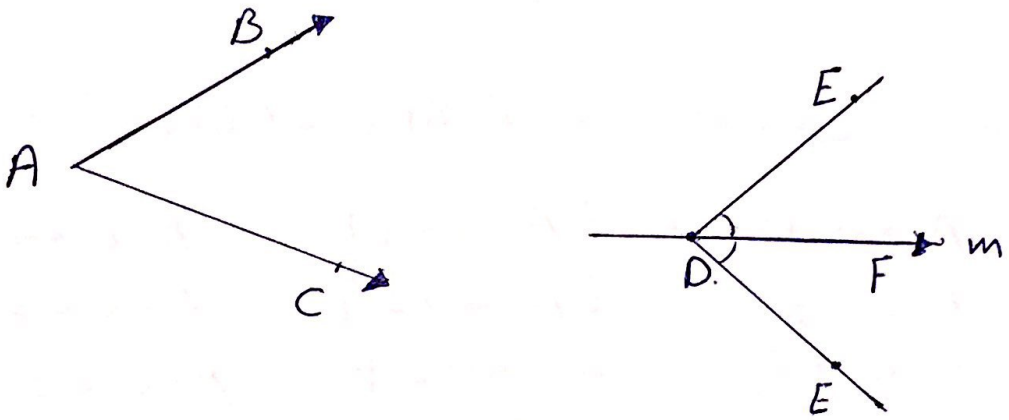
تطابق الزوايا والمثلثات

مجموعة البديهيات

بديهية (١٤) (بديهية انشاء زاوية)

لتكن BAC زاوية ولتكن DF شعاعاً كيفما ضط m فإنه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط DE بحيث

$$\angle BAC \cong \angle EDF$$



بديهية (١٥)

تطابق الزاويا هو علاقة تكافؤ. اي ان تطابق الزاويا هو علاقة:

١) انعكاسية اي ان كل زاوية تطابق نفسها

$$\angle BAC \cong \angle BAC$$

٢) علاقة تناظرية اي ان:

