(القوة والحركة Force and Motion)

قوانين الحركة The Laws of Motion

ناقشنا في الفصل الثاني السرعة والتعجيل دون التعرض لأسباب حركة الاجسام. الآن سنستعرض كيفية تولد التعجيل بسبب القوة.

5.1 قانون نيوتن الأول للحركة Newton’s First Law of Motion

يسمى قانون نيوتن الأول للحركة أحيانا بـ (قانون القصور الذاتي). يوصف مصطلح القصور الذاتي بأنه (ميل الجسم لمقاومة التغييرات في حركته). وهناك نص آخر لقانون نيوتن الأول هو

(يبقى الجسم الساكن في حالة سكون، والجسم المتحرك يستمر في الحركة بسرعة ثابتة في خط مستقيم، في حالة عدم وجود قوى خارجية).

بكلام آخر، عندما لا توجد قوة تؤثر على جسم، فإن تعجيل الجسم يكون صفرا؛ حيث يتم التعامل مع الجسم وفقا لنموذج **الجسيم في حالة التوازن particle in equilibrium**. في هذا النموذج، يكون صافي القوة على الجسيم يساوي صفر:

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (5.1)$$

- **القوة Force:** من القانون الأول لنيوتن، يمكننا تعريف القوة على أنها تلك التي تسبب تغييراً في حركة الجسم.
- **الكتلة Mass**: يمكننا تعريف الكتلة بانها خاصية الجسم التي تحدد مقدار المقاومة التي يبديها الجسم للتغيرات في سرعته. ان كتلة الجسم هي كمية عددية، و وحدتها في النظام العالمي SI هي كيلوغرام kg. ويجب عدم الخلط بين الكتلة والوزن، حيث ان الكتلة والوزن كميتان مختلفتان. ان كتلة الجسم تبقى نفسها في كل مكان.
- **الوزن Weight:** يساوي وزن الجسم قيمة قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم، ويختلف الوزن باختلاف الموقع او المكان. على سبيل المثال، وزن شخص على كوكب الأرض يساوي (84 kg) في حين يكون وزنه حوالي (14 kg) فقط على سطح القمر، وهذا يعني (1/6) وزنه على الأرض.

5.2 قانون نيوتن الثاني Newton’s Second Law

يفسر قانون نيوتن الأول ما يحدث للجسم عندما لا تسلط عليه أي قوى: فالجسم إما ان يبقى في حالة السكون أو يتحرك بانطلاق ثابت في خط مستقيم. اما قانون نيوتن الثاني فيجيب على السؤال المتعلق بما يحدث لجسم ما عندما تؤثر عليه قوة أو أكثر.

- وحيث ان تعجيل الجسم يتناسب طرديا مع القوة المؤثرة عليه:

$$\vec{F} \propto \vec{a}$$

- وان قيمة تعجيل الجسم تتناسب عكسيا مع كتلته:

$$|\vec{a}| \propto \frac{1}{m}$$

قانون نيوتن الثاني: تعجيل الجسم يتناسب طرديا مع صافي القوة المؤثرة عليه ويتناسب عكسيا مع كتلته:

$$\vec{a} \propto \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

إذا ما اخترنا ثابت التناسب ليكون واحد (1)، فيمكننا ربط الكتلة والتعجيل والقوة من خلال العلاقة الرياضية الآتية في قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad (5.2)$$

- ان صافي القوة $\sum \vec{F}$ على جسم هي مجموع متجهات جميع القوى المؤثرة على الجسم.
- وتقاس القوة بوحدة الـ **نيوتن** (N) في نظام الوحدات العالمي SI.
- تعرف وحدة النيوتن: بانها قوة 1N ، التي عندما تؤثر على جسم كتلته $1\ \text{kg}$ ، تنتج تعجيلا مقداره $1\ \text{m/s}^2$.

$$1\text{N} = 1\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

5.3 قوة الجاذبية والوزن The Gravitational Force and Weight

تنجذب جميع الاجسام إلى الأرض. وتسمى القوة الجذب المسلطة من قبل الأرض على جسم ما **بـ قوة الجاذبية Gravitational Force** $\vec{F}_g$. هذه القوة يكون اتجاهها باتجاه مركز الأرض، وقيمتها تسمى **وزن Weight** الجسم.

