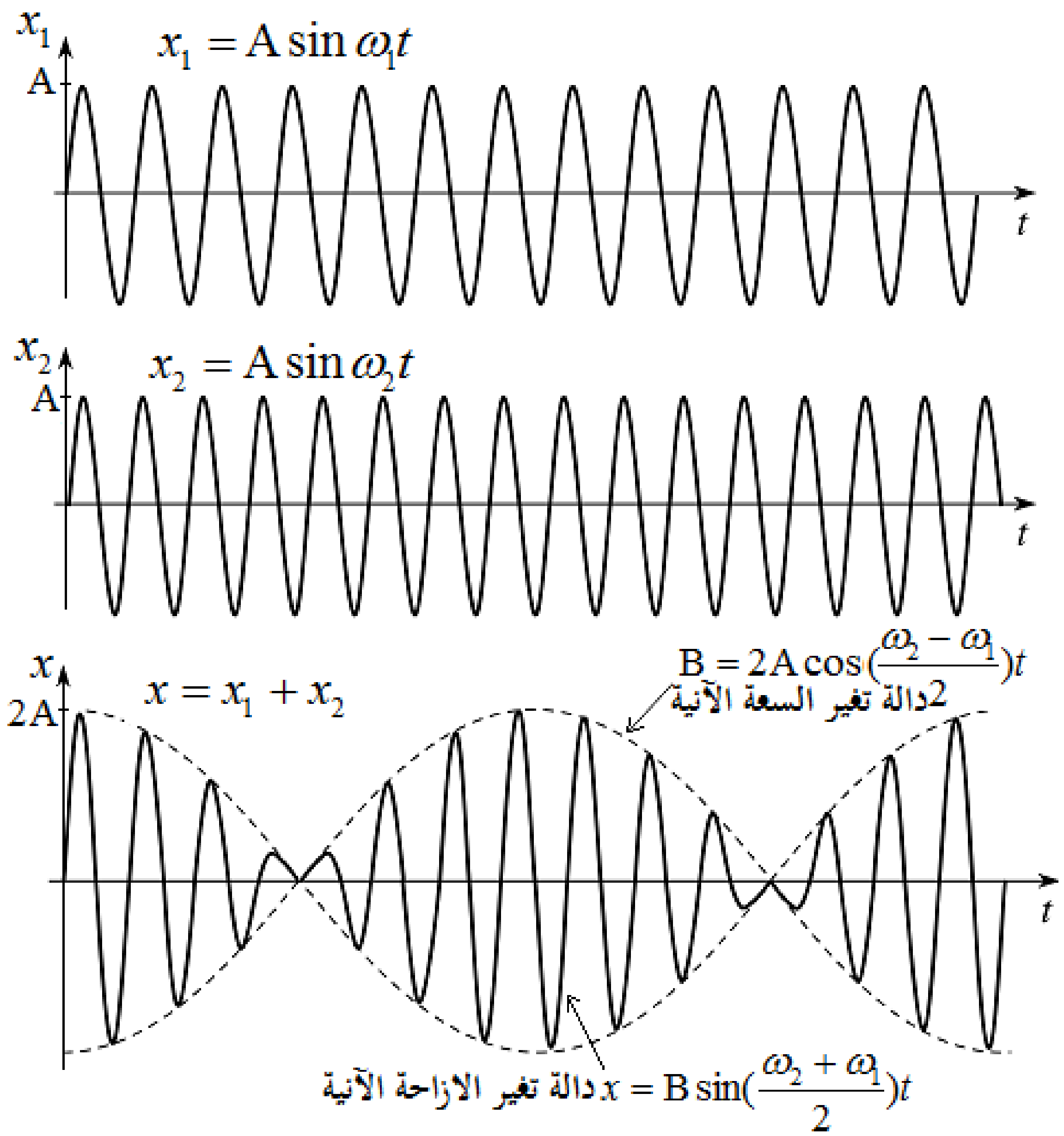
$$\Delta t_{max}=\Delta t_{min}=\left|\frac{1}{f_2-f_1}\right|$$

كما نستنتج ان تردد الضربات (عدد الضربات في وحدة الزمن) يساوي الفرق في التردد بين الحركتين المتراكبتين، وبالتالي يمكننا التعبير عن الزمن الدوري للضربات (T_b) والتردد للضربات (f_b) بالصيغة:

$$T_b=\left|\frac{1}{f_2-f_1}\right| \quad , \quad f_b=|f_2-f_1|$$

مما سبق نستنتج ان محصلة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين بينهما فرق بسيط في التردد تتحركان في بعد واحد تكون حركة توافقية بتردد يساوي متوسط تردد الحركتين $[f=(f_2+f_1)/2]$ وسعتها تتغير دورياً مع الزمن بين مجموع السعتين والفرق بينهما وتنشأ عنها ضربات بتردد يساوي الفرق بين الترددين الأصليين $[f_b=|f_2-f_1|]$.

