(المتجهات Vectors)

3.1 الكميات المتجه والعددية Vectors and Scalar Quantities

- تحدد **الكمية العددية Scalar Quantity** بالكامل بقيمة منفردة مع وحدة مناسبة ولا يكون لها اتجاه.

والأمثلة على الكميات العددية هي درجة الحرارة، والحجم، والكتلة، والانطلاق، والزمن.

- تحدد **الكمية المتجه Vector Quantity** بالكامل برقم مع وحدة مناسبة بالإضافة إلى اتجاه.

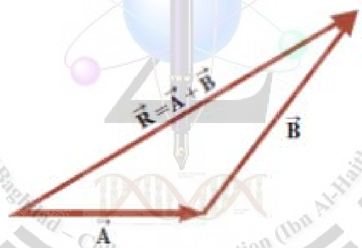
ومن الأمثلة على الكمية المتجه هي الازاحة والسرعة.

3.2 بعض خصائص المتجهات Some Properties of Vectors

جمع المتجهات Adding Vectors

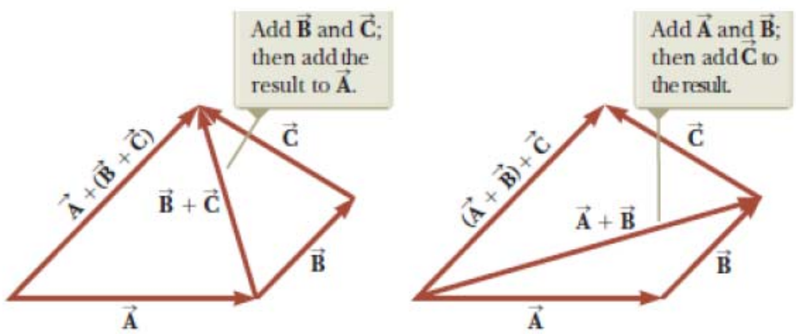
عند جمع المتجهين (المتجه $\vec{A}$ و المتجه $\vec{B}$) يكون مجموع الجمع مستقلا عن ترتيب مكان المتجهات بالنسبة لإشارة الجمع. تُعرف هذه الخاصية باسم **(قانون التبادل Commutative لعملية الجمع)**:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$



وهناك خاصية أخرى لجمع المتجهات تسمى **قانون ترابط الحدود لعملية الجمع Associative**:

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$



- تمتلك الكمية المتجه كلا من المقدار والاتجاه، كما أنها تخضع لقوانين جمع المتجهات.

الإشارة السالبة للمتجه

يعرف سالب المتجه $\vec{A}$ بأنه المتجه الذي عند جمعه مع المتجه $\vec{A}$ يعطي مجموع يساوي صفر. هذا يعني،

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = 0$$

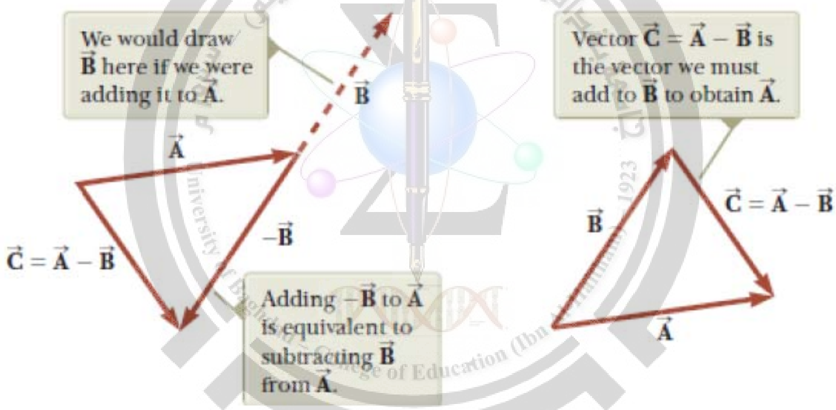
أي ان المتجهات $\vec{A}$ و $(-\vec{A})$ لها نفس المقدار لكن تتجه في اتجاهين متعاكسين.