يواجه الجسم الساقط سقوطا حرا تعجيلا $(\vec{g})$ يتجه نحو مركز الأرض. وعند تطبيق قانون نيوتن الثاني $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ على جسم كتلته m يسقط سقوطا حرا ، بتعجيل $\vec{a} = \vec{g}$ وقوة $\sum \vec{F} = \vec{F}_g$ يكون

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_g = m\vec{g}$$

- لذلك يساوي وزن الجسم mg (كتلة الجسم مضروبا في قيمة التعجيل الأرضي)
- لكون ان الوزن يعتمد على قيمة التعجيل الارضي g، فان الوزن يكون مختلفا باختلاف الموقع الجغرافي geographic location . وبسبب انخفاض قيمة g بزيادة المسافة عن مركز الأرض صعودا ، فإن الأجسام يكون وزنها أقل على ارتفاعات أعلى من مستوى سطح البحر.

5.4 قانون نيوتن الثالث Newton’s Third Law

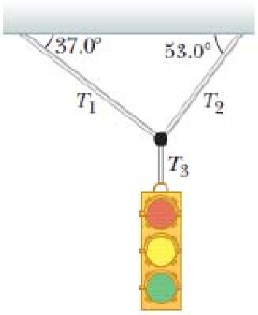
عندما تدفع كتاب بإصبعك، فان الكتاب يدفع اصبعك بنفس الوقت. يُعرف هذا المبدأ المهم باسم **قانون نيوتن الثالث:**

(في حالة تأثير جسمين بعضهما على البعض، تكون القوة $\vec{F}_{12}$ التي يسلطها الجسم 1 على الجسم 2 متساوية في القيمة ومتعاكسة لاتجاه القوة $\vec{F}_{21}$ التي يسلطها الجسم 2 على الجسم 1):

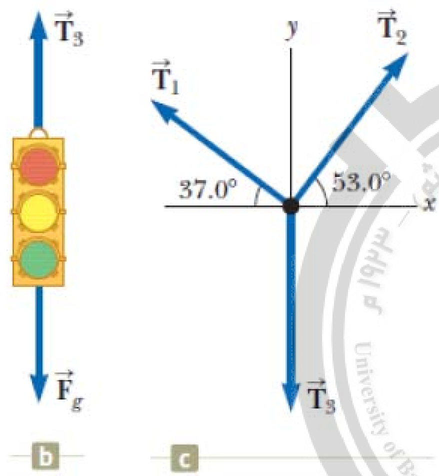
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (5.4)$$

- تسمى القوة التي يسلطها الجسم 1 على الجسم 2 باسم **قوة الفعل** Action force، وتسمى قوة الجسم 2 على الجسم 1 باسم **قوة رد الفعل** Reaction force.
- تعمل قوى الفعل ورد الفعل على الأجسام **المختلفة**، ويجب أن تكون من نفس نوع القوى (مثل قوة الجاذبية، القوة الكهربائية، إلخ).

بعض تطبيقات قوانين نيوتن Some Applications of Newton's laws:



مثال (5.1): علقت إشارة مرور وزنها 122 N بوساطة سلك مرتبط بسلكين آخرين مثبتين على دعامة افقية كما في الشكل. ان الاسلاك العليا تصنع الزوايا 37^o و53^o مع الأفق. أخذ بنظر الاعتبار ان هذين السلكين ليسا قويان مثل السلك العمودي المرتبط بإشارة المرور وانهما سوف ينقطعان إذا تجاوزت قوة الشد فيهما 100 N. قرر هل ان إشارة المرور ستظل معلقة في هذه الحالة، أم سيقطع أحد هذه الاسلاك؟



الحل: نرسم رسما تخطيطيا للقوى المؤثرة على إشارة المرور، كما هو مبين في الشكل b، ومخطط الجسم-الحر diagram of the forces للعقدة التي تربط الاسلاك الثلاثة معا كما هو موضح بالشكل c. هذه العقدة knot هي الجسم الملائم للاختيار، لأن كل القوى تؤثر على امتداد خطوط تمر عبر هذه العقدة.