الشكل التالي يوضح التمثيل البياني لتراكب حركتين مختلفتين قليلاً في التردد في بعد واحد:



نلاحظ من الشكل ان الإزاحة الآنية تتغير وفقاً لدالة جيبية ترددها يساوي المتوسط الحسابي لتردد الحركتين المتراكبتين $[(\omega_2 + \omega_1)/2]$ غير ان سعة الاهتزاز (B) متغير مع الزمن وفقاً لدالة جيب تمام وبتردد $[(\omega_2 - \omega_1)/2]$ والتي تتمثل بالخط المنقط حيث يلاحظ ان سعة الاهتزاز تتغير بين اعظم قيمة (2A) إلى اقل قيمة (صفر) ضمن فترات زمنية محددة تمثل الزمن الدوري للضربات .

على سبيل المثال، اذا اهتزت شوكتان رنانتان قريبتان من بعضهما معاً وكان تردد احدهما $[f_1 = 255Hz]$ و تردد الثانية $[f_2 = 257Hz]$ فان الأذن ستسمع صوت تردده $[f = (257 + 255)/2 = 256Hz]$ وبضربات ترددها $[f_b = |257 - 255| = 2Hz]$ وهذا يعني ان شدة الصوت المسموع ترتفع وتنخفض مرتين في الثانية الواحدة.

مثال (1): في تجربة للحصول على أشكال ليساجو استعملت شوكتا رنين، تردد الأولى (250Hz) ووجد ان شكل ليساجو الدائري يكمل بعد مرور ($5\ s$)، كيف يمكن إيجاد تردد الشوكة الثانية؟

الحل: لدينا من معطيات المسألة $(f_1 = 250Hz)$ و $(T_b = 5sec)$

$$T_b = \left|\frac{1}{f_2 - f_1}\right| \quad , \quad f_2 - f_1 = \pm\frac{1}{T_b}$$

$$f_2 - f_1 = \pm\frac{1}{5}$$

$$f_2 = f_1 \pm 0.2$$

$$f_2 = 250 + 0.2 \quad \rightarrow \quad f_2 = 250.2$$

or

$$f_2 = 250 - 0.2 \quad \rightarrow \quad f_2 = 249.8\ Hz$$

مثال (2): احسب سرعة الصوت في غاز تولد فيه موجتان أطوالهما (*100cm*) و (*101cm*) 18 ضربة في 6 ثواني.

الحل: لدينا من معطيات المسألة $\lambda_1 = 100cm\ ,\ \lambda_2 = 101cm$

$$f_b = \frac{18}{6} = 3\ Hz$$

$$v = \lambda f \quad , \quad f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \quad , \quad and \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2}$$

$$f_1 = \frac{v}{100} \quad , \quad and \quad f_2 = \frac{v}{101}$$

$$f_b = |f_2 - f_1|$$

$$\left|\frac{v}{101} - \frac{v}{100}\right| = 3$$

$$v\left|\left[\frac{100 - 101}{(101)(100)}\right]\right| = 3$$

$$\frac{v}{10100} = 3$$

$$v = 30300\frac{cm}{sec} = 303\frac{m}{sec}$$

3.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين:

ناقشنا في الفقرة السابقة حركة جسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعد واحد، وفي هذه الفقرة سنناقش حركة جسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعدين بينهما زاوية قائمة، فعلى سبيل المثال لو كان لدينا كرة بندول بسيط معلق من نقطة ثابتة وتتحرك بحركة توافقية بسيطة باتجاه المحور الصادي وسمح لكرة البندول ان تتذبذب بنفس الوقت بسعة صغيرة باتجاه المحور السيني فان كرة البندول ستخضع لحركتين متعامدتين في وقت واحد، ونتيجة لذلك فان كرة البندول ستتحرك في بعدين بمسار يحدده محصلة هاتين الحركتين. يعرف **شكل ليساجو** (Lissajous figure) **بانه المسار المنحني الذي يسلكه الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين، ويعتمد هذا الشكل على سعة وتردد كل من الحركتين وفرق الطور بينهما. واذا كانت النسبة بين ترددي الحركتين مساوياً لعدد صحيح وفرق الطور بينهما زاوية معينة فان شكل المسار يكون مغلقاً.** سنبدأ دراسة حركة الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدين لهما نفس التردد ومن ثم ندرس حركة الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين مختلفتين بالتردد.

