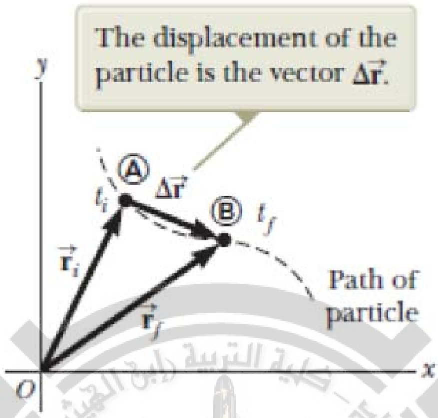
(الحركة في بعدين Motion in Two Dimensions)

4.1 متجهات الموضع والسرعة والتعجيل

نبدأ بوصف موضع الجسيم بوساطة **متجه الموضع** $(\vec{r})$، المرسوم من نقطة أصل نظام الإحداثيات إلى موقع الجسيم في المستوى (xy) كما هو موضح في الشكل.



فعند الزمن t_i، يكون الجسيم عند النقطة (A) ، الموضحة بوساطة متجه الموضع $(\vec{r}_i)$.

في زمن لاحق t_f، يكون الجسيم عند النقطة (B) ، الموضحة بوساطة متجه الموضع $(\vec{r}_f)$.

وليس بالضرورة ان يكون المسار من (A) إلى (B) خطا مستقيما. وعندما يتحرك الجسيم من النقطة (A) إلى النقطة (B) في الفاصلة الزمنية $(\Delta t = t_f - t_i)$ ، يتغير متجه الموضع من $\vec{r}_i$ إلى $\vec{r}_f$.

الآن نعرف **متجه الإزاحة** $(\Delta\vec{r})$ للجسيم باعتباره (الفرق بين متجه الموضع النهائي ومتجه الموضع الأولي):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \qquad (4.1)$$

كما نرى من الشكل أعلاه، فإن قيمة متجه الازاحة $(\Delta\vec{r})$ أقل من المسافة المقطوعة على طول مسار المنحني المقطوع من قبل الجسيم.

- يعطى **متوسط السرعة** $(\vec{v}_{\text{av}})$ للجسيم خلال الفاصلة الزمنية (Δt) من حاصل قسمة إزاحة الجسيم $\Delta\vec{r}$ على الفاصلة الزمنية

$$\vec{v}_{\text{av}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (4.2)$$

- ان ضرب أو قسمة كمية المتجه على كمية عددية موجبة مثل (Δt) يغير فقط من قيمة المتجه، وليس اتجاهه. ونظرا لأن الإزاحة هي كمية متجه والفاصلة الزمنية هي كمية عددية موجبة، نستنتج أن متوسط السرعة هو كمية متجه تكون على طول الازاحة $(\Delta\vec{r})$.
- ان متوسط السرعة بين النقاط تكون مستقلة عن المسار.
- تُعرف **السرعة الآنية** $(\vec{v})$ بأنها (غاية متوسط السرعة $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ عندما تقترب Δt من الصفر):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (4.3)$$

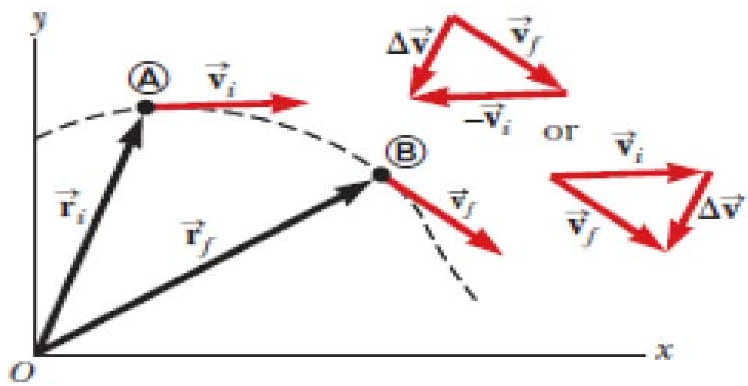
- تدعى قيمة متجه السرعة الآنية $v = |\vec{v}|$ للجسيم بانها **انطلاق** الجسيم ، وهي كمية عددية.
- يُعرف **متوسط تعجيل** $\vec{a}_{\text{av}}$ للجسيم بأنه (التغير في متجه السرعة الآنية $\Delta\vec{v}$ مقسوما على الفاصلة الزمنية Δt التي يحدث فيها هذا التغيير):

$$\vec{a}_{\text{av}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \qquad (4.4)$$

ان متوسط التعجيل هو كمية متجه.