نطبق قانون نيوتن الأول $\sum \vec{F} = 0$ لأنها في حالة سكون، على إشارة المرور في اتجاه y كما في الشكل b

$$\sum F_y = 0$$

$$T_3 - F_g = 0 \quad \rightarrow \quad T_3 - 122 = 0$$

$$\therefore T_3 = 122 \text{ N}$$

نختار محاور الإحداثيات كما هو موضح في الشكل (c)، ونحلل القوى المؤثرة عند العقدة في مركباتها:

Force	x Component	y Component
$\vec{T}_1$	$-T_1 \cos 37.0°$	$T_1 \sin 37.0°$
$\vec{T}_2$	$T_2 \cos 53.0°$	$T_2 \sin 53.0°$
$\vec{T}_3$	0	-122 N

نطبق نموذج **الجسيم في حالة التوازن** على العقدة، أي قانون نيوتن الأول:

$$(1) \qquad \sum F_x = -T_1 \cos 37^o + T_2 \cos 53^o = 0$$

$$(2) \qquad \sum F_y = T_1 \sin 37^o + T_2 \sin 53^o + (-122\text{ N}) = 0$$

$$(3) \qquad T_2 = T_1 \left(\frac{\cos 37^o}{\cos 53^o}\right) = 1.33T_1$$

بتعويض هذه القيمة لـ T_2 في المعادلة (2)

$$(2) \qquad \sum F_y = T_1 \sin 37^o + T_2 \sin 53^o + (-122\text{ N}) = 0$$

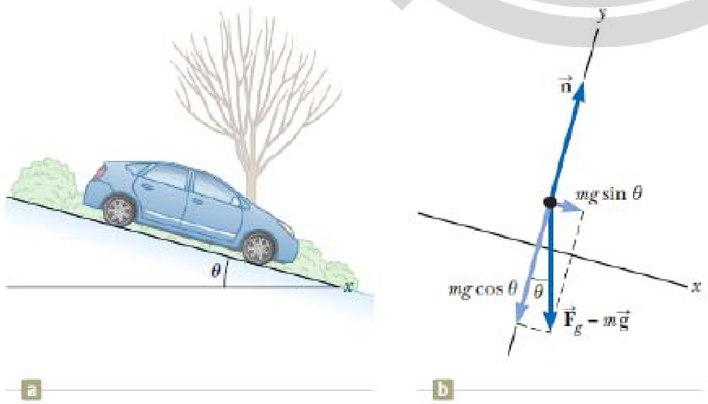
$$\sum F_y = T_1 \sin 37^o + (1.33T_1) \sin 53^o + (-122\text{ N}) = 0$$

$$\therefore T_1 = 73.4\text{ N}$$

$$\therefore T_2 = 1.33T_1 = 1.33(73.4\,) = 97.4\text{ N}$$

ان كلا القيمتين $T_1 = 73.4\text{ N}$ و $T_2 = 97.4\text{ N}$ أقل من 100 N ، وبالتالي فإن **الاسلاك لن تقطع**.

مثال (5.2): سيارة كتلتها m على طريق جليدي يميل بزاوية θ كما في الشكل a. (A) أوجد تعجيل السيارة، بافتراض أن الطريق املس (ليس هناك احتكاك). (B) افرض أن السيارة قد انطلقت من السكون من أعلى المنحدر وأن المسافة من مصد الصدمات الأمامي للسيارة إلى أسفل المنحدر هو d. كم هو الزمن المستغرق لكي يصل المصد الأمامي للسيارة إلى أسفل التل، وما هي سرعة السيارة عند وصولها إلى هناك؟



الحل: (A) طالما السيارة متحركة؛ نطبق قانون نيوتن الثاني. أولا نحلل القوى المسلطة على السيارة الى مركبتان؛ احداهما موازية للطريق والأخرى عمودية عليه

$$(1) \qquad \sum F_x = mg\sin\theta = ma_x$$

$$(2) \qquad \sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$$

من العلاقة (1) نجد ان

$$\therefore \ a_x = g\sin\theta$$

لاحظ أن مركبة التعجيل a_x تكون مستقلة عن كتلة السيارة m ! ذلك بانها تعتمد فقط على زاوية ميل الطريق θ وعلى قيمة التعجيل الارضي g.