1.3.3 تراكب حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد:

نفرض ان لدينا جسيماً يتحرك في مستوي (حركة في بعدين) تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين متساويتين في التردد ومختلفتين في السعة والطور الابتدائي، هناك اكثر من طريقة لدراسة شكل المسار الذي يسلكه ذلك الجسيم، ومن اهم تلك الطرق هي الطريقة التحليلية وطريقة المحور الدوار.

أولاً: الطريقة التحليلية

نفرض ان الجسيم يتحرك آنياً بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين ومتساويتين في التردد، الأولى على امتداد المحور الأفقي (المحور السيني *x*-axis)، والثانية على امتداد المحور العمودي (المحور الصادي y-axis) والتي يمكن تعريفهما بالصيغة:

$$x = asin(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

$$y = bsin\omega t \qquad (2)$$

حيث تمثل a سعة الاهتزاز للحركة التوافقية الافقية و b سعة العمودية، (θ) زاوية الطور الابتدائي للحركة الأفقية، اما زاوية الطور الابتدائي للحركة العمودية فوضعت مساوية للصفر وذلك لتسهيل التعامل الرياضي من جهة ومن جهة ثانية فالذي يهمنا هو فرق الطور الابتدائي بين الحركتين وهو مقدار ثابت (θ).

بقسمة طرفي المعادلة (1) على (a) نحصل على:

$$\frac{x}{a} = sin(\omega t + \theta)$$

بالاستفادة من المتطابقة$[sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta]$ نحصل على:

$$\frac{x}{a} = sin\omega t cos\theta + cos\omega t sin\theta \qquad (3)$$

لإيجاد شكل المسار الذي يسلكه الجسيم لابد من إيجاد معادلة المسار له، والتي يتم الحصول عليها من حذف عامل الزمن من العلاقة (3) و ذلك بالاستفادة من العلاقة (2) وكما يلي:

من المعادلة (2) لدينا:

$$sin\omega t = \frac{y}{b} \qquad (4)$$

بالاستفادة من المتطابقة المثلثية $[\, sin^2\alpha + \ cos^2\alpha = 1 \,]$ نجد:

$$cos\omega t = \sqrt{1 - sin^2\omega t}$$

بالتعويض عن قيمة $sin\omega t$ من المعادلة (4) في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$cos\omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \qquad (5)$$

بالتعويض عن قيمة كل من $sin\omega t$ و $cos\omega t$ في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} cos\theta + \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ sin\theta$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} cos\theta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ sin\theta$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} cos\theta\right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ sin\theta\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right) cos\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 cos^2\theta = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) sin^2\theta$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{2xy}{ab} cos\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 cos^2\theta = sin^2\theta - \frac{y^2}{b^2} sin^2\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} cos\theta + \frac{y^2}{b^2} cos^2\theta + \frac{y^2}{b^2} sin^2 = sin^2\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} cos\theta + \frac{y^2}{b^2}(sin^2\theta + cos^2\theta) = sin^2\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} cos\theta = sin^2\theta \qquad (6)$$

المعادلة الأخيرة تمثل معادلة المسار للجسيم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد ومختلفتين بالسعة والطور، وهي المعادلة العامة للقطع الناقص (Ellipse)، ويلاحظ من المعادلة ان شكل المسار يعتمد على سعة كل من الحركتين a ، b وكذلك على فرق الطور بينهما (θ).