طرح المتجهات

ان عملية طرح المتجهات تستخدم تعريف الإشارة السالبة للمتجه. حيث نعرف العملية $(\vec{A} - \vec{B})$ وكأن المتجه $(-\vec{B})$ يجمع مع المتجه $(\vec{A})$ كما يلي:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

يوضح الشكل الاتي الإنشاء الهندسي لطرح متجهين بهذه الطريقة:

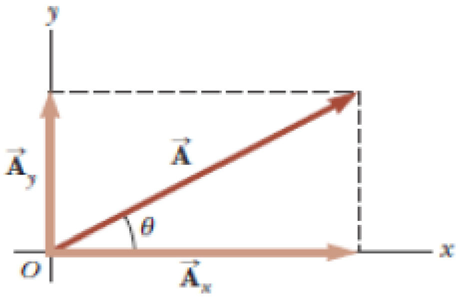


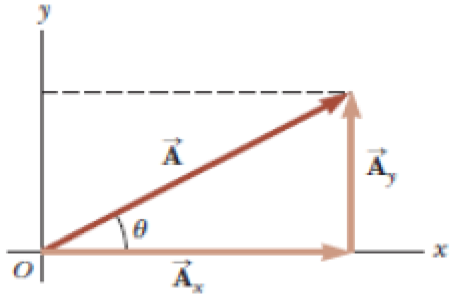
3.3 مركبات المتجه ومتجهات الوحدة Components of a Vector and Unit Vectors

مركبات المتجه Components of a Vector

يمكن وصف أي متجه بالكامل بوساطة مركباته.

نأخذ بنظر الاعتبار النظر المتجه $\vec{A}$ يكون في المستوى (xy) ويصنع زاوية (θ) مع المحور x الموجب كما هو مبين في الشكل أدناه.





يمكن التعبير عن هذا المتجه على أنه مجموع مركبة المتجه الموازية للمحور - x وهي $(\vec{A}_x)$، و المركبة $(\vec{A}_y)$ التي توازي المحور - y.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

من الشكل اعلاه وتعريف الجيب وجيب-تمام، نرى بان

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \rightarrow A_x = A\ \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{A_y}{A} \rightarrow A_y = A\ \sin\theta$$

يرتبط كل من مقدار واتجاه المتجه $(\vec{A})$ بمركباته من خلال المعادلات الاتية:

مقدار المتجه $\vec{A}$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

اتجاه المتجه $\vec{A}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

متجهات الوحدة Unit Vectors

متجه الوحدة Unit Vector (متجه بدون أبعاد مقداره واحد بالضبط، ويستخدم لتحديد اتجاه معين).

سنستخدم الرموز على التوالي $(\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k})$ لتمثيل متجهات الوحدة التي تشير إلى الاتجاهات الموجبة للمحاور $(x$ و y و $z)$.

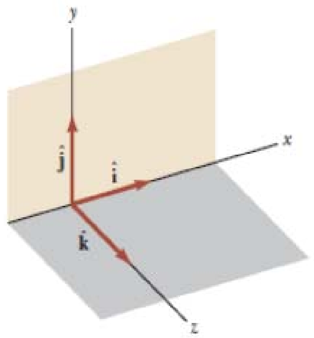
ان مقدار كل وحدة متجه تساوي واحد (1)؛ هذا يعني ان القيمة المطلقة لها تساوي واحد.

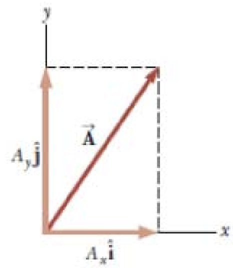
$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\vec{A}_x = \hat{\imath}A_x \quad , \quad \vec{A}_y = \hat{\jmath}A_y$$

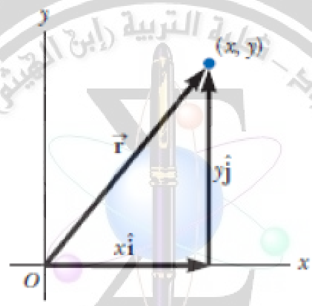
لذلك، يكتب المتجه $\vec{A}$ بدلالة متجه الوحدة كما يلي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y$$





- خذ بنظر الاعتبار نقطة تقع في المستوى xy في الإحداثيات الكارتيزية $(x \text{ ، } y)$ كما في الشكل أدناه.



