# الفصل الثاني

# نظرية الاهتزاز الحر

## 1.2 الحركة الاهتزازية

## 2.2 الحركة التوافقية البسيطة

## 3.2 حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة

## 4.2 طاقة المهتز التوافقي البسيط

## 5.2 تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة

### 1.5.2 البندول البسيط

### 2.5.2 كتلة متصلة بين نابضين متماثلين

### 3.5.2 البندول الفيزيائي

### 4.5.2 بندول الليّ

### 5.5.2 الجسم الطافي

تُعد الاهتزازات واحدة من اهم الظواهر التي يهتم بها علم الفيزياء، فجميع الأجسام لها القابلية على الاهتزاز وبصيغ مختلفة. الأجسام الصغيرة عادة ما تهتز بشكل سريع، بينما الأجسام الضخمة تهتز ببطء. فجناح البعوضة على سبيل المثال تهتز لمئات المرات في الثانية مولدة الصوت للمميز لها. بينما تهتز الكرة الأرضية أحيانا مرة بالساعة عند حدوث الزلازل. وكذلك فان الذرات التي تكوّن المادة وجد انها في حالة اهتزاز دائم. والأكثر من ذلك فان قلب الانسان ورئتيه في حالة اهتزاز. وكذلك فان الانسان لا يمكنه ان يصدر صوتاً لولا اهتزاز أوتاره الصوتية في حنجرته، وكذلك لم يكن بإمكاننا سماع الأصوات لولا اهتزاز طبلة الأذن.

اما علاقة الصوت والحركة الموجية بالاهتزاز فتتضح من حقيقة ان أي صوت لا يمكن توليده إلا بوجود جسم مهتز، وان انتقال الصوت في وسط ما لا يتم إلا من خلال اهتزاز جسيمات ذلك الوسط، ومن ذلك تتضح أهمية دراسة الاهتزازات لفهم نشأة الصوت وانتشاره والحركة الموجية بشكل عام.

## 1.2 الحركة الاهتزازية

ان أي جسم يمتلك خاصيتي المرونة والقصور الذاتي تكون له القابلية على الاهتزاز اذا ما استثير. وتعرف **الحركة الاهتزازية** بانها حركة ذهاب وإياب حول نقطة ثابتة تدعى موضع الاتزان. وهي نقطة تكون فيها محصلة القوى المؤثرة مساوية للصفر وهي نقطة سكونه عندما يتوقف عن الاهتزاز.

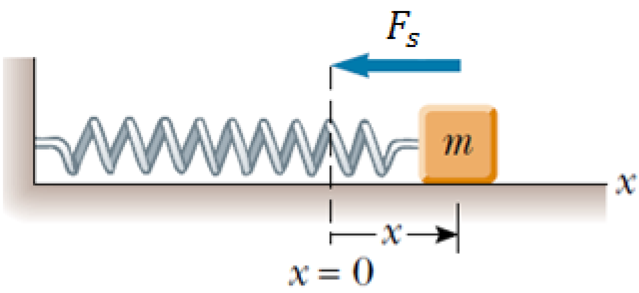
ان السمة الأساسية المشتركة في الحركة الاهتزازية هي الدورية (periodicity) حيث يكون الاهتزاز بنمط من الحركة يتكرر بفترات زمنية متساوية. ان ذلك النمط قد يكون بسيطاً أو معقداً.

يقصد **بالاهتزاز الحر** هو حركة الجسم الاهتزازية تحت تأثير قوة الاستعادة فقط ويتم تجاهل أي قوى أخرى تعيق الحركة. تعرف **الحركة الدورية**(Periodic Motion) بانها حركة الجسم في مسار محدد تتكرر في فترات زمنية متساوية. هناك العديد من الأمثلة لحركات دورية بسيطة تتبع نظام حركة محدد يطلق عليه حركة توافقية بسيطة مثل اهتزاز بندول، جسم طافي، جسم معلق بنابض، وغيرها. وتكتسب دراسة الحركة التوافقية البسيطة أهمية كبيرة فهي من جهة تفسر الحركات الدورية البسيطة، ومن جهة ثانية فهي تتيح دراسة الحركات الدورية المعقدة من خلال تبسيطها إلى تركيب يتألف من مجموعة حركات توافقية بسيطة.

## 2.2الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion (SHM)

**الحركة التوافقية البسيطة** هي حالة خاصة من الحركة الدورية، وتعرف على انها حركة الجسم الناشئة بسبب قوة استعادة (Restoring Force) متناسبة خطياً مع مقدار الإزاحة عن موضع الاتزان ويكون اتجاهها دائما باتجاه موضع الاتزان.

لاشتقاق معادلة الحركة التوافقية البسيطة، نفرض ان لدينا جسم كتلته $(m)$ موضوع على سطح أفقي املس (عديم الاحتكاك) و متصل بأحد طرفي نابض وطرف النابض الثاني مثبت بإحكام. كما هو موضح بالشكل التالي.




ان قوة الاستعادة تتناسب طردياً مع قيمة الإزاحة لذا يمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$F_s = -kx \qquad (1)$$

حيث $k$ هو ثابت التناسب يسمى ثابت النابض وقيمته تعتمد على طبيعة النابض، إشارة السالب وضعت في العلاقة للدلالة على ان اتجاه القوة المعيدة هي باتجاه معاكس لاتجاه الزيادة في الإزاحة $(x)$.