(B) نطبق العلاقة الاتية من الفصل الثاني (الحركة في بعد واحد)

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$d = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$d = \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2d}{a_x}} = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}}$$

ولإيجاد السرعة النهائية للسيارة

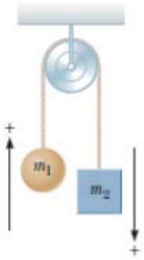
$$v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

حيث ان v_{ix}، لإيجاد السرعة النهائية للسيارة وان $x_f - x_i = d$ يكون

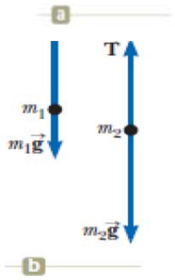
$$v_{fx}^2 = 0 + 2a_x d$$

$$v_{fx} = \sqrt{2a_x d} = \sqrt{2g\,d\sin\theta}$$

مثال (5.3): عندما يتم تعليق جسمين كتلتيهما غير متساوية بشكل شاقولي على بكرة ملساء كتلتها مهملة كما في الشكل a، فانه يُطلق على هذا الترتيب اسم **آلة اتود Atwood**. يستخدم هذا الجهاز في بعض الأحيان في المختبر، لتحديد قيمة التعجيل الارضي g. جد قيمة تعجيل الجسمين وجد الشد في الحبل الذي يكون مهمل الوزن؟



الحل: تخضع الأجسام في آلة اتود لقوة الجاذبية وكذلك للقوى التي تسلطها الحبال المتصلة بها، حيث تؤثر قوتان على كل جسم: قوة الى الأعلى وهي الشد $\vec{T}$ tension والقوة الجاذبية ويكون اتجاهها نحو الاسفل. لاحظ الشكل:



بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم 1 يكون:

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y \qquad (1)$$

$$\therefore T = m_1 a_y + m_1 g \qquad (2)$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم 2 يكون:

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_y \qquad (3)$$

$$\therefore T = m_2 g - m_2 a_y \qquad (4)$$

بمساواة المعادلة (2) و (4) لإيجاد التعجيل a_y يكون

$$m_1 a_y + m_1 g = m_2 g - m_2 a_y$$

$$m_1 a_y + m_2 a_y = -m_1 g + m_2 g$$

$$a_y(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1)$$

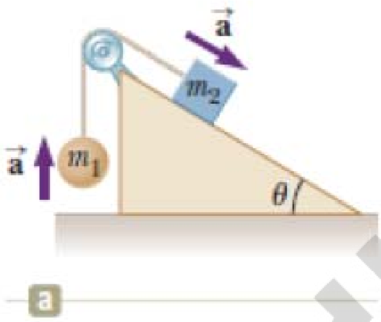
$$a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

ولإيجاد الشد في الحبل T يكون من المعادلة (2)

$$T = m_1 a_y + m_1 g \quad \rightarrow \quad T = m_1 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g + m_1 g$$

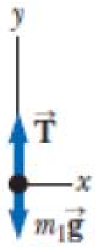
$$T = m_1 g \left[\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) + 1\right] \rightarrow \ T = m_1 g \left(\frac{m_2 - m_1 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$T = m_1 g \left(\frac{m_2 + m_2}{m_1 + m_2}\right) \quad \rightarrow \quad T = m_1 g \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) \ \rightarrow T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$



مثال (5.4): كرة كتلتها m_1 وقطعة مكعبة كتلتها m_2 متصلان بوساطة سلك مهمل الوزن يمر عبر بكرة ملساء كتلتها مهملة كما في الشكل a. تستند القطعة المكعبة على سطح مائل بزاوية θ. جد قيمة تعجيل الجسمين والشد في الحبل.

الحل: إذا تحركت القطعة m_2 إلى أسفل السطح المائل، فإن الكرة m_1 تتحرك الى الأعلى. لكون أن الجسمين متصلان بوساطة السلك (الذي نفترض أنه لا يتمدد)، فإن مقدار تعجيل الجسمين هو نفسه.