يمكن تحديد النقطة بواسطة متجه الموضع $(\vec{r})$ الذي يكتب بدلالة متجه الوحدة كما يلي:

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$$

- ان محصلة المتجه $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$ الناتج عن جمع متجهين $\vec{A} = \left(A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}\right)$ و $\vec{B} = \left(B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath}\right)$ تعطى

$$\vec{R} = \left(A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}\right) + \left(B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\jmath}$$

لكون ان $\vec{R} = R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath}$ نجد بمقارنة ذلك مع المعادلتين اعلاه أن قيم مركبات المتجه $\vec{R}$ هي:

$$R_x = A_x + B_x \quad , \quad R_y = A_y + B_y$$

لذلك قيمة المتجه $\vec{R}$ يحصل عليهما من مركباته باستخدام العلاقة الاتية:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2}$$

و يعطى اتجاهه بالنسبة الى الزاوية التي يصنعها مع المحور - x

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}\right)$$

إذا كان كلا من المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يحتويان على ثلاثة مركبات باتجاه المحاور (x و y و z) ، فيمكن التعبير عنهما في الشكل الاتي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$$

$$\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$$

- ان جمع المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يعطى بالعلاقة $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ او يعطى بدلالة مركباته كما يلي:

$$\vec{R} = \left(\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z\right) + \left(\hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z\right)$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

مثال (3.1): جد مجموع متجهي الإزاحة $\vec{A} = (2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\mathrm{m}$ و $\vec{B} = (2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})\mathrm{m}$ الواقعان في المستوى xy .

الحل: تعطى محصلة المتجه الناتج عن الجمع الاتجاهي

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = (2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) + (2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})$$

$$\vec{R} = (2 + 2)\hat{\imath} + (2 - 4)\hat{\jmath}$$

$$\vec{R} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$$

لذلك مركبات المتجه $\vec{R}$ الناتج هي $R_x = 4\ \mathrm{m}$ و $R_y = -2\ \mathrm{m}$

و مقدار المتجه $\vec{R}$ يعطى بـ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 4.5\ \mathrm{m}$$

واتجاه المتجه $\vec{R}$ يعطى بـ

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2}{4} = -0.5$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}(-0.5) = -27^o$$

هذه الإجابة تكون صحيحة إذا فسرت على أنها 27^o في اتجاه عقارب الساعة من المحور x.

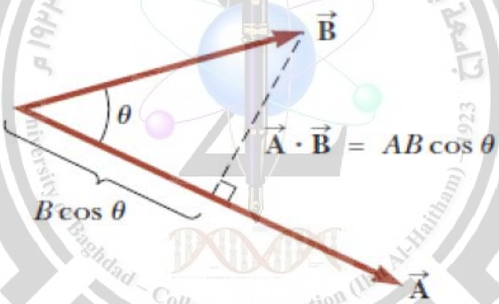
3.4 الضرب العددي Scalar Product

يُعرف الضرب العددي لأي متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بأنه (كمية عددية تساوي ناتج ضرب مقداريهما مع جيب تمام الزاوية θ التي بينهما):

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B\,\cos\theta$$

يكتب الضرب العددي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالشكل $\vec{A}\cdot\vec{B}$ (و بسبب وضع رمز النقطة ، غالبا ما يطلق على الضرب العددي بالضرب النقطي).

- يساوي الضرب العددي $\vec{A}\cdot\vec{B}$، قيمة المتجه $\vec{A}$ مضروبا في مسقط المتجه $\vec{B}$ على المتجه $\vec{A}$ أي ان ($B\,\cos\theta$) كما هو موضح في الشكل أدناه



خصائص الضرب العددي Properties of the scalar product

1. يكون الضرب العددي **تبديليا Commutative**:
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$
2. يخضع الضرب العددي لقانون **التوزيع Distributive** للضرب:
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$
3. إذا كان المتجه $\vec{A}$ عموديا على المتجه $\vec{B}$ (أي ان الزاوية بينهما تساوي 90^o) فان الضرب العددي بينهما يساوي $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$
4. إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ بنفس الاتجاه (أي ان الزاوية بينهما تساوي 0^o) فان الضرب العددي بينهما يعطى بـ $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$
5. إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ ولكنهما متعاكسي الاتجاه (أي ان الزاوية بينهما تساوي 180^o) فان الضرب العددي بينهما يعطى بـ $\vec{A}\cdot\vec{B} = -AB$

6. يكون الضرب العددي لمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ سالب الإشارة عندما تكون الزاوية بينهما فيما بين $(90^o < \theta \leq 180^o)$
7. ان الضرب العددي بين متجهات الوحدة بنفس الاتجاه يساوي واحد أي ان

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

8. ان الضرب العددي بين متجهات الوحدة باتجاهات متعامدة يساوي صفر

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

9. عرفنا سابقا بانه يمكن التعبير عن متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بشكل متجه الوحدة على النحو الاتي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$$

$$\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$$

لذلك يكون

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

وان

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

مثال (3.2): اذا كان المتجهات $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

(A) جد الضرب العددي بينهما. (B) أوجد الزاوية (θ) بينهما.