من قانون نيوتن الثاني في الحركة لدينا:

$$\sum F = ma \qquad (2)$$

حيث $m$ هي كتلة الجسم و $a$ تعجيل الجسم. بالتعويض عن محصلة القوى من المعادلة (1) في معادلة الحركة (2) نحصل على:

$$ma = -kx$$

من تعريف التعجيل لدينا$(a = d^2x/dt^2 = \ddot{x})$ ، وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

نفرض ان $(\omega_o^2 = k/m)$ عندها نحصل على:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

المعادلة الأخيرة تعرف بمعادلة الحركة التوافقية البسيطة في بعد واحد.

## 3.2 حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة

يقصد بحل المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة هو إيجاد الدالة التي تعبر عن تغير إزاحة الجسم المهتز بدلالة الزمن والتي تحقق المعادلة التفاضلية الخاصة بالحركة، وبمعرفة تلك الدالة يمكننا ان نحدد موضع، سرعة ، تعجيل، وطاقة الجسم المهتز.

سبق ان وجدنا ان المعادلة التفاضلية للمهتز التوافقي البسيط معرفة بالصيغة:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

- نفرض ان حل المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة معرفة بالدالة:

$$x = \mathrm{A} sin\omega_o t$$

حيث $(\mathrm{A})$ هو ثابت اختياري يتحدد قيمته بتطبيق الشروط الابتدائية.

$$\dot{x} = \mathrm{A}\omega_o cos\omega_o t$$

$$\ddot{x} = -\mathrm{A}\omega_o^2 sin\omega_o t$$

للتحقق من كون الدالة تمثل حل للمعادلة التفاضلية، نعوض عن $(\dot{x})$ و $(\ddot{x})$ في المعادلة التفاضلية:

$$(-\mathrm{A}\omega_o^2 sin\omega_o t) + \omega_o^2(\mathrm{A} sin\omega_o t) = 0$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان الدالة $(x = \mathrm{A} sin\omega_o t)$ تمثل حل خاص للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة.

بالمقابل هناك حل آخر للمعادلة التفاضلية للمهتز التوافقي البسيط يعرف بالصيغة:

$$x = \mathrm{B} cos\omega_o t$$

حيث $(\mathrm{B})$ هو ثابت اختياري، وبنفس الطريقة السابقة يمكننا إثبات ان الدالة المقترحة تمثل حل للمعادلة التفاضلية وكما يلي:

$$\dot{x} = -\mathrm{B}\omega_o sin\omega_o t$$

$$\ddot{x} = -\mathrm{B}\omega_o^2 cos\omega_o t$$

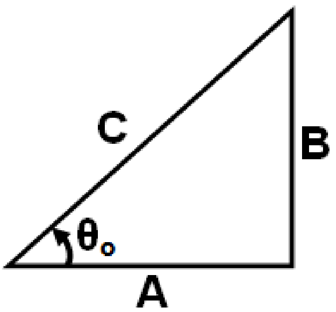
وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$(-\mathrm{B}\omega_o^2 cos\omega_o t) + \omega_o^2(\mathrm{B} cos\omega_o t) = 0$$

نستنتج مما سبق ان كل من الحلين المقترحين$(x = \mathrm{A} sin\omega_o t)$ و $(x = \mathrm{B} cos\omega_o t)$ يمثلان حلين للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة، ويكون الحل العام هو عبارة عن حاصل جمع الحلين، أي ان الحل العام يكون بالصورة:

$$x = \mathrm{A} sin\omega_o t + \mathrm{B} cos\omega_o t$$

حيث A و B هي ثوابت اختيارية يمكن إيجادها بتطبيق الشروط الابتدائية للحركة.




هناك صيغة ثانية للحل العام اكثر ملائمة بحيث يتضمن الحل العام دالة جيبية واحدة (جيب ***sin*** أو جيب تمام ***cos***) وثابتين اختياريين هما **C** و $\theta_o$ ، كما هو موضح بالشكل المجاور. حيث يمثل A و B الضلعين القائمين في مثلث قائم الزاوية بينما يمثل C الوتر فيها و الزاوية $\theta_o$ تمثل الزاوية المقابلة للضلع القائم. من حساب المثلثات لدينا:

من الشكل نستنتج ان:

$$A = C\cos\theta_o \qquad , \qquad B = C\sin\theta_o$$

بالتعويض عن الثابتين (A) ، (B) في معادلة الحركة نحصل على:

$$x = C\cos\theta_o\sin\omega_o t + C\sin\theta_o\cos\omega_o t$$

بالاستفادة من المتطابقة المثلثية:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$x = C\sin(\omega_o t + \theta_o)$$

العلاقة الأخيرة تمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة حيث تمثل:

$x$ الإزاحة الآنية في اللحظة الزمنية $t$ ، C اكبر قيمة يمكن ان تصل اليها الإزاحة وتسمى بالسعة (**Amplitude**)، ($\omega_o$) التردد الزاوي للمهتز التوافقي، ($\theta_o$) زاوية الطور الابتدائية و هي قيمة ثابتة تحددها الشروط الابتدائية للحركة (زاوية الطور في لحظة بدأ الحركة $t = 0$).