فيما يلي دراسة لشكل المسار (أشكال ليساجو) لجسيم واقع تحت تأثير حركتين توافقيتين في بعد واحد ولهما نفس التردد لقيم محددة من فرق الطور:

1- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد و الطور$(\theta = 0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\theta = sin^2\theta \quad , \quad \theta = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos0 = sin^2 0$$

But we have $(sin\, 0 = 0)$ and $(cos\, 0 = 1)$ then we get:

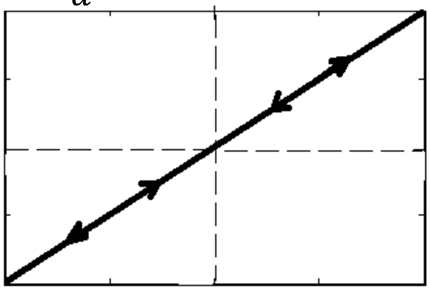
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}(1) = (0)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2 = 0 \xrightarrow{yields} \frac{x}{a}-\frac{y}{b} = 0$$

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$$

$$y = \frac{b}{a}x$$



المعادلة الأخيرة هي معادلة خط مستقيم، اي ان شكل المسار في حالة كون فرق الطور مساوياً للصفر هو خط مستقيم يمر من نقطة الأصل وميله مقدار موجب ويساوي $(slope = b/a)$ كما موضح بالشكل المجاور.

2- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = \pi/4)$

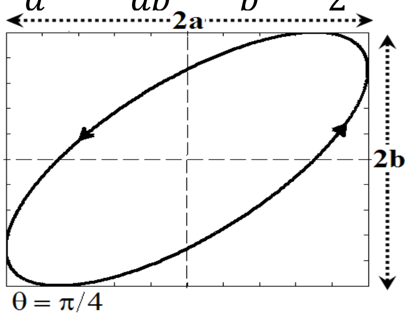
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\theta = sin^2\theta \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\frac{\pi}{4} = sin^2\frac{\pi}{4} \quad , \qquad sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}xy}{ab}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

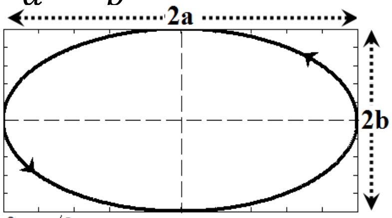
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\sqrt{2}xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$



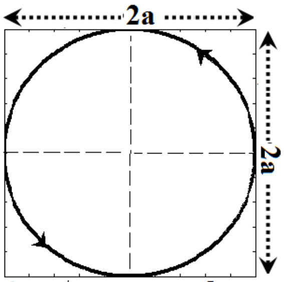
يكون شكل المسار قطع ناقص مائل، ويكون اتجاه حركة الجسيم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

3- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينها فرق طور$(\theta = \pi/2)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\theta = sin^2\theta \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{2}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\frac{\pi}{2} = sin^2\frac{\pi}{2} \quad , \quad sin\frac{\pi}{2}=1\,, \quad cos\frac{\pi}{2}=0$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}(0) = (1)^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$


$\theta=\pi/2$

يكون شكل المسار قطع ناقص محوراه الأساسيان على امتداد المحورين x وy، ويكون اتجاه حركة الجسيم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما موضح بالشكل المجاور.


$\theta=\pi/2$ a=b

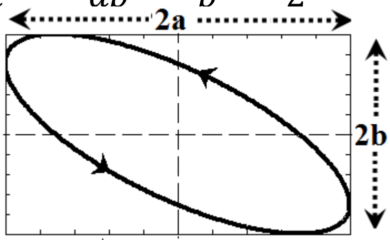
في حالة خاصة اذا كانت سعتي الحركتين متساويان $(a = b)$

فان معادلة المسار ستكون:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$
$$x^2+y^2=a^2$$

و يكون المسار على شكل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a. وكما هو موضح بالشكل المجاور.

4-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور$(\theta = 3\pi/4)$

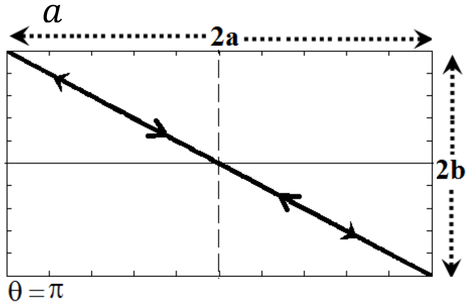
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\theta = sin^2\theta \quad , \quad \theta=\frac{3\pi}{4}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\frac{3\pi}{4} = sin^2\frac{3\pi}{4}$$
$$But\ we\ have \quad sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad cos\frac{3\pi}{4}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}xy}{ab}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\sqrt{2}xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$


$\theta=3\pi/4$

يكون شكل المسار قطع ناقص مائل، ويكون اتجاه حركة الجسيم باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

4- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = \pi)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\theta = sin^2\theta \quad , \quad \theta = \pi$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}cos\pi = sin^2\pi$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}(-1) = (0)^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2} = 0$$
$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 0$$
$$y = \frac{-b}{a}x$$



من المعادلة الأخيرة نستنتج ان معادلة المسار للجسيم المتحرك تحت تأثير حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وبينهما فرق في الطور $(\theta = \pi)$ هي معادلة خط مستقيم ميله سالب، وكما هو موضح بالشكل المجاور.

