(الحركة في بعد واحد Motion in One Dimension)

الحركة هي احدى أكثر الظواهر الفيزيائية وضوحا، ولذلك فأنها تمثل بداية ممتازة لدراسة الفيزياء. ولكن قبل ذلك علينا ان نفهم كيفية وصفها بشكل كمي. وهذا الوصف الكمي للحركة لن يكون مقنعا الا بعد تعريف بعض خواصها الأساسية مثل الازاحة والسرعة والتعجيل بدلالة ابعاد الطول والزمن.

2.1 الموضع Position والسرعة Velocity والانطلاق Speed

- ان **موضع** الجسيم (x) هو (موقع الجسيم بالنسبة الى نقطة مرجعية مختارة يمكننا اعتبارها مركز نظام الإحداثيات).
- يتم تعريف الإزاحة Displacement (Δx) لجسيم على أنها (التغير في موضع الجسيم خلال فترة زمنية معينة). حيث عندما ينتقل الجسيم من موضع أولي (x_i) إلى موضع نهائي (x_f) ، تكون ازاحته معطاة بالمعادلة:

$$\Delta x = x_f - x_i \qquad (2.1)$$

نستخدم الحرف دلتا delta اليوناني (Δ) للدلالة على التغيير في الكمية.

- من هذا التعريف، نرى أن (Δx) تكون موجبة إذا كان الموضع النهائي (x_f) أكبر من الموضع الاولي (x_i) و تكون سالبة إذا كانت (x_f) أقل من (x_i).

من المهم جدا معرفة الفرق بين الازاحة والمسافة المقطوعة.

- المسافة Distance (هي طول المسار الذي يتبعه الجسيم).
- يتم تمثيل المسافة دائما برقم موجب، في حين يمكن أن تكون الازاحة موجبة أو سالبة.
- ان الإزاحة هي مثال لكمية متجه Vector. وان العديد من الكميات الفيزيائية الأخرى، بما في ذلك الموضع والسرعة والتعجيل Acceleration، هي أيضا كميات متجه.
- بشكل عام، تتطلب الكمية المتجه Vector quantity تحديد كل من الاتجاه والقيمة. اما الكمية العددية Scalar quantity فلها قيمة عددية وليس لها اتجاه.

- تعرف **متوسط السرعة** Average velocity $(v_{x,\text{av}})$ للجسيم بأنها (إزاحة الجسيم (Δx) مقسوما على الفاصلة الزمنية (Δt) الذي تحدث فيها هذه الإزاحة):

$$v_{x,\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

حيث يشير الحرف (x) إلى الحركة على امتداد (المحور السيني x).

من هذا التعريف، نرى أن متوسط السرعة لها أبعاد طول length مقسومة على الزمن time، أو متر على الثانية $(\mathrm{m/s})$ بوحدات النظام الوحدات العالمي SI.

- يمكن أن تكون متوسط سرعة الجسيم المتحرك في بعد واحد موجبة أو سالبة، اعتمادا على اشارة الإزاحة.
- وتكون الفاصلة الزمنية (Δt) موجبة دائما.

إذا كانت سرعة الجسيم ثابتة، فإن سرعته الآنية في أي لحظة خلال فاصلة زمنية هي نفس متوسط السرعة خلال هذه الفاصلة. وهذا يعني ان $v_x = v_{x,\text{av}}$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

بتذكر أن $\Delta x = x_f - x_i$

يكون

$$v_x = \frac{x_f - x_i}{\Delta t}$$

أو ان

$$x_f = x_i + v_x \Delta t$$

عمليا، نختار في العادة ان يكون الزمن في بداية الفاصلة الزمنية مساويا الى الصفر $t_i = 0$ والزمن في نهاية هذه الفاصلة الزمنية $t_f = t$ ، لذلك تصبح المعادلة عندما تكون السرعة v_x ثابتة:

$$x_f = x_i + v_x t \qquad (2.3)$$

- يعرف **متوسط الانطلاق Average speed** (v_{av}) للجسيم، وهو كمية عددية، بأنه (المسافة الكلية (d) مقسومة على الفاصلة الزمنية الكلية اللازمة لقطع تلك المسافة):

$$v_{\text{av}} = \frac{d}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

ان وحدة النظام SI لمتوسط الانطلاق هي نفس وحدة السرعة المتوسطة: (متر على الثانية) $(\mathrm{m/s})$.