فيما يلي بعض التعاريف المتعلقة بالحركة التوافقية البسيطة:

**الذبذبة الكاملة (Complete Vibration):** هي حركة الجسم التي يقطع فيها المسار ذهاباً وإياباً.

**الزمن الدوري (Periodic Time):** هو الزمن اللازم إنجاز ذبذبة كاملة ويرمز له بالرمز (**T**).

**التردد(Frequency):** عدد الذبذبات التي يصنعها الجسم المهتز في وحدة الزمن ويرمز له بالرمز ( $f$ )، يرتبط التردد بالزمن الدوري بالعلاقة ( $f = \frac{1}{T}$ ) وحدة التردد هو هيرتز (Hertz) ويرمز له بالرمز (Hz).

يمكن التعبير عن السرعة الآنية والتعجيل الآني للجسم المتحرك بحركة توافقية بسيطة بالاعتماد على دالة الإزاحة الآنية للمهتز التوافقي البسيط وكما يلي:

$$v = \dot{x} = C\omega_o cos(\omega_o t + \theta_o)$$

$$v = v_o cos(\omega_o t + \theta_o)$$

العلاقة الأخيرة تمثل السرعة الآنية للمهتز التوافقي البسيط، حيث تمثل $(v_o = C\omega_o)$ اقصى قيمة يمكن ان تصل اليها السرعة للمهتز التوافقي البسيط.

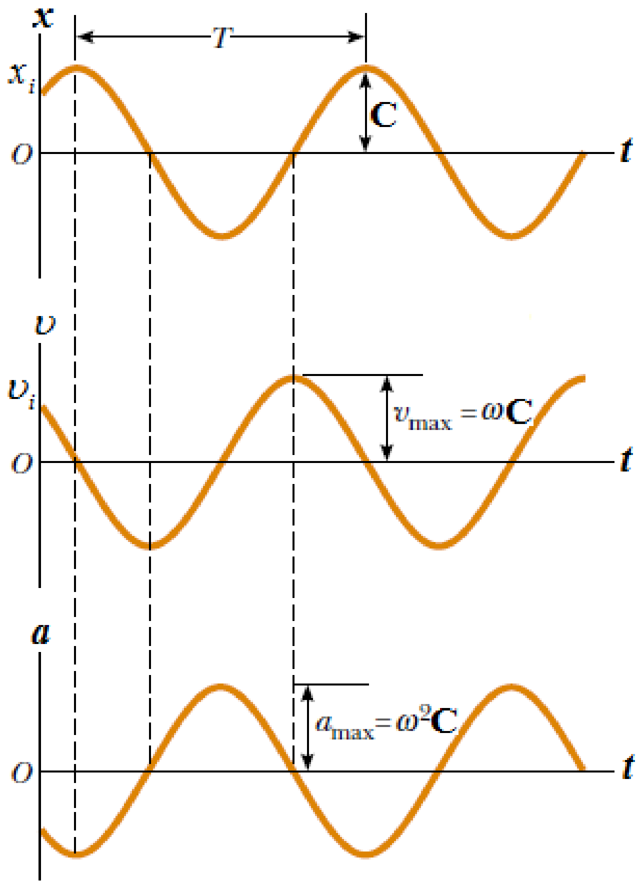
بنفس الطريقة يمكننا ان نجد الصيغة الخاصة بالتعجيل الآني للمهتز التوافقي البسيط، وكما يلي:

$$a = \ddot{x} = -C\omega_o^2 sin(\omega_o t + \theta_o)$$

$$a = -\omega_o^2 x$$

من العلاقة الأخيرة تستنتج ان التعجيل الآني يكون صفراً في موضع الاتزان، وعندما تكون الإزاحة في اقصى قيمة يكون التعجيل في اقصى قيمة $(C\omega_o^2)$.

الشكل التالي يوضح تغير كل من الإزاحة، السرعة، التعجيل لمهتز توافقي بسيط له زاوية طور ابتدائية معينة، يلاحظ انه في أي لحظة زمنية معينة فان هناك فرق في الطور بين الإزاحة والسرعة مقدارها $(90^o)$، وكذلك فان هناك فرق في الطور مقداره $(180^o)$ بين الإزاحة والتعجيل.



# 4.2 طاقة المهتز التوافقي البسيط

## 1.4.2 الطاقة الكلية للمهتز التوافقي البسيط

نفرض ان لدينا جسم كتلته $m$ موضوع على سطح أفقي املس ومتصل بطرف نابض ثابته $k$ ويتحرك بحركة توافقية بسيطة، ان الطاقة الكلية E في هذه الحالة تعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{E} = \mathrm{P.E} + \mathrm{K.E}$$

حيث تمثل P. E الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي، وتمثل K. E الطاقة الحركية له.