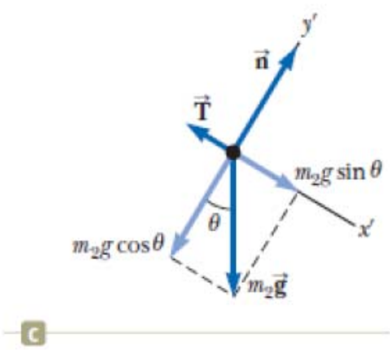


بتطبيق قانون نيوتن الثاني على مركبات القوى على الكرة m_1، ونختر الاتجاه الشاقولي ان يكون موجب كما في الشكل

$$(1) \quad \sum F_x = 0$$

$$(2) \qquad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_1 = m_1 a$$

لكي تتعجل الكرة إلى الأعلى ، من الضروري ان يكون الشد اكبر من وزن الكرة: أي ان $T > m_1 g$



الآن نطبق قانون نيوتن الثاني على مركبات القوى على القطعة m_2 كما في الشكل c

$$(3) \quad \sum F_{x'} = m_2 g \sin\theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a$$

لقد استبدلنا التعجيل$(a_{x'})$ بالتعجيل (a) لأن الجسمين لهما تعجيل متساوٍ في المقدار (a).

$$\sum F_{y'} = n - m_2 g\cos\theta = 0$$

نحل المعادلة (2) لإيجاد الشد T

$$(2) \qquad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a$$

$$\therefore\ T = m_1 a + m_1 g$$

$$(5) \qquad T = m_1(g+a)$$

نعوض هذه المعادلة في المعادلة (3)

$$\sum F_{x'} = m_2 g\sin\theta - T = m_2 a$$

$$m_2 g\sin\theta - m_1(g+a) = m_2 a$$

نحل هذه المعادلة لإيجاد (a) فيكون

$$m_2 g\sin\theta = m_2 a + m_1(g+a) \quad \rightarrow \quad m_2 g\sin\theta = m_2 a + m_1 g + m_1 a$$

$$m_2 g\sin\theta - m_1 g = a(m_2+m_1) \quad \rightarrow \quad (m_2\sin\theta - m_1)g = a(m_2+m_1)$$

$$a = \left(\frac{m_2\sin\theta - m_1}{m_1+m_2}\right)g$$

لإيجاد الشد T نعوض معادلة التعجيل هذه في المعادلة (5)

$$T = m_1(g+a) \quad \rightarrow \quad T = m_1\left[g + \left(\frac{m_2\sin\theta - m_1}{m_1+m_2}\right)g\right]$$

$$T = m_1\left[1 + \left(\frac{m_2\sin\theta - m_1}{m_1+m_2}\right)\right]g \quad \rightarrow \quad T = m_1\left(\frac{m_1+m_2+m_2\sin\theta - m_1}{m_1+m_2}\right)g$$

$$T = m_1 g\left(\frac{m_2+m_2\sin\theta}{m_1+m_2}\right) \rightarrow \ T = m_1 m_2\left(\frac{1+\sin\theta}{m_1+m_2}\right)\ g$$

5.5 قوى الاحتكاك Force of Friction

عندما يكون الجسم في حالة حركة سواء ان كان على سطح أو في وسط لزج viscous medium مثل الهواء أو الماء، فهناك مقاومة للحركة لأن الجسم يتأثر بمحيطه. نسمي هذه المقاومة **بقوة الاحتكاك**.

- إذا ما سلطت قوة أفقية خارجية $\vec{F}$ على قطعة ما، بحيث تكون مؤثرة عليها على جهة اليمين ، يمكن أن تظل القطعة ثابتة عندما تكون القوة $\vec{F}$ صغيرة، حيث ان هناك قوة مضادة للقوة $\vec{F}$ تكون مسلطة على القطعة تمنع القطعة من التحرك ويكون اتجاهها نحو جهة اليسار وتسمى **قوة الاحتكاك السكوني (الستاتيكي) Force of static friction** $\vec{f}_s$. وطالما أن الكتلة لا تتحرك فهذا يعني ان القوة المسلطة تساوي قوة الاحتكاك السكوني $\vec{f}_s = \vec{F}$.

لذلك، إذا زادت القوة الخارجية المسلطة $\vec{F}$، فان قوة الاحتكاك السكوني $\vec{f}_s$ سوف تزداد أيضا.
وبالمثل ، في حالة نقصان القوة الخارجية $\vec{F}$ ، فان قوة الاحتكاك السكوني $\vec{f}_s$ ستنخفض أيضا.