ثانياً: طريقة المتجه الدوار

في هذه الطريقة يتم تحديد المسار الذي يسلكه الجسيم الواقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين بطريقة هندسية، تقوم هذه الطريقة على الاستفادة من علاقة الحركة التوافقية البسيطة بالحركة الدائرية بسرعة منتظمة. نفرض ان الجسيم يتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الأولى بالاتجاه الأفقي والثانية بالاتجاه العمودي معرفة بالصيغتين:

$$x = asin(\omega t + \theta)$$
$$y = bsin\omega t$$

لرسم المسار (أشكال ليساجو) الذي يسلكه الجسيم الواقع تحت تأثير الحركتين نقوم بالخطوات التالية:

1- باستعمال الفرجال نرسم دائرتين احداها تمثل الحركة التوافقية الأفقية بنصف قطر مقداره (a)، والثانية تمثل الحركة التوافقية العمودية بنصف قطر مقداره (b) وباعتماد مقياس رسم مناسب.

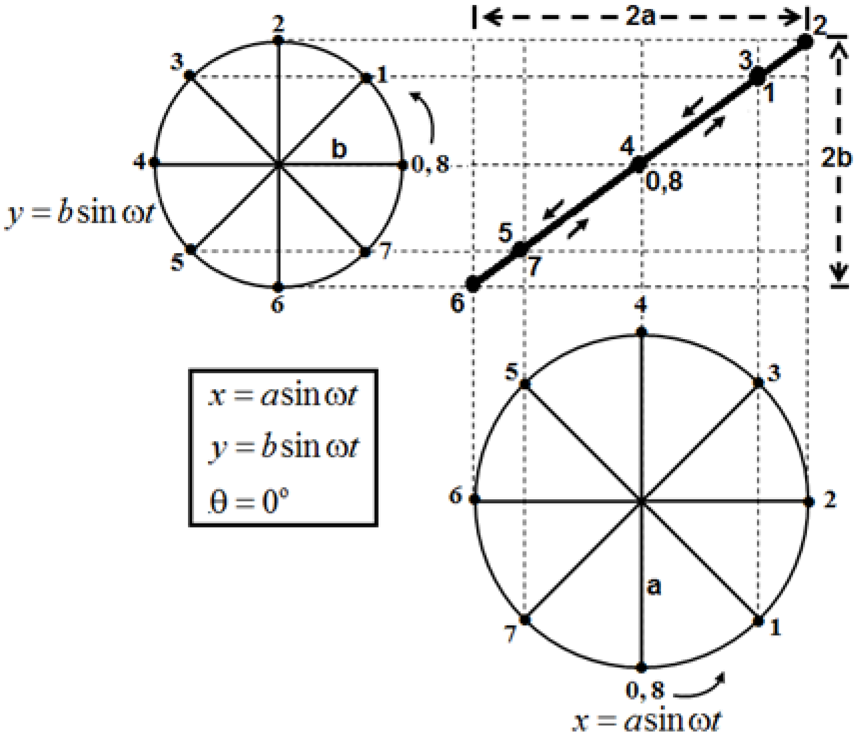
2- باستعمال المنقلة نقسم كل دائرة إلى عدد معين من الأجزاء بالاعتماد عدد نقاط الرسم المطلوبة و زاوية الطور الابتدائية. وفي حالة كون زاوية فرق الطور مضاعفات $(\pi/4)$ يفضل التقسيم إلى ثمانية أجزاء.

3- نرقم كل جزء تصاعدياً $(0,1,2,..)$ وباتجاه معاكس اتجاه حركة عقارب الساعة بداية من موضع الاتزان في حركة كون زاوية فرق الطور الابتدائي مساوية للصفر، وفي حالة كون هناك طور ابتدائي يتم تحديد الإزاحة الزاوية قياساً من موضع الاتزان ويبدأ الترقيم $(0,1,2,3,..)$ من الموضع الجديد.