ان الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي تعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{P.E} = -\int_0^x \mathrm{F}dx$$

حيث تمثل F القوة المؤثرة على الجسم، وهي في هذه الحالة القوة المعيدة والتي سبق وان عرفناها بالصيغة $(F = -kx)$ وبالتعويض في معادلة الطاقة الكامنة نحصل على:

$$\mathrm{P.E} = -\int_0^x (-kx)dx$$

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2}kx^2$$

بالتعويض عن الإزاحة الآنية للمهتز التوافقي بالصيغة $[x = \mathrm{C}\,sin(\omega_o t + \theta)]$ نحصل على:

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2}k\mathrm{C}^2 sin^2(\omega_o t + \theta)$$

اما الطاقة الحركية للمهتز التوافقي فتعطى بالصيغة:

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2}mv^2$$

حيث تمثل $(m)$ كتلة الجسم، $(v)$ سرعته. في حالة الحركة التوافقية البسيطة فان السرعة الآنية يعبر عنها بالصيغة $[\,v = \mathrm{C}\omega_o\, cos(\omega_o t + \theta)]$ وبالتعويض في معادلة الطاقة الحركية نحصل على:

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2}m[\mathrm{C}\omega_o \cos(\omega_o t + \theta)]^2$$

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2}m\mathrm{C}^2\omega_o^2 cos^2(\omega_o t + \theta)$$

وحيث ان التردد الزاوي في هذه حالة معرف بالصيغة $(\omega_o^2 = k/m)$ وبالتعويض نحصل على:

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2}k\mathrm{C}^2 cos^2(\omega_o t + \theta)$$

بالتعويض عن الطاقة الكامنة والطاقة الحركية في معادلة الطاقة الكلية نحصل على:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}k\mathrm{C}^2 sin^2(\omega_o t+\theta)+\frac{1}{2}k\mathrm{C}^2 cos^2(\omega_o t+\theta)$$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}k\mathrm{C}^2[sin^2(\omega_o t+\theta)+cos^2(\omega_o t+\theta)]$$

من المتطابقات المثلثية لدينا $[sin^2\alpha+cos^2\alpha=1]$ وبالتعويض في علاقة الطاقة نحصل على:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}k\mathrm{C}^2$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان الطاقة الكلية للمهتز التوافقي البسيط تساوي كمية ثابتة في أية لحظة زمنية وان الطاقة الكلية للمهتز التوافقي تتناسب طردياً مع مربع سعة اهتزاز.

## 2.4.2 إيجاد العلاقة التي تربط السرعة والإزاحة الآنية للمهتز التوافقي البسيط باستعمال مفهوم حفظ الطاقة

نفرض ان لدينا جسم كتلته $m$ موضوع على سطح أفقي املس ومتصل بطرف نابض ثابته $k$ ويتحرك بحركة توافقية بسيطة سعتها C ، ان الطاقة الكلية (E) تكون محفوظة و تعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{E}=\mathrm{P.E}+\mathrm{K.E}=\tfrac{1}{2}k\mathrm{C}^2$$

ان الطاقة الحركية والطاقة الكامنة معرفة بالصورة:

$$\mathrm{P.E}=\frac{1}{2}kx^2 \quad , \quad \mathrm{K.E}=\frac{1}{2}mv^2$$

حيث $(x)$ هي الازاحة الآنية للجسم، و $(v)$ هي السرعة الآنية للجسم.

بالتعويض عن قيمتي الطاقة الحركية والكامنة في معادلة الطاقة الكلية نحصل على:

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k\mathrm{C}^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k\mathrm{C}^2-\frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(\mathrm{C}^2-x^2)$$

بترتيب الحدود نحصل على:

$$v^2=\frac{k}{m}(\mathrm{C}^2-x^2)$$

من تعريف التردد الزاوي للمهتز التوافقي البسيط لدينا $\left(\omega_o^2 = \frac{k}{m}\right)$ وبالتعويض نحصل على:

$$v^2 = \omega_o^2(\mathrm{C}^2 - x^2)$$

بجذر طرفي المعادلة نحصل على:

$$v = \pm\omega_o\sqrt{\mathrm{C}^2 - x^2}$$

العلاقة الأخيرة تعطي السرعة الآنية للمهتز التوافقي البسيط بدلالة الإزاحة الآنية.

## 3.4.2 متوسط الطاقة الكامنة ومتوسط الطاقة الحركية للمهتز التوافقي

وجدنا مما سبق ان طاقة المهتز التوافقي البسيط عبارة عن حاصل جمع طاقته الكامنة مع طاقته الحركية بحيث يبقى مجموع الطاقتين (الطاقة الكلية) ثابت دائماً، وسنقوم بأثبات ان متوسط الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي البسيط خلال دورة كاملة يساوي متوسط الطاقة الحركية له خلال نفس الدورة وكما يلي:

### أولاً: متوسط الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي البسيط

يمكن التعبير عن الطاقة الكامنة الآنية للمهتز التوافقي البسيط بالصيغة:

$$\mathrm{P.E} = -\int_0^x F dx$$

لإيجاد الصيغة الخاصة بالقوة نستفيد من قانون نيوتن الثاني $(\mathrm{F} = ma)$, وفي حالة المهتز التوافقي سبق ان وجدنا التعجيل معبر عنه بالصيغة $(a = -\omega_o^2 x)$ وبالتعويض في معادلة الطاقة الكامنة نحصل على:

$$\mathrm{P.E} = \int_o^x m\omega_o^2\, x dx \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P.E} = \frac{1}{2}m\omega_o^2 x^2$$

وحيث ان الإزاحة الآنية يعبر عنها بالصيغة$[x = \mathrm{C}\, sin(\omega_o t + \theta)]$ وبالتعويض في معادلة الطاقة الكامنة نحصل على:

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2}m\omega_o^2[\mathrm{C}\, sin(\omega_o t + \theta)]^2$$

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2}m\omega_o^2\mathrm{C}^2 sin^2(\omega_o t + \theta)$$

ان المعادلة الأخيرة تمثل معادلة الطاقة الكامنة الآنية (الطاقة الكامنة في اللحظة $t$)، ولإيجاد متوسط الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي البسيط نستفيد من العلاقة الرياضية التي تعبر عن متوسط أي دالة دورية $f(t)$:

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_o^{\mathrm{T}} f(t)dt$$

حيث تمثل $\overline{f(t)}$ متوسط الدالة $f(t)$ ، بينما تمثل T الزمن الدوري.