الحل: (A)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \cdot (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = -2 + 6 = 4$$

(B) لإيجاد الزاوية نطبق العلاقة $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\ B\ \cos\theta$. لذلك علينا إيجاد قيمة كل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث ان قيمة $\vec{A} \cdot \vec{B}$ قد حسبت في الفرع (A).

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

بترتيب العلاقة $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\ B\ \cos\theta$ للحصول على الزاوية يكون لدينا

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A\ B} = \frac{4}{(\sqrt{13})(\sqrt{5})} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) = 60.3^{o}$$

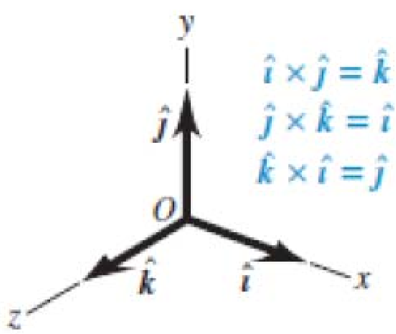
3.5 الضرب الاتجاهي Vector Product

يعرف الضرب الاتجاهي $\vec{A} \times \vec{B}$ لأي متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ، بأنه المتجه الثالث $\vec{C}$، الذي له قيمة $A\ B\ \sin\theta$ ، حيث ان $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ وقيمة الضرب الاتجاهي $C = A\ B\ \sin\theta$

- ويسمى الضرب الاتجاهي أيضا بـ **Cross Product**

خصائص الضرب الاتجاهي Properties of the vector product

1. ان الضرب الاتجاهي ليس تبديليا Commutative (أي ان $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$) لذلك ، إذا قمنا بتغيير ترتيب المتجهات في الضرب الاتجاهي ، فيجب علينا تغيير الاشارة.
2. إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ (أي ان الزاوية بينهما تساوي 0^{o} او 180^{o}) فان الضرب الاتجاهي بينهما يعطى بـ $\vec{A} \times \vec{B} = A\ B\ \sin\theta = 0$ وان $\vec{A} \cdot \vec{A} = 0$
3. إذا كان المتجه $\vec{A}$ عموديا على المتجه $\vec{B}$ (أي ان الزاوية بينهما تساوي 90^{o}) فان الضرب الاتجاهي بينهما يعطى $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.
4. يخضع الضرب الاتجاهي لقانون التوزيع Distributive
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$
5. ان مشتقة الضرب الاتجاهي بالنسبة الى بعض المتغيرات مثل (t) تكون
$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$
6. ان الضرب الاتجاهي بين متجهات الوحدة ($\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k}$) يخضع للقواعد الاتية:
   - $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
   - $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ و $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$
   - $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$ و $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$
   - $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$ و $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$



يمكن التعبير عن الضرب الاتجاهي لأي متجهين $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$ و $\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$ بشكل المحددة determinant الاتية:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

مثال (3.3): إذا كان المتجهان $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ في المستوى xy. جد $\vec{A} \times \vec{B}$ ، أيضا تحقق من العلاقة $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

الحل: نستعمل المحددة السابقة

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}[(2)(2) - (3)(-1)] = 7\hat{k}$$

للتحقق من العلاقة $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ نستعمل نفس الطريقة كما يلي:

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}[(-1)(3) - (2)(2)] = -7\hat{k}$$

لذلك العلاقة صحيحة.

مثال (3.4): مقدار المتجه $\vec{A}$ يساوي (6) وحدات ويقع في اتجاه المحور - x الموجب. ومقدار المتجه $\vec{B}$ يساوي (4) وحدات ويقع في مستوى xy ، صانعا زاوية مقدارها 30^o مع المحور - x. جد $\vec{A} \times \vec{B}$

الحل: يمكن كتابة المتجهان كما يلي

$$\vec{A} = 6\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = (4\ \cos 30^o)\hat{\imath} + (4\ \sin 30^o)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = \left(4\ \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{\imath} + \left(4\ \times \frac{1}{2}\right)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\sqrt{3}\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 6 & 0 & 0\\ 2\sqrt{3} & 2 & 0\end{vmatrix}=\hat{\imath}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\hat{\jmath}\begin{vmatrix}0 & 6\\ 0 & 2\sqrt{3}\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}6 & 0\\ 2\sqrt{3} & 2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{\imath}(0-0)+\hat{\jmath}(0-0)+\hat{k}\left[(6)(2)-(0)\left(2\sqrt{3}\right)\right]=12\hat{k}$$