- يُعرف **التعجيل الآني** $\vec{a}$ (بانه قيمة الغاية للنسبة $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ عندما تقترب Δt من الصفر):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (4.5)$$



4.2 الحركة في بعدين بتعجيل ثابت Two-Dimensional Motion with Constant Acceleration

يمكن نمذجة modelled الحركة في البعدين وكأنها حركتين مستقلتين independent في كل اتجاه من الاتجاهات العمودية المرتبطة بمحوري x و y. بمعنى أن أي تأثير في الاتجاه y لا يؤثر على الحركة في الاتجاه x والعكس صحيح.

يمكن كتابة متجه الموضع لجسيم يتحرك في المستوى xy:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \qquad (4.6)$$

وان سرعة الجسيم تعطى بالعلاقة:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} \qquad (4.7)$$

ولتحديد السرعة النهائية في أي زمن t ، كما يلي:

$$\vec{v}_f = (v_{ix} + a_x t)\hat{\imath} + (v_{iy} + a_y t)\hat{\jmath}$$

$$= (v_{ix}\hat{\imath} + v_{iy}\hat{\jmath}) + (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath})t$$

لذلك يكون متجه السرعة كدالة للزمن معطى بالعلاقة

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\, t \qquad (4.8)$$

بنفس الطريقة يكون

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_f = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

بتعويض هذه المعادلات في المعادلة $(\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$ (وتسمية متجه الموضع النهائي بـ $(\vec{r}_f)$ يكون:

$$\vec{r}_f = \left(x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\hat{\imath} + \left(y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_f = (x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath}) + (v_{ix}\hat{\imath} + v_{iy}\hat{\jmath})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath})t^2$$

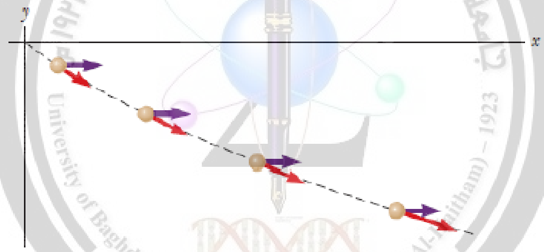
فيكون متجه الموضع كدالة للزمن معطى بالمعادلة

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad (4.9)$$

مثال (4.1): يتحرك جسيم في المستوى xy ، مبتدأ من نقطة الأصل عند الزمن $(t = 0)$ بسرعة ابتدائية لها مركبة على محور - x قيمتها $(20\ \mathrm{m/s})$ ومركبة على محور- y قيمتها $(-15\ \mathrm{m/s})$. يخضع الجسيم لتعجيل في اتجاه المحور- x ، بمقدار $(4\ \mathrm{m/s^2})$.

(A) حدد متجه السرعة الكلي عند أي زمن.

الحل: (A) تخبرنا مركبات السرعة الابتدائية أن الجسيم يبدأ بالتحرك نحو اليمين وإلى الأسفل كما في الشكل الاتي:



تبدأ المركبة- x بسرعة $(20\ \mathrm{m/s})$ وتتزايد بمقدار $(4\ \mathrm{m/s})$ لكل ثانية. اما مركبة السرعة باتجاه y فأنها لا تتغير مطلقا عن قيمتها الابتدائية $(-15\ \mathrm{m/s})$.