4- نحدد نقاط تقاطع كل جزئيين متقابلين في الدائرتين ونحصل على المسار بالتوصيل بين تلك النقاط.

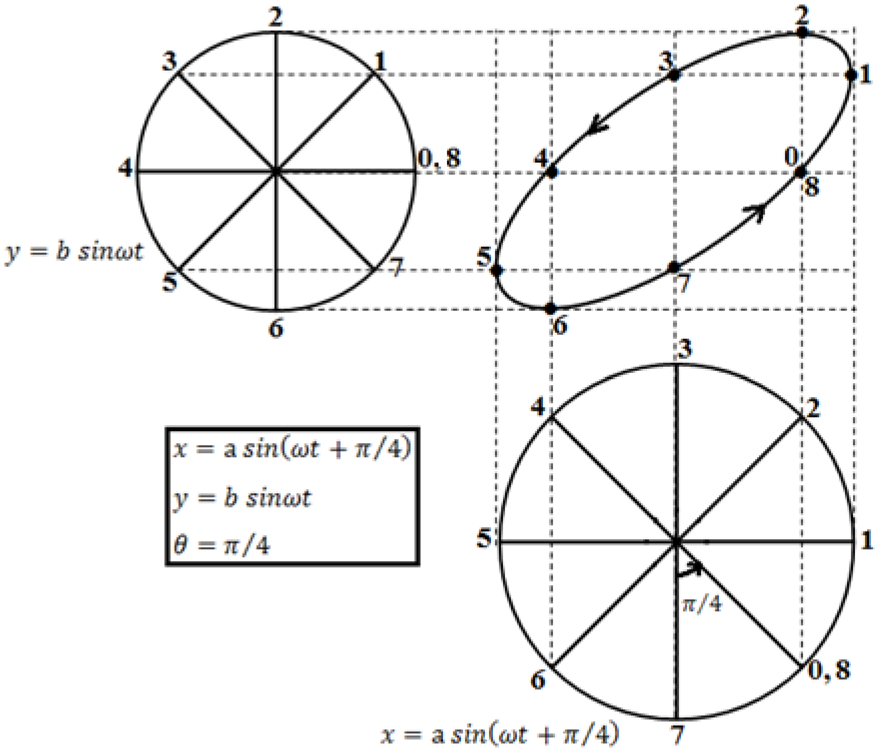
فيما يلي بعض الأمثلة لرسم مسار الجسم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد بطريقة المتجه الدوار:

1- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد والطور$(\theta = 0)$ بطريقة المتجه الدوار

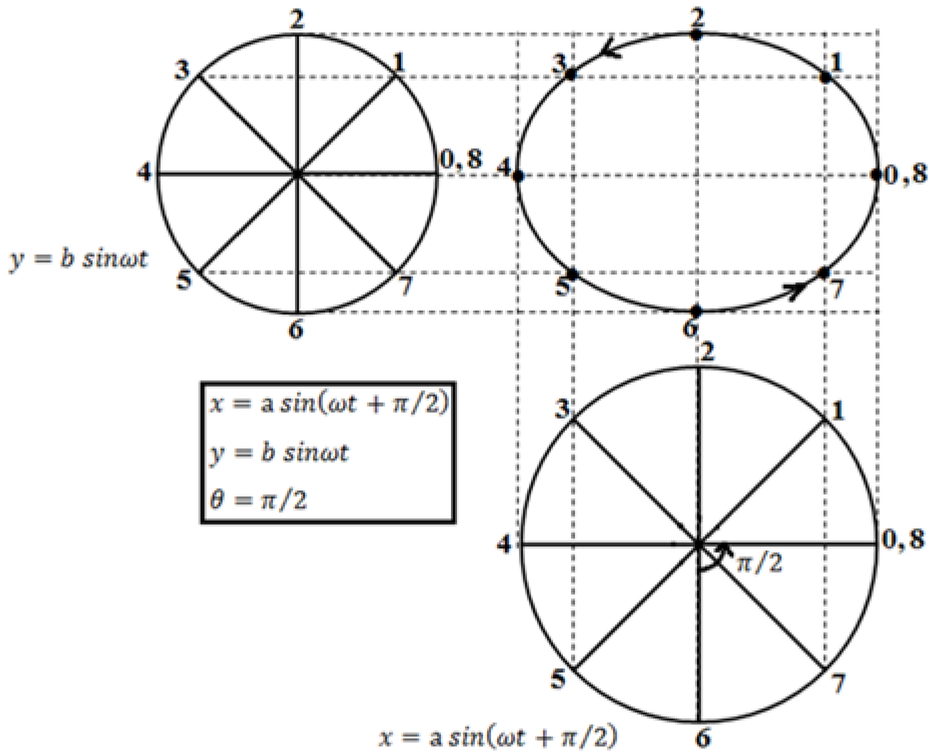


نلاحظ من الشكل مسار الجسيم المتحرك بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس الطور بطريقة المتجه الدوار هو خط مستقيم ميله موجب، وهو نفس المسار الذي تحصلنا عليه بالطريقة التحليلية.