ومنه يمكننا ان نعبر عن متوسط الطاقة الكامنة بالصيغة:

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{o}^{\mathrm{T}} \frac{1}{2} m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 sin^2(\omega_o t + \theta)dt$$

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)\int_{o}^{\mathrm{T}} sin^2(\omega_o t + \theta)dt$$

لحل التكامل نستفيد من المتطابقة المثلثية $\left[sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - cos2\alpha)\right]$ وبالتعويض نحصل على:

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)\int_{o}^{\mathrm{T}} [1 - cos2(\omega_o t + \theta)]dt$$

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)\left\{\int_{o}^{\mathrm{T}} dt - \int_{o}^{T} cos2(\omega_o t + \theta)dt\right\}$$

من تكاملات الدوال المثلثية لدينا: $\int_{o}^{T} cos2(\omega_o t + \theta)dt = 0$

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)(\mathrm{T} - 0)$$

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2$$

## ثانياً: متوسط الطاقة الحركية للمهتز التوافقي البسيط

ان الطاقة الحركية الآنية للمهتز التوافقي البسيط تعطى بالصيغة:

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2} m v^2, \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

وحيث ان الإزاحة الآنية معطاة بالعلاقة $[x = \mathrm{C}\, sin(\omega_o t + \theta)]$ ومنه نجد:

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathrm{C}\omega_o \cos(\omega_o t + \theta)$$

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2} m[\mathrm{C}\omega_o \cos(\omega_o t + \theta)]^2$$

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2} m\mathrm{C}^2\omega_o^2 cos^2(\omega_o t + \theta)$$

العلاقة الأخيرة تمثل معادلة الطاقة الحركية الآنية (الطاقة الحركية في اللحظة $t$)، وبنفس الطريقة نجد:

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_o^{\mathrm{T}} \frac{1}{2} m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 cos^2(\omega_o t + \theta)dt$$

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_o^2 C^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) \int_o^{\mathrm{T}} cos^2(\omega_o t + \theta)dt$$

ولحل التكامل نستعمل المتطابقة المثلثية $\left[cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + cos2\alpha)\right]$ وبالتعويض نحصل على:

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) \int_o^{\mathrm{T}} [1 + cos2(\omega_o t + \theta)]dt$$

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) \left\{\int_o^{\mathrm{T}} dt + \int_o^{\mathrm{T}} cos2(\omega_o t + \theta)dt\right\}$$

من تكاملات الدوال المثلثية لدينا: $\int_o^{\mathrm{T}} cos2(\omega_o t + \theta)dt = 0$

$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2 \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) (\mathrm{T} - 0)$$

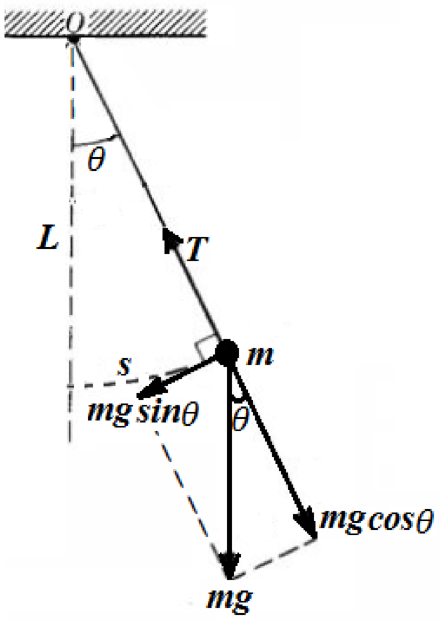
$$\overline{\mathrm{K.E}} = \left(\frac{1}{4}\right) m\omega_o^2 \mathrm{C}^2$$

نلاحظ ان متوسط الطاقة الكامنة خلال دورة واحدة يساوي متوسط الطاقة الحركية خلال نفس الدورة، أي ان الطاقة الكلية للمهتز التوافقي تتوزع بالتساوي على شكلي الطاقة خلال الدورة الواحدة. اي ان:

$$\overline{\mathrm{P.E}} = \overline{\mathrm{K.E}}$$

## 5.2 تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة:

### 1.5.2 البندول البسيط (Simple Pendulum):




يتكون البندول البسيط من جسم ذي أبعاد صغيرة (كروي الشكل عادة) معلق من طرف خيط خفيف ثابت الطول ويثبت الطرف الآخر بإحكام بنقطة ثابتة، كما موضح بالشكل المجاور.

اذا سحبنا كرة البندول جانبياً بمسافة صغيرة عن موضع استقرارها واطلقناها فستتذبذب حول موضع الاستقرار ويكون مسارها على قوس دائرة نصف قطرها يساوي طول البندول (L) ومركزها في نقطة التعليق. لدراسة حركة البندول ينبغي لنا ان نحلل القوى المؤثرة، وهي قوة جذب الأرض لكرة البندول $(mg)$.