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{v}_f = (v_{ix} + a_x t)\hat{\imath} + (v_{iy} + a_y t)\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (20 + 4t)\hat{\imath} + (-15 + 0t)\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (20 + 4t)\hat{\imath} - 15\hat{\jmath} \qquad \mathrm{m/s}$$

(B) احسب سرعة وانطلاق الجسيم عند الزمن $(t = 5\ \mathrm{s})$ والزاوية التي يصنعها متجه السرعة مع المحور- x.

الحل:

$$\vec{v}_f = (20 + 4t)\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = [20 + 4(5)]\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (40\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}) \qquad \mathrm{m/s}$$

اما الزاوية θ فتعطى بالعلاقة

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{40}\right) = -21^{o}$$

تشير الاشارة السالبة للزاوية θ إلى أن متجه السرعة موجه بزاوية θ تحت المحور x الموجب.

ويحسب انطلاق الجسيم من قيمة $\vec{v}_f$ كما يلي

$$v_f = |\vec{v}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (15)^2} = 43 \ \mathrm{m/s}$$

(C) حدد إحداثي x و y للجسيم في أي وقت t و متجه موضعه في هذا الزمن.

$$x_f = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (20t + 2t^2)\ \mathrm{m}$$

$$y_f = v_{yi}t = (-15t) \ \ \mathrm{m}$$

فيكون متجه الموضع للجسيم في أي زمن t:

$$\vec{r}_f = (x_f\hat{\imath} + y_f\hat{\jmath}) = [(20t + 2t^2)\hat{\imath} - 15t\hat{\jmath}] \quad \mathrm{m}$$

4.3 حركة المقذوف Projectile Motion

ان أي شخص لاحظ حركة الكرة في لعبة البيسبول يكون قد لاحظ حركة المقذوف، حيث تتحرك الكرة في مسار منحني وتعود إلى الأرض. ان طريق الذي تسلكه الكرة، نسميه **المسار** trajectory، يكون دائما على شكل **قطع مكافئ parabola**.

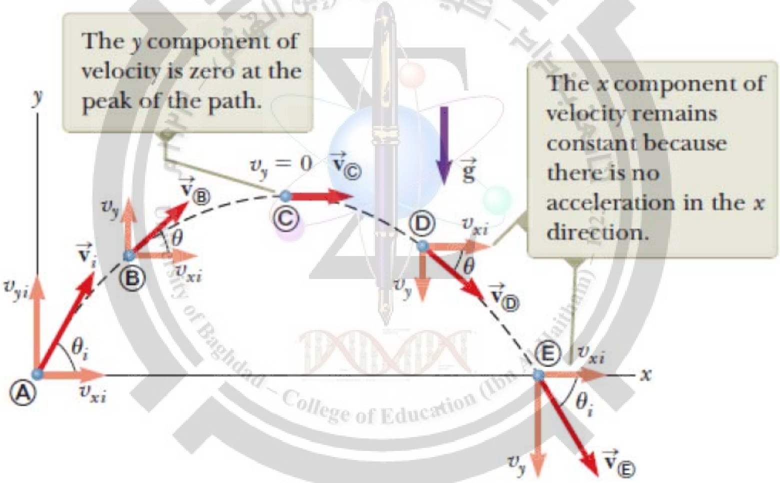
إن معادلة متجه موقع المقذوف كدالة للزمن تتبع مباشرة المعادلة $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ ، التي يكون تعجيلها بسبب الجاذبية، هو $\vec{a} = \vec{g}$ تكون

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad (4.10)$$

حيث تكون مركبات x و y الأولية لسرعة المقذوف معطاة بـ

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \qquad , \qquad v_{yi} = v_i \sin\theta_i$$

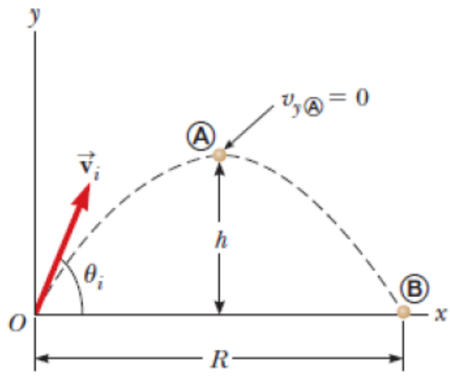
عند تحليل حركة المقذوفات، فانه يمكن نمذجتها، وكأنها متكونة من تراكب superposition حركتين: (1) حركة جسيم بسرعة ثابتة في الاتجاه الأفقي horizontal و (2) حركة جسيم بتعجيل ثابت (السقوط الحر free fall) في الاتجاه العمودي vertical.