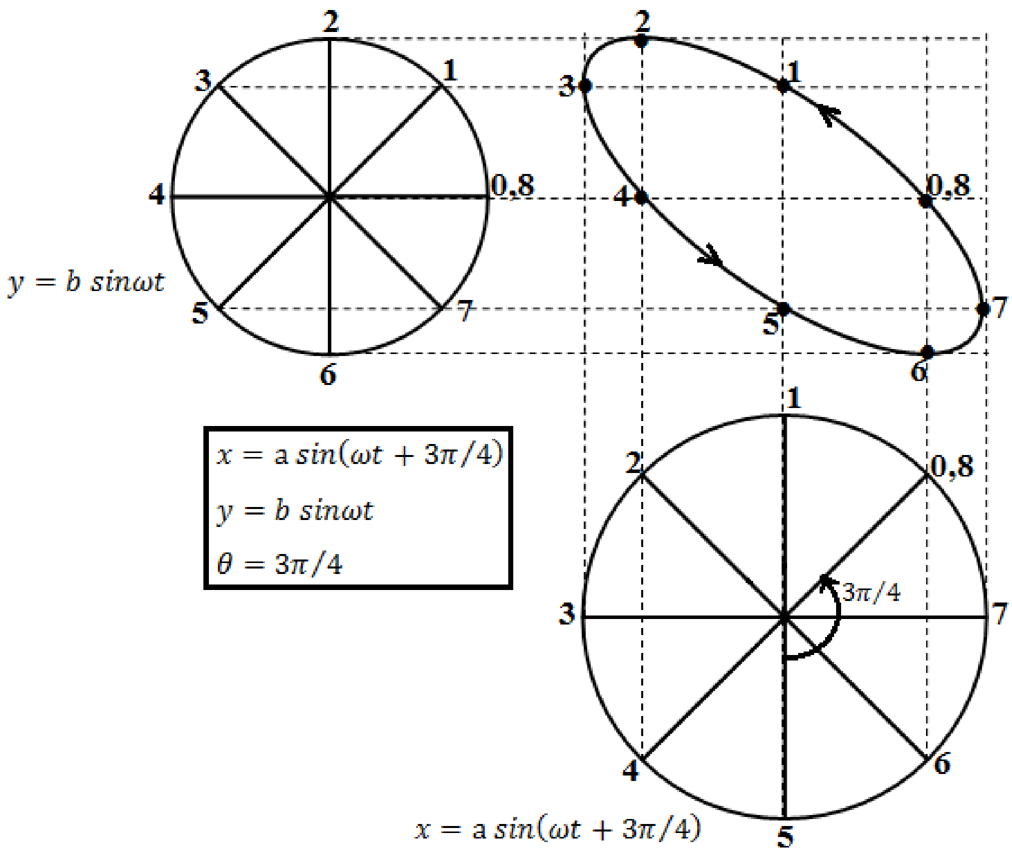
2- مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور$(\theta = \pi/4)$