- ان قوة جذب الأرض $(mg)$ لكرة البندول تتحلل إلى مركبتين كما هو موضح بالشكل السابق:

1- مركبة باتجاه امتداد الخيط $(mg\cos\theta)$ وتتولد في الخيط قوة شد $T$ تساوي تلك المركبة في المقدار وتعاكسها في الاتجاه $(T = mg\cos\theta)$ . ولذلك تكون محصلة تلك القوتين مساوية للصفر.

2- مركبة باتجاه عمودي على اتجاه الخيط $(mg\sin\theta)$ ويكون اتجاها دائماً باتجاه موضع الاتزان وتمثل القوة المعيدة المسؤولة عن الحركة وتعطى بالعلاقة:

$$F = -mg\,sin\,\theta$$

إشارة السالب للدلالة على ان اتجاه القوة المعيدة هو بعكس اتجاه زيادة الإزاحة الزاوية $(\theta)$.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الاتجاه العمودي نحصل على:

$$\sum F_T = -mgsin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

حيث تمثل $s$ الإزاحة المقطوعة على طول القوس. في حالة الإزاحة الزاوية الصغيرة يمكن استعمال التقريب $(s = L\theta)$، وحيث ان طول البندول ثابت فان معادلة الحركة يمكن كتابتها بالصورة:

$$-g\,sin\,\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sin\theta$$

في حالة الزوايا الصغيرة $(\theta < 10^o)$ يمكن استعمال التقريب $(sin\theta \approx \theta)$ ، وبالتعويض في معادلة حركة البندول نحصل على:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

بفرض ان $\left[\omega_o^2 = \frac{g}{L}\right]$ ، يمكننا كتابة معادلة حركة البندول بالصيغة:

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$$

المعادلة الأخيرة تمثل معادلة الحركة للبندول البسيط، وهي معادلة تشبه معادلة الحركة للمهتز التوافقي البسيط في بعد واحد $(\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0)$ الحل العام لها يكون بالصيغة:

$$\theta = \theta_{max}\sin(\omega_o t + \theta_o)$$

حيث: $\theta$ تمثل الإزاحة الزاوية لكرة البندول في اللحظة $t$ بالمقياس النصف قطري (radian).

$\theta_{max}$ تمثل اقصى إزاحة زاوية، $\theta_o$ الإزاحة الزاوية الابتدائية (الإزاحة الزاوية في اللحظة $t = 0$) بالمقياس النصف قطري، $(\omega_o)$ تمثل التردد الزاوي.

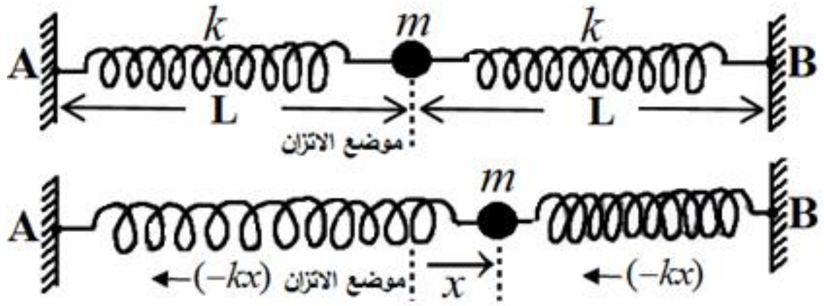
يمكن حساب التردد والزمن الدوري للبندول البسيط من علاقة التردد الزاوي وكما يلي:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad , \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ ان الزمن الدوري للبندول البسيط يعتمد فقط على طول البندول والتعجيل الأرضي ولا يعتمد على كتلة كرة البندول.

## 2.5.2 كتلة متصلة بين نابضين متماثلين:

نفرض ان لدينا جسم كتلته $(m)$ مربوط بين نابضين حلزونيين متماثلين تماماً (نفس الطول L ونفس ثابت النابض $k$) ويكون الجسم موضوع على سطح أفقي املس (عديم الاحتكاك) والطرفان الآخران للنابضين مثبتين في النقطتين A و B كما هو موضح بالشكل التالي:




في حالة إزاحة الجسم إزاحة صغيرة $x$ من موضع الاتزان نحو جهة اليمين فان تشوهاً طولياً يحدث في النابضين، فالنابض الأيسر يتمدد بينما النابض الأيمن ينكمش.

- قوة الاستعادة التي تظهر في النابض الأيسر تكون متجهة نحو اليسار وتساوي$(-kx)$.
- قوة الاستعادة التي تظهر في النابض الأيمن تكون متجهة نحو اليسار وتساوي$(-kx)$.