المدى الأفقي وأقصى ارتفاع يصل اليه المقذوف Horizontal Range and Maximum Height of a Projectile

دعنا نفترض ان كرة قذفت من نقطة الأصل عند الزمن $t_i = 0$ بمركبة v_{yi} موجبة كما هو موضح في الشكل أعلاه، ان الكرة ستعود للأرض في نفس المستوى الأفقي. هذه حالة هي حالة شائعة في الألعاب الرياضية، حيث غالبا ما تهبط كرة البيسبول وكرة القدم وكرة الغولف بنفس المستوى الذي قذفت منه.

في الشكل الاتي هناك نقطتان في هذه الحركة مثيرة للاهتمام بشكل خاص علينا تحليلها:



- نقطة القمة A التي إحداثياتها الكارتيزية $(R/2\,,h)$، هي اعلى ارتفاع يصل له المقذوف.
- النقطة B التي لها إحداثيات $(R,0)$، هي نقطة هبوط المقذوف.
- تسمى المسافة (R) **المدى الأفقي** للمقذوف، والمسافة (h) هي **أقصى ارتفاع** يصل اليه.

دعنا نجد كل من اقصى الارتفاع الذي يصل له المقذوف (h) و مداه (R) رياضيا بحدود كل من سرعة اطلاق المقذوف v_i و الزاوية التي اطلق بها θ_i والتعجيل الارضي g:

يمكننا تحديد اقصى الارتفاع (h) بملاحظة أنه في القمة تكون السرعة مساوية الى الصفر v_{yA} . لذلك، يمكننا استخدام مركبة y للمعادلة $(\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\, t)$ لتحديد الزمن t_A الذي يصل فيه المقذوف إلى قمة ارتفاعه حيث

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\, t \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{fy} = \vec{v}_{iy} + \vec{a}_y\, t_A \quad \rightarrow \quad 0 = \vec{v}_{iy} + \vec{a}_y\, t_A$$

وحيث ان $v_{iy} = v_i\ \sin\theta_i$ وبتعويض $(-g)$ بدل $\vec{a}_y$ تكون المعادلة الأخيرة

$$0 = v_i\ \sin\theta_i - g\, t_A$$

$$t_A = \frac{v_i\ \sin\theta_i}{g}$$

بتعويض معادلة t_A أعلاه بدل t في المركبة y من المعادلة $(y = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2)$ واستبدال y التي تساوي y_A بأقصى ارتفاع يصل له المقذوف h، واخذ بنظر الاعتبار ان المقذوف اطلق من نقطة الأصل $(0,0)$ أي ان $y_i = 0$ وان $v_{iy} = v_i\ \sin\theta_i$ ، واستبدال a_y بـ g نحصل على معادلة للارتفاع h بحدود مقدار واتجاه متجه السرعة الأولي كما يلي:

$$y = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$h = 0 + (v_i \sin\theta_i)\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{g^2}$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g}$$

هذه المعادلة تعطي **اقصى ارتفاع يصل له المقذوف.**

- ان المدى R هو موضع هبوط المقذوف الأفقي، حيث يصل الى هذه النقطة في زمن يساوي ضعف الزمن الذي يصل فيه إلى اعلى ارتفاع، أي ان زمن تحليق المقذوف من اطلاقه حتى يصل لنهاية رحلته في النقطة $(0, R)$ يكون في الزمن $t_B = 2t_A$