- تدعى قوة الاحتكاك لجسم متحرك بـ **قوة الاحتكاك الانزلاقي (الحركي) Force of kinetic friction** $\vec{f}_k$.
- يمكن أن يكون لقيمة قوة الاحتكاك السكوني $\vec{f}_s$ بين أي سطحين متماسين لها القيم بحيث ان

$$f_s \leq \mu_s n \qquad (5.5)$$

حيث يطلق على الثابت μ_s بمعامل الاحتكاك السكوني (حيث ان الحرف μ هو حرف يوناني يلفظ ميو)، و هذا المعامل ليس له ابعاد (وحدات)، وان n هي قيمة القوة العمودية المسلطة من قبل سطح ما على سطح الآخر.

- ان إشارة المساواة (=) في المعادلة $f_s \leq \mu_s n$ فأنها تؤخذ عندما تكون الأسطح على وشك الانزلاق verge of slipping، أي عندما تكون $f_s = f_{s,\max} = \mu_s n$. في هذه الحالة تسمى الحركة بـ **الحركة الوشيكة الحدوث impending motion**.
- اما اشارة عدم المساواة ثابتا (<) تؤخذ عندما لا تكون الأسطح على وشك الانزلاق.
- تعطى قوة الاحتكاك الانزلاقي (الحركي) force of kinetic friction التي تعمل بين سطحين بالعلاقة

$$f_k = \mu_k n \qquad (5.6)$$

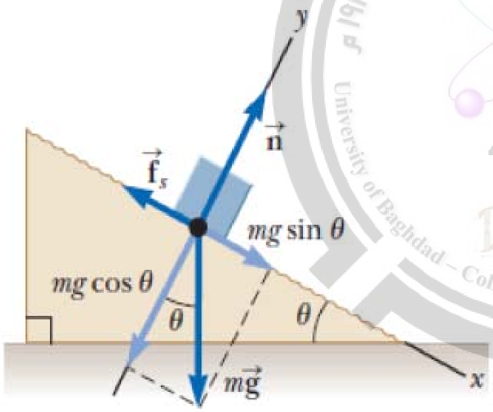
حيث ان μ_k هي معامل الاحتكاك الانزلاقي (الحركي) **coefficient of kinetic friction**.

- تعتمد قيم كل من معامل الاحتكاك الانزلاقي μ_k والسكوني μ_s على طبيعة الأسطح المتماسة.
- **بشكل عام تكون قيمة معامل الاحتكاك الانزلاقي μ_k اقل من قيمة معامل الاحتكاك السكوني μ_s.** حيث تتراوح القيم النموذجية لها من حوالي (0.03 إلى 1).
- يكون اتجاه قوة الاحتكاك على جسم ما موازيا للسطح الذي يكون فيه الجسم في حالة التماس وعكس الحركة الفعلية (الاحتكاك الانزلاقي) أو الحركة الوشيكة الحدوث (الاحتكاك السكوني) للجسم بالنسبة للسطح.

مثال (5.5):

وضعت قطعة مكعبة على سطح مائل خشن يمكن تغيير زاوية ميله. إذا ما ازدادت زاوية الميل فان القطعة المكعبة تبدأ في الانزلاق الى أسفل السطح المائل. بين أنه يمكنك الحصول على قيمة معامل الاحتكاك السكوني μ_s عن طريق قياس الزاوية الحرجة θ التي يحدث عندها هذا الانزلاق مباشرة؟

الحل: طالما ان القطعة المكعبة ساكنة على السطح المائل، نطبق قانون نيوتن الأول، نحلل القوى الى قوى افقية وأخرى عمودية:



$$(1) \qquad \sum F_x = mg\sin\theta - f_s = 0$$

$$(2) \qquad \therefore\ f_s = mg\sin\theta$$

$$(3) \qquad \sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$$

$$(4) \qquad \therefore mg = \frac{n}{\cos\theta}$$

نعوض المعادلة الأخيرة (4) في المعادلة (2) فنحصل على

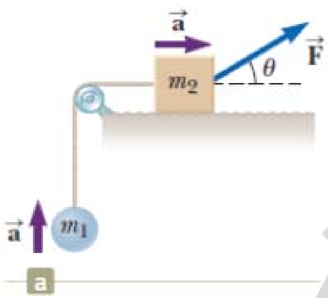
$$(5) \qquad f_s = mg\sin\theta = \left(\frac{n}{\cos\theta}\right)\sin\theta = n\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = n\tan\theta$$

عندما تزداد زاوية الميل θ لغاية ان تكون القطعة على وشك الانزلاق، فإن قوة الاحتكاك السكوني تكون قد وصلت إلى أقصى قيمة لها وهي $f_s = \mu_s n$.