وعندها فان محصلة القوى المؤثرة على الجسم يمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$\sum F = -kx - kx = -2kx$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة نحصل على:

$$ma = -2kx$$

$$m\ddot{x} + 2kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

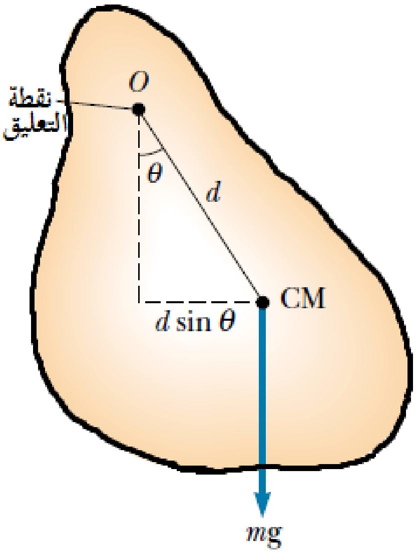
$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \qquad , \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

المعادلة الأخيرة هي نفسها معادلة الحركة التوافقية البسيطة، ان التردد والزمن الدوري للجسم المهتز المتصل بين نابضين متماثلين تعطى بالصيغة:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\mathrm{k}}{m}}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\mathrm{k}}}$$

## 3.5.2 البندول الفيزيائي (البندول المركب) (Physical Pendulum):




هو أي جسم صلب قادر على التذبذب حول أي محور أفقي يمر خلاله. الشكل المجاور يبين جسم صلب كتلته $m$ معلق شاقولياً من النقطة $O$، في حالة إزاحة الجسم إزاحة زاوية $\theta$ عن موضع الاتزان ينشأ عزم تدوير يحاول إرجاع الجسم لوضعية الاستقرار،

ان قيمة عزم التدور يعطى بالعلاقة: $\tau = -(mg) \times (dsin\theta)$

حيث تمثل $d$ المسافة بين نقطة التعليق ومركز ثقل الجسم. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية $[\sum \tau = I\alpha]$ ، نحصل على:

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(mg) \times (dsin\theta)$$

في حالة الإزاحة الزاوية الصغيرة يمكن استعمال التقريب $(sin\theta \approx \theta)$ وبالتعويض نحصل على:

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\ \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgd}{\mathrm{I}}\right)\ \theta = 0$$

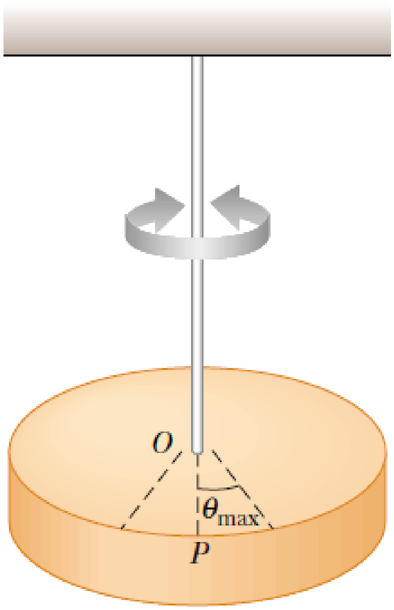
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\ \theta = 0 \quad , \qquad where \quad \omega_o^2 = \frac{mgd}{\mathrm{I}}$$

نلاحظ ان معادلة الحركة هي نفسها معادلة الحركة التوافقية البسيطة، تردد الاهتزاز للبندول الفيزيائي والزمني الدوري له تعطى بالصيغة:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{\mathrm{I}}} \quad , \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{mgd}}$$

يمكن الاستفادة من البندول الفيزيائي في حساب عزم القصور الذاتي لجسم صلب I بمعلومية: الزمن الدوري $T$ ، كتلة الجسم $m$، التعجيل الأرضي g، والمسافة بين نقطة التعليق ومركز ثقل الجسم $d$.

## 4.5.2 بندول الليّ (Torsional Pendulum):




يتكون من قرص اسطواني معلق من مركزه بطرف قضيب أو سلك يتصل بمركز ثقل القرص ويتصل الطرف الآخر بمسند ثابت كما هو موضح بالشكل المجاور.

عند إزاحة القرص بإزاحة زاوية بسيطة $\theta$. فان القضيب (أو السلك) سيولد عزم ليّ متناسب طردياً مع مقدار الليّ الذي يتمثل بمقدار الإزاحة الزاوية $\tau \propto \theta$ ، ومنه فان العزم المُعيد يمكن التعبير عنه بالصورة: $\tau = -\kappa\theta$

حيث $\kappa$ (تقرأ kappa) يمثل ثابت يسمى ثابت الليّ (torsion constant) ويعتمد مقداره على طول وقطر السلك وطبيعة مادته. والإشارة السالبة للدلالة على ان عزم الليّ باتجاه معاكس لاتجاه زيادة الإزاحة الزاوية.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية نحصل على:

$$\sum \tau = \mathrm{I}\alpha$$

$$\tau = \mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$$

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{\mathrm{I}}\theta = 0$$

حيث تمثل I عزم القصور الذاتي للقرص وهي كمية تعتمد على كتلة القرص وشكله الهندسي.

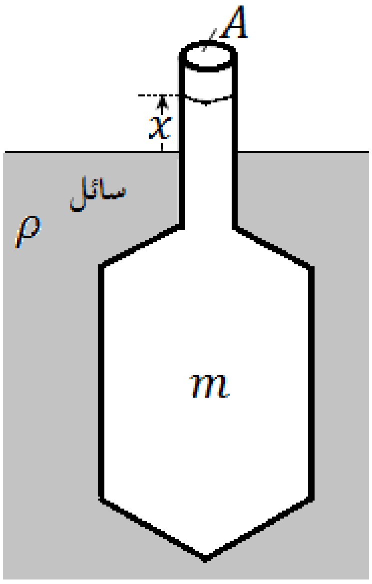
بفرض ان $\left(\omega_o^2 = \frac{\kappa}{\mathrm{I}}\right)$ نحصل على معادلة الحركة لبندول الليّ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\theta = 0$$

التردد والزمني الدوري لبندول الليّ فتعطى بالصيغة:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{\mathrm{I}}} \quad , \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\kappa}}$$

## 5.5.2 الجسم الطافي (Floating Object):




ان أي جسم طافي على سطح سائل اذا ما دفع قليلاً إلى الأسفل أو رفع قليلاً نحو الأعلى ثم ترك حراً فانه سوف يهتز بحركة صعود ونزول عمودية على سطح السائل.