بتعويض معادلة $t_B = 2t_A$ بدل t في المركبة x من المعادلة $(x = x_{ix} + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2)$ واستبدال x التي تساوي R المدى يصل له المقذوف ، واخذ بنظر الاعتبار ان المقذوف اطلق من نقطة الأصل $(0,0)$ أي ان $x_{ix} = 0$ وان $v_{ix} = v_i \cos\theta_i$ ، واستبدال $a_x = 0$ نحصل على معادلة R كما يلي:

$$R = v_{xi}t_B = (v_i \cos\theta)(2t_A)$$

$$R = (v_i \cos\theta_i)\left(\frac{2v_i \sin\theta_i}{g}\right)$$

$$R = \frac{2v_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}$$

باستخدام المتطابقة الرياضية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

يكون **المدى الافقي للمقذوف**

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} \qquad (4.12)$$

ونحصل على أقصى قيمة للمدى R من المعادلة الاخيرة عندما تكون قيمة $\sin 2\theta_i = 1$ حيث يكون

$$R_{\max} = \frac{v_i^2}{g}$$

وهذا يحدث عند الزاوية $2\theta_i = 90^o$ ولذلك تكون الزاوية $\theta_i = 45^o$ هي الزاوية التي نحصل منها على اقصى مدى.

مثال (4.2):

يترك لاعب الطفر العريض الأرض بزاوية 20^o فوق المستوى الأفقي وبسرعة $(11.0\ \mathrm{m/s})$.

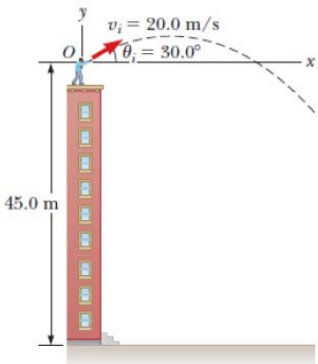
(A) جد المدى الذي يقفز اليه اللاعب؟ (B) جد أقصى ارتفاع يصل اليه؟

الحل: (A): نستخدم المعادلة

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} = \frac{(11)^2 \sin(2 \times 20^o)}{9.80} = 7.94\ \mathrm{m}$$

(B): نستخدم المعادلة

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} = \frac{(11)^2 \sin^2(20^o)}{2 \times 9.80} = 0.722\ \mathrm{m}$$



مثال (4.3): تم القاء حجر من أعلى المبنى الى لأعلى بزاوية (30^o) عن المستوى الأفقي بسرعة ابتدائية قدرها $(20.0\ \mathrm{m/s})$ كما هو موضح في الشكل. ان **الارتفاع** الذي ألقيت منه الحجارة هو $(45\ \mathrm{m})$ فوق سطح الأرض.

(A) كم من الوقت يستغرق الحجر للوصول إلى الأرض؟

الحل: (A) نأخذ بنظر الاعتبار ان نقطة الأصل (0,0) تقع في يد الرجل لذلك تكون $x_i = y_i = 0$

ولذلك نطبق العلاقة $y_f = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ ، حيث ان $v_{iy} = v_i \sin\theta_i$ وملاحظة واستبدال a_y بـ g فيكون

$$y_f = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \rightarrow y_f = y_i + v_i \sin\theta_i\, t + \frac{1}{2}g t^2$$

$$-45 = 0 + 20\,(\sin 30^o)t + \frac{1}{2}(-9.80)t^2$$

$$-45 = 10\,t + \frac{1}{2}(-9.80)t^2$$

$$t = 4.22\ \mathrm{s}$$

(B) ما هي سرعة الحجر قبل أن يصطدم بالأرض مباشرة؟

الحل: نطبق المعادلة $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\,t$ حيث نستبدل $\vec{a}$ بـ $-g$ وكذلك $\vec{v}_i$ بـ $v_{iy} = v_i \sin\theta_i$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\,t \rightarrow v_{fy} = v_i \sin\theta_i - g\,t$$

$$v_{fy} = 20\,(\sin 30^o) - 9.80 \times 4.22 = -31.3\ \mathrm{m/s}$$