- ليس لمتوسط الانطلاق اتجاه ويتم التعبير عنه دائما كرقم موجب.

2.2 السرعة الآنية Instantaneous Velocity والانطلاق

السرعة الآنية (v_x) تساوي قيمة غاية النسبة $(\Delta x/\Delta t)$ عندما تقترب (Δt) من الصفر:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.5)$$

في موضوع التفاضل والتكامل، يسمى هذا الحد مشتقة (x) بالنسبة الى (t) ، وتكتب (dx/dx): لذلك تكون السرعة الآنية

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad (2.6)$$

يمكن أن تكون اشارة السرعة الآنية موجبة أو سالبة أو صفر.

يعرف الانطلاق الآني للجسيم بأنه (قيمة سرعته الآنية). كما هو الحال مع متوسط الانطلاق، فإن الانطلاق الآني ليس له اتجاه يرتبط به.

مثال (2.1): يتحرك جسيم على امتداد (المحور- x). حيث يتغير موقعه مع الزمن وفقا للمعادلة: $(x = -4t + 2t^2)$، وان (x) تقاس بالأمتار و (t) تقاس في الثواني.

(A) احسب إزاحة الجسيم في الفواصل الزمنية $(t = 0)$ إلى $(t = 1\ \mathrm{s})$ و $(t = 1\ \mathrm{s})$ إلى $(t = 3\ \mathrm{s})$.

(B) احسب متوسط السرعة خلال هذه الفاصلتان الزمنيتان.

(C) أوجد السرعة الآنية للجسيم عند $(t = 2.5\ \mathrm{s})$.

الحل:

(A): في الفاصلة الزمنية الأولى، $(t = 0)$ إلى $(t = 1\ \mathrm{s})$:

$$\Delta x = x_f - x_i = [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = -2\ \mathrm{m}$$

اما في الفاصلة الزمنية الثانية، $(t = 1\ \mathrm{s})$ إلى $(t = 3\ \mathrm{s})$:

$$\Delta x = x_f - x_i = [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = +8\ \mathrm{m}$$

(B): في الفاصلة الزمنية الأولى، استخدم المعادلة $(v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ مع $\Delta t = t_f - t_i = 1\ \mathrm{s}$:

$$v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s}} = -2\ \mathrm{m/s}$$

وفي الفاصلة الزمنية الثانية، $\Delta t = t_f - t_i = 3 - 1 = 2\ \mathrm{s}$:

$$v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{+8\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{s}} = +4\ \mathrm{m/s}$$

(C): السرعة الآنية تعطى بالمعادلة $v_x = \frac{dx}{dt}$ حيث ان معادلة الموقع $(x = -4t + 2t^2)$ فيكون

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 2t^2) = -4 + 4t$$

وعند زمن $t = 2.5\ \mathrm{s}$ تكون السرعة الآنية

$$v_x = 4 + 4t = -4 + 4(2.5) = +6\ \mathrm{m/s}$$

2.3 التعجيل

- عندما تتغير سرعة الجسيم مع مرور الزمن، يقال عن الجسيم بان له تعجيل.
- يعرف **متوسط التعجيل** للجسيم $(a_{x,\mathrm{av}})$ بانه (التغير في السرعة (Δv_x) مقسوما على الفاصلة الزمنية (Δt) التي يحدث خلالها هذا التغيير): ويعطى متوسط التعجيل بالعلاقة

$$a_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t_f - t_i} \qquad (2.7)$$

ان وحدة التعجيل هي المتر على مربع الثانية $(\mathrm{m/s^2})$.

- يساوي التعجيل الآني مشتقة السرعة بالنسبة الى الزمن: ويعطى بالعلاقة

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.8)$$

- في حالة الحركة في خط مستقيم، يرتبط اتجاه سرعة الجسم واتجاه تعجيله كما يلي: عندما تكون سرعة الجسيم وتعجيله في نفس الاتجاه، فإن الجسيم يتعجل بتعجيل تزايدي. ومن ناحية أخرى، عندما تكون سرعة الجسيم والتعجيل في اتجاهين متعاكسين، فإن الجسيم يتعجل بتعجيل تباطؤ.
- لكون ان $v_x = \frac{dx}{dt}$، فانه يمكن أيضا كتابة التعجيل على النحو الاتي:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.9)$$

وهذا يعني، انه في الحركة في بعد واحد، يساوي التعجيل، المشتقة الثانية لـ (x) بالنسبة للزمن.