نفرض ان لدينا جسم كتلته $(m)$ يطفو في سائل كثافته $(\rho)$، لتبسيط المسألة نفرض للجسم مقطع عرضي ثابت في المنطقة القريبة من سطح السائل وان مساحة ذلك المقطع العرضي هو $(A)$ كما هو موضح بالشكل المجاور.

عند تحريك الجسم إزاحة بسيطة $(x)$ فان ذلك يسبب إزاحة حجم من السائل يساوي $(Ax)$، وتكون كتلة السائل المزاح مساوياً لحجم السائل المزاح مضروباً في كثافة السائل $(\rho Ax)$.

من ذلك يمكننا التعبير عن قوة الاستعادة بالصيغة:

$$F = -g\rho Ax$$

إشارة السالب للدلالة على ان اتجاه قوة الاستعادة باتجاه معاكس لاتجاه زيادة الإزاحة.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل على:

$$m\ddot{x} = -g\rho Ax$$

بالقسمة على الكتلة و ترتيب الحدود نحصل على:

$$\ddot{x} + \frac{g\rho A}{m}x = 0 \quad , \quad Let \qquad \omega_o^2 = \frac{g\rho A}{m}$$

وبالنتيجة يمكننا كتابة معادلة الحركة للجسم الطافي بالصورة:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

من ذلك نستنتج ان حركة الجسم هي حركة توافقية بسيطة، وان التردد والزمن الدوري للحركة هي:

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\rho A}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g\rho A}}$$

من العلاقتين الأخيرتين نلاحظ ان التردد والزمن الدوري لاهتزاز جسم طافي يعتمد على كتلة الجسم ومساحة المقطع العرضي بالإضافة لكثافة السائل، ومنه يمكننا تحديد كثافة السائل بدلالة كتلة الجسم الطافي ومساحة المقطع العرضي وتردد الاهتزاز.

# أسئلة الفصل الثاني

س1: عرف كل من: الحركة الاهتزازية، الاهتزاز الحر، الحركة التوافقية البسيطة.

س2: اشتق العلاقة التي تربط بين السرعة الآنية والازاحة الآنية للمهتز التوافقي البسيط.

س3: اثبت ان الطاقة الكلية للمهتز التوافقي البسيط هي قيمة ثابتة.

س4: في حالة الحركة التوافقية البسيطة اثبت ان متوسط الطاقة الكامنة تساوي متوسط الطاقة الحركية.

س5: تتذبذب كتلة مقدارها $(10kg)$ معلقة بطرف نابض حلزوني بحركة توافقية بسيطة حول موضع الاتزان وكانت سعة الحركة $(12cm)$ وثابت النابض $(4000N/m)$ اوجد سرعة الكتلة عندما تكون ازاحتها:

أ- (صفر). ب- $(6cm)$. جـ- $(12cm)$.

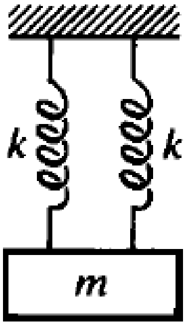
س6: تهتز كتلة$(420g)$ مثبتة بطرف نابض ذهابا وايابا بحيث تعطى ازاحتها المعادلة:

$$x = 12\,sin(32t + \pi/2)\ cm$$

اوجد:1- سعة الحركة. 2- الزمن الدوري. 3- قيمة ثابت النابض. 4-معادلة السرعة الآنية.

س7: اذا علق جسيم كتلته $(10kg)$ من نهاية نابض محلزن يستطيل النابض بمقدار $(1.2cm)$ ، كم ستكون مدة الذبذبة اذا اهتز من نهاية النابض جسيم كتلته $(25kg)$.

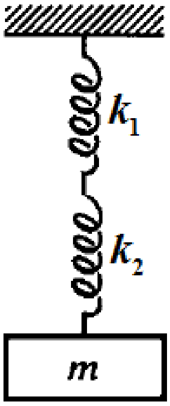
س8: ما هو الزمن الدوري لجسم يهتز بحركة توافقية بسيطة اذا كان تعجيله $(28m/s^2)$ عندما تكون ازاحته $(0.4m)$.




س9: نابضان حلزونيان متماثلان ثابت النابض لهما (k) مربوطان على التوازي بحيث يتصل طرفاها العلويان بسقف والطرفان السفليان بثقل كتلته $(m)$ كما هو موضح بالشكل المجاور. أوجد:

أ- ثابت القوة المكافئ للنابضين.

ب- مقدار الاستطالة الكلية.




**س9:** نابضان حلزونيان مربوطان على التوالي ثبت احد الطرفين بسقف وعلق في الطرف الآخر جسم كتلته $(m)$ كما هو موضح بالشكل المجاور، فاذا كان ثابت القوة لاحدهما $k_1$ وللآخر $k_2$. أوجد:

**أ-** الاستطالة الكلية.

**ب-** ثابت القوة المكافئ للنابضين.