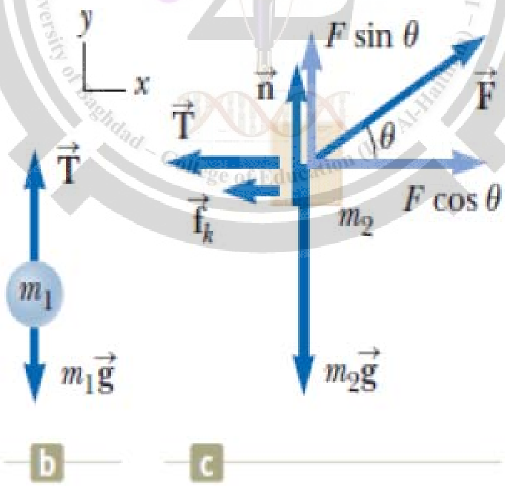
$$f_s = \mu_s n = n \tan\theta$$

$$\therefore \mu_s = \tan\theta$$

مثال (5.6): قطعة مكعبة كتلتها m_2 تستند على سطح افقي خشن متصلة بِكُرة كتلتها m_1 بوساطة حبل عديم الوزن عبر بَكَرة عديمة الاحتكاك كما يظهر في الشكل. اذا ما سلطت قوة قيمتها F بزاوية θ مع الأفق كما يظهر في الشكل وان القطعة انزلقت الى جهة اليمين، وكان معامل الاحتكاك الانزلاقي بين القطعة والسطح هو μ_k. أحسب قيمة التعجيل للجسمين؟



الحل: ان القطعة المكعبة والكرة بسبب هذه القوة سيتحركان، حيث ستتحرك القطعة المكعبة الى اليمين كما اشير الى ذلك بمنطوق المسألة وستتحرك الكرة الى الأعلى لان قوة الشد أكبر من وزنها. ان الشكل b يوضح القوى المسلطة على الكرة. نحلل القوى المسلطة على القطعة المكعبة كما في الشكل c.



لكون ان هناك حركة، نطبق قانون نيوتن الثاني. ان القوى الافقية على القطعة المكعبة

$$(1) \qquad \sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_2 a_x = m_2 a$$

والقوى العمودية على الكرة هي

$$(2)\qquad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

$$(3)\quad T = m_1 a + m_1 g = m_1(a+g)$$

لقد استبدلنا التعجيل(a_x) في المعادلة (1) و التعجيل a_y في المعادلة (2) بالتعجيل (a) لأن الجسمين لهما تعجيل متساوٍ في المقدار (a).

الآن نطبق قانون نيوتن الأول على القطعة المكعبة، حيث ان محصلة القوى بالاتجاه العمودي تعطى

$$(4)\qquad \sum F_y = n + F\sin\theta - m_2 g = 0$$

نحل المعادلة (4) لإيجاد n فيكون

$$(5)\quad n = m_2 g - F\sin\theta$$

وحيث ان قوة الاحتكاك الشروعي تعطى بالعلاقة $f_k = \mu_k n$ يكون لدينا بتعويض n من المعادلة (5)

$$(6)\quad f_k = \mu_k(m_2 g - F\sin\theta)$$

نعوض عن f_k من المعادلة (6) و عن T من المعادلة (3) في المعادلة (1) لإيجاد a

$$(1)\qquad \sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_2 a$$

$$F\cos\theta - \mu_k(m_2 g - F\sin\theta) - m_1(a+g) = m_2 a$$

$$F\cos\theta - m_2 g\,\mu_k + \mu_k F\sin\theta - m_1 a - m_1 g = m_2 a$$

$$F\cos\theta + \mu_k F\sin\theta - m_1 g - m_2 g\,\mu_k = m_1 a + m_2 a$$

$$F(\cos\theta + \mu_k\sin\theta) - (m_1 + \mu_k m_2)g = a(m_1 + m_2)$$

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k\sin\theta) - (m_1 + \mu_k m_2)g}{m_1 + m_2}$$