مثال (2.2): تتغير سرعة الجسيم المتحرك على طول (المحور- x) وفقا للمعادلة $(v_x = 40 - 5t^2)$ ، حيث تكون v_x بوحدات المتر على الثانية (m/s) و (t) بالثانية (s).

(A) أوجد متوسط التعجيل في الفاصلة الزمنية $(t = 0$ إلى $t = 2\text{ s})$.

(B) احسب التعجيل عند $t = 2\text{ s}$.

الحل:

(A)

$$v_{x1} = 40 - 5t^2 = 40 - 5(0)^2 = 40\,\text{m/s}$$

$$v_{x2} = 40 - 5t^2 = 40 - 5(2)^2 = 20\,\text{m/s}$$

$$a_{x,\text{av}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{20 - 40}{2 - 0} = -10\ \text{m/s}^2$$

تشير العلامة السالبة إلى أن الجسيم يخضع لتعجيل تباطؤ.

(B)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(40 - 5t^2) = -10t = -10(2) = -20\ \text{m/s}^2$$

2.4 الجسيمات تحت تأثير تعجيل ثابت Particles under Constant Acceleration

إذا تغير تعجيل الجسيم مع الزمن، تكون حركته معقدة ويصعب تحليلها. ولكن هناك نوعا شائعا وبسيطا للحركة الأحادية البعد one-dimensional motion، وهي ان يكون التعجيل فيها ثابتا constant. في هذه الحالة:

- ❖ يكون متوسط التعجيل $(a_{x,\text{av}})$ خلال أي فترة زمنية مساويا عدديا للتعجيل الآني (a_x) في أي لحظة خلال الفاصلة الزمنية،
- ❖ وتتغير السرعة بنفس المعدل الزمني طوال الحركة.

وفي هذه الحالة يؤخذ بنظر الاعتبار ان **الجسيمات تكون تحت تعجيل ثابت**.

إذا استبدلنا $(a_{x,\text{av}})$ بـ (a_x) في المعادلة $\left(a_{x,\text{av}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{fx}-v_{ix}}{t_f-t_i}\right)$ وأخذنا الزمن $t_i = 0$ و (t_f) في أي زمن لاحق (t) ، نجد أن:

$$a_x = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t - 0}$$

فيكون لتعجيل a_x ثابت

$$v_{fx} = v_{ix} + a_x t \qquad (2.10)$$

ويمكننا التعبير عن متوسط السرعة في أي فاصلة زمنية لتعجيل ثابت a_x بالعلاقة

$$a_{x,\text{av}} = \frac{v_{fx} + v_{ix}}{2} \qquad (2.11)$$

لاحظ أن هذه المعادلة لمتوسط السرعة تنطبق فقط في الحالات التي يكون فيها التعجيل ثابتا.

الآن يمكننا استخدام المعادلات $\left(\Delta x = x_f - x_i\right)$ و $\left(v_{x,\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ للحصول على موضع الجسيم كدالة للزمن كما يلي:

$$v_{x,\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{x_f - x_i}{t - 0} = \frac{x_f - x_i}{t}$$

$$\therefore x_f - x_i = v_{x,\text{av}} t$$

وحيث ان $\left(a_{x,\text{av}} = \frac{v_{fx}+v_{ix}}{2}\right)$ يكون

$$x_f - x_i = \left(\frac{v_{fx} + v_{ix}}{2}\right) t$$

فيكون لتعجيل a_x ثابت

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})t \qquad (2.12)$$

تعطي هذه المعادلة الموضع النهائي للجسيم عند الزمن (t) بحدود السرع الأولية والنهائية .

يمكننا الحصول على معادلة مفيدة اخرى لموضع الجسيم تحت تعجيل ثابت a_x بتعويض v_{xf} من المعادلة $(v_{fx} = v_{ix} + a_x t)$ في المعادلة الاخيرة $x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})t$ كما يلي:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xi} + a_x t)t$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(2v_{ix} + a_x t)t$$

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.13)$$

تعطي هذه المعادلة الموضع النهائي للجسيم في الزمن (t) بحدود الموضع الأولي x_i والسرعة الأولية v_{ix} والتعجيل الثابت a_x.