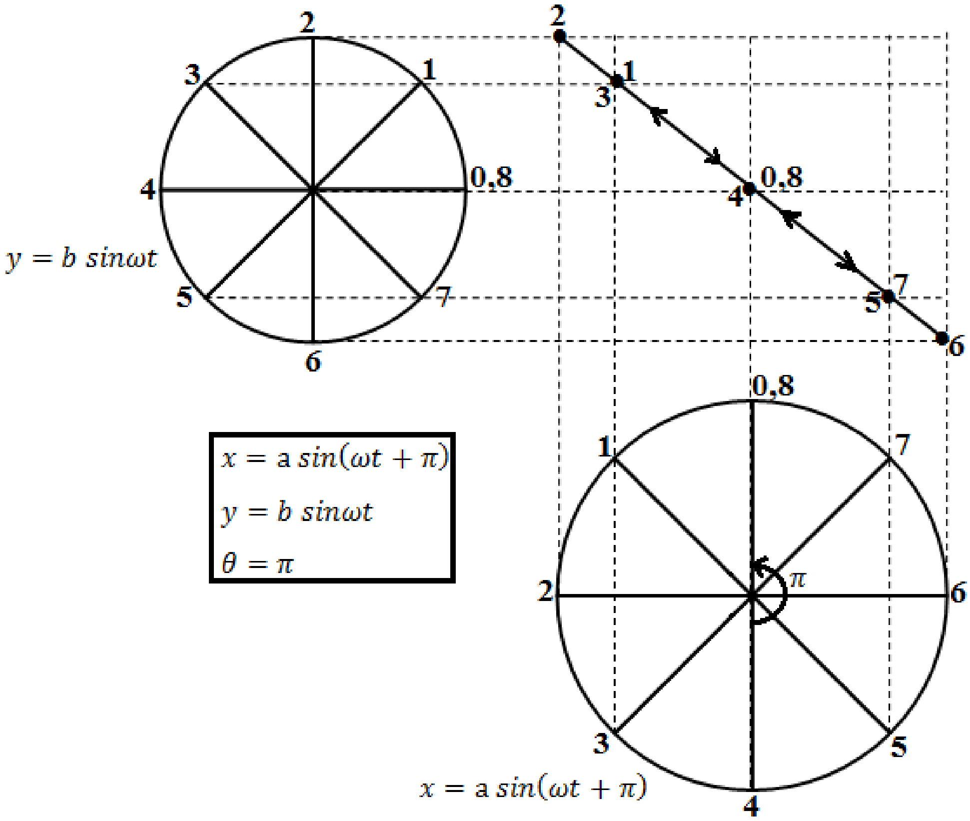
3-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = \pi/2)$ بطريقة المتجه الدوار:



4-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور $(\theta = 3\pi/4)$ بطريقة المتجه الدوار



5-مسار الجسيم بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين متساويتين بالتردد وبينهما فرق طور$(\theta = \pi)$ بطريقة المتجه الدوار



أسئلة الفصل الثالث

س1: عرف كل من/ مبدأ التراكب، الضربات، اشكال ليساجو.

س2: اثبت ان محصلة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين هي حركة توافقية بسيطة.

س3: اشتق الصيغة العامة لسعة وطور الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد في بعد واحد، ثم ناقش كون الحركتين المتراكبتين:1− بنفس الطور. 2−متعاكسة بالطور.

س4: اشتق الصيغة الرياضية الخاصة بدالة الإزاحة الآنية في حالة الضربات.

س5: في حالة الضربات اثبت ان الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين تساوي الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين.

س6: اشتق الصيغة العامة لمعادلة المسار لجسيم متحرك بتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد.

س7: التردد الأقل لشوكتين رنانتين هو $(1200Hz)$، وان دورة كاملة من التغيرات في أشكال ليساجو تحدث خلال (4s) احسب تردد الشوكة الرنانة الأخرى.

س8: اكتب معادلة المسار لجسيم يتحرك بتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد، ثم استنتج شكل المسار (مع الرسم) لكل حالة من حالات فرق الطور:

$(\theta = 0,\ \pi/4\ ,\ \pi/2\ ,\ 3\pi/4\ ,\pi\ ,\ \pi/3\ )$

س9: باعتماد طريقة المتجه الدوار وباستعمال المنقلة و الفرجال ارسم شكل المسار الذي يسلكه جسيم واقع تحت تأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد في كل حالة من حالات فرق الطور:

$(\theta = 0,\ \pi/4\ \ ,\ \pi/2\ ,3\pi/4,\ \pi\ ,\pi/6\ )$

س10: باستعمال طريقة المتجه الدوار ارسم أشكال ليساجو لتراكب كل زوج من الحركات التوافقية التالية:

$$a)\begin{cases} x = 3\,sin(45\pi t + \pi) \\ y = 4\,sin\,45\pi t \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x = 3\,sin(12\pi t + \pi/4) \\ y = 4\,sin\,12\pi t \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x = 3\,sin(42\pi t + 3\pi/4) \\ \ y = 3\,sin\,42\pi \end{cases} \qquad d)\begin{cases} \ x = 3\,sin(32\pi t + \pi/4) \\ y = 4\,sin(32\pi t + \pi/2) \end{cases}$$