أخيرا، يمكننا الحصول على معادلة للسرعة النهائية v_{fx} التي لا تحتوي على الزمن كمتغير ولتعجيل الثابت a_x عن طريق تعويض قيمة (t) من المعادلة $(v_{fx} = v_{ix} + a_x t)$

$$v_{fx} = v_{ix} + a_x t$$

$$\therefore t = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{a_x}$$

في المعادلة $x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})t$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})\left(\frac{v_{fx} - v_{ix}}{a_x}\right)$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{fx}^2 - v_{ix}^2}{a_x}\right)$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{fx}^2 - v_{ix}^2}{a_x}\right)$$

$$2a_x(x_f - x_i) = v_{fx}^2 - v_{ix}^2$$

$$\therefore v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \qquad (2.14)$$

تعطي هذه المعادلة السرعة النهائية v_{fx} بحدود السرعة الأولية v_{ix}، وتعجيل ثابت a_x، وموضع الجسيم $(x_f - x_i)$.

عندما يكون تعجيل الجسيم صفرا، تكون سرعته ثابتة ويتغير موضعه بشكل خطي مع مرور الزمن.

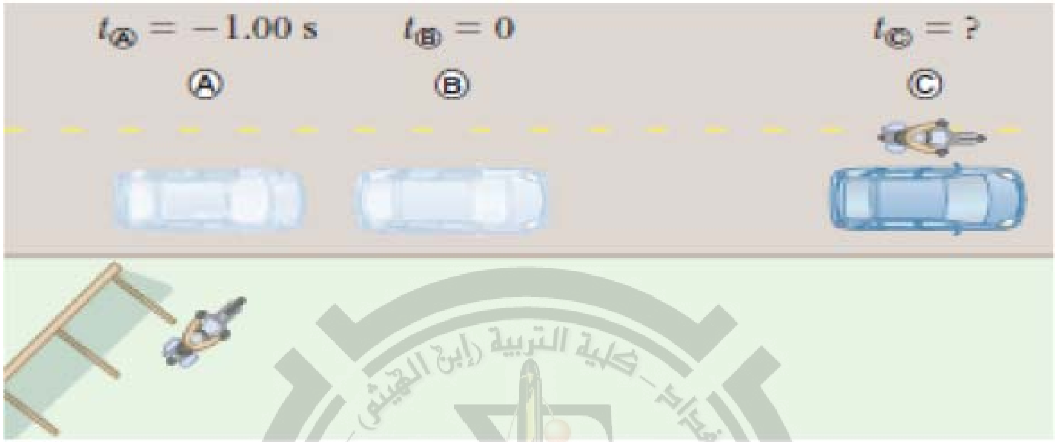
تسمى المعادلات (2.10) و (2.12) و (2.13) و (2.14) **بالمعادلات الحركية** Kinematic Equations لحركة الجسيمات تحت تعجيل ثابت a_x. هذه المعادلات مدرجة في الجدول أدناه:

المعادلة	المعلومات المقدمة من المعادلة
$v_{fx} = v_{ix} + a_x t$	السرعة كدالة للزمن
$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})t$	الموضع كدالة للسرعة والزمن
$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	الموضع كدالة للزمن
$v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	السرعة كدالة الموضع

مثال (2.3): تسير سيارة بانطلاق ثابت $(45\ \mathrm{m/s})$ بجوار شرطي مرور يملك دراجة نارية مختبئ خلف لوحة إعلانات. بعد مرور السيارة المسرعة بثانية واحدة من لوحة الإعلانات؛ انطلق شرطي المرور بتعجيل ثابت $(3\ \mathrm{m/s^2})$ من موضع لوحة الإعلانات للقبض على سائق السيارة المخالف للتعليمات، ما هي المدة المستغرقة ليلتحق بها شرطي المرور بالسيارة؟

الحل:

أولا، نكتب معادلات الموضع لكل من السيارة والدراجة النارية كدالة للزمن. من الملائم اختيار موضع لوحة الإعلانات كنقطة الأصل ووضع الزمن في النقطة B مساويا الى الصفر $(t_B = 0)$ في الوقت الذي يبدأ فيه شرطي المرور حركته على الدراجة. ففي تلك اللحظة، تكون السيارة قد قطعت بالفعل مسافة $(45\ \text{m})$ من لوحة الإعلانات لأنها تسير بانطلاق ثابت يبلغ $45\ \text{m/s}$ بمدة ثانية واحدة. لذلك، فإن الموضع الأولي للسيارة x_B المسرعة يساوي $(45\ \text{m})$.



بتطبيق المعادلة $(x_f = x_i + v_x t)$ لإيجاد موضع السيارة عند أي زمن (t) كما يلي:

$$x_f = x_i + v_x t \quad \rightarrow \quad x_{car} = x_B + v_{x,car} t$$

عند الزمن $(t = 0)$، تعطي هذه المعادلة الموضع الاولي الصحيح للسيارة عندما يبدأ شرطي المرور الحركة:

$$x_{car} = x_B + v_{x,car} t \quad \rightarrow \quad x_{car} = 45\ \text{m} + v_{x,car}(0) = 45\ \text{m}$$

يبدأ الشرطي حركته من السكون عند الزمن $(t_B = 0)$ بتعجيل ثابت $(3\ \text{m/s}^2)$ بعيدا عن نقطة الأصل. لذلك نستخدم المعادلة $(x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2)$ لإيجاد موضعه عند أي زمن (t) كما يلي:

$$x_f = x_i + v_{ix} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \rightarrow \quad x_{trooper} = x_B + v_{0,trooper} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x_{trooper} = 0 + (0)t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x_{trooper} = \frac{1}{2} a_x t^2$$

بمساواة مواضع السيارة والشرطي لتمثيل التحاق الشرطي بالسيارة عند الموضع C يكون لدينا

$$x_{\text{trooper}} = x_{\text{car}}$$

$$\frac{1}{2}a_x t^2 = x_{\text{B}} + v_{x,\text{car}}t$$

$$\frac{1}{2}a_x t^2 - v_{x,\text{car}}t - x_{\text{B}} = 0$$

$$\frac{1}{2}(3)t^2 - (45)t - 45 = 0 \quad \rightarrow \; 1.5t^2 - 45t - 45 = 0$$

$$t^2 - 30t - 30 = 0$$

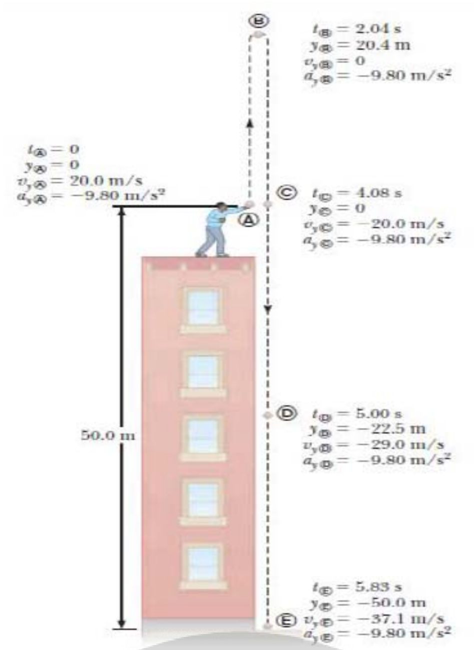
$$t = 31 \text{ m}$$

2.5 الأجسام الساقطة بشكل حر Freely Falling Objects

الجسم الساقط سقوطا حرا هو (أي جسم يتحرك بحرية تحت تأثير الجاذبية gravity فقط، بغض النظر عن حركته الأولية).

- يشار إلى مقدار تعجيل السقوط الحر بالرمز (g). ان قيمة (g) تتناقص مع زيادة الارتفاع فوق مستوى سطح الأرض. علاوة على ذلك، تحدث اختلافات طفيفة في (g) مع حدوث تغييرات في خط العرض للأرض. وبشكل عام عند مستوى سطح الأرض، تساوي قيمة (g) حوالي 9.80 m/s^2.
- لاحظ أن الحركة تكون بالاتجاه العمودي (الاتجاه المحور y) بدلا من الاتجاه الأفقي على محور (x)
- نختار ان تكون قيمة ($g = -9.80 \text{ m}/s^2$) ، حيث تعني الإشارة السالبة أن تعجيل السقوط الحر للجسم يكون للأسفل.

مثال (2.4): قذف حجر من سطح بناية الى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (20 m/s) و وصل لارتفاع (50 m) فوق مستوى سطح الأرض، لكن عند عودته إلى الأسفل لم يصطدم حافة سقف البناية كما هو موضح في الشكل أدناه.



(A) باستخدام $t_{\mathrm{A}} = 0$ للزمن الذي يترك فيه حجر يد الرامي في الموضع A. احسب الزمن الذي يصل فيه الحجر إلى أقصى ارتفاع له فوق سطح البناية؟

الحل: نستخدم المعادلة $(v_{fx} = v_{ix} + a_x t)$ لحساب الزمن الذي يصل فيه الحجر إلى أقصى ارتفاع B، حيث يستبدل الحرف x بالحرف y دلالة على ان الحركة على المحور الشاقولي

$$v_{fy} = v_{iy} + a_y t \;\; \rightarrow \;\; t_B = \frac{v_{fy} - v_{iy}}{a_y}$$

دائما نعوض عن قيمة التعجيل الأرضي بالإشارة السالبة كون ان اتجاهه دائما نحو الأسفل فيكون

$$t_B = \frac{0 - 20}{-9.80} = 2.04 \text{ s}$$

(B) جد أقصى ارتفاع يصل اليه الحجر؟

الحل: كما في الفرع (A)، نختار النقاط الأولية والنهائية عند بداية ونهاية الرحلة الى الاعلى. بجعل $(y_{\mathrm{A}} = 0)$ وتعويض الزمن المحسوب من الفرع (A) في المعادلة $(x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2)$ لإيجاد أقصى ارتفاع مع ملاحظة استبدال الحرف x بالحرف y لكون ان الحركة شاقوليه. وبذلك سيكون الاستبدال أيضا لـ x_f لتكون $y_{\max}$ التي هي نفسها y_{B} لكون النقطة B اقصى ارتفاع يصل اليه الحجر،

واستبدال x_i بـ y_{A} وهو الموضع الذي قذف منه الحجر من النقطة A ، واستبدال السرعة v_{xi} لتكون $v_{y\mathrm{A}}$، وأخيرا استبدال التعجيل a_x ليكون a_y :

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \rightarrow \quad y_{\max} = y_{\mathrm{B}} = y_{\mathrm{A}} + v_{y\mathrm{A}}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y_{\max} = 0 + (20)(2.04) + \frac{1}{2}(-9.80)(2.04)^2 = 20.4 \text{ m}$$

(C) حدد سرعة الحجر عندما يعود إلى الارتفاع الذي ألقي منه؟

اختر النقطة الأولية التي قذف منها الحجر (A) والنقطة الأخيرة التي سيمر عليها (C) نزولا. لاحظ ان النقطتان (A) و (C) تقعان على نفس الارتفاع من مستوى سطح الأرض.

نعوض عن القيم المعلومة في المعادلة $v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$: بأخذ بنظر الاعتبار الاستبدالات في هذه الحالة تكون:

$$v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad \rightarrow \quad v_{y\mathrm{C}}^2 = v_{y\mathrm{A}}^2 + 2a_y(y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}})$$

$$v_{y\mathrm{C}}^2 = (20)^2 + 2(-9.80)(0 - 0) = 400 \ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\therefore \ v_{y\mathrm{C}} = -20 \ \text{m/s}$$

عند أخذ الجذر التربيعي للمعادلة اعلاه، يمكننا اختيار قيمة الجذر الموجب أو السالب. وقد اخترنا الجذر السالب لأننا نعلم أن الحجر يتجه لأسفل عند النقطة C. وبذلك نجد ان سرعة الحجر عند وصوله إلى ارتفاعه الأصلي مساوية بالمقدار لسرعته الابتدائية التي قذف بها، ولكنها في الاتجاه المعاكس.

(D) أوجد سرعة وموضع الحجر عند الزمن $t = 5$ s ؟

الحل: نختار النقطة الابتدائية بالضبط بعد رمي الحجر والنقطة الأخيرة بعد مرور ($t = 5$ s).

نحسب السرعة عند النقطة (D) من المعادلة ($v_{fx} = v_{ix} + a_x t$):

$$v_{fx} = v_{ix} + a_x t \quad \rightarrow \quad v_{y\mathrm{D}} = v_{y\mathrm{A}} + a_y t$$

$$v_{y\mathrm{D}} = 20 + (-9.80)(5) = -29 \ \text{m/s}$$

نستخدم المعادلة ($x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$) لإيجاد موضع الحجر بعد مرور ($t = 5$ s).

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \rightarrow \quad y_{\mathrm{D}} = y_{\mathrm{A}} + v_{y\mathrm{A}}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y_{\mathrm{D}} = 0 + (20)(5) + \frac{1}{2}(-9.80)(5)^2 = -22.5\ \mathrm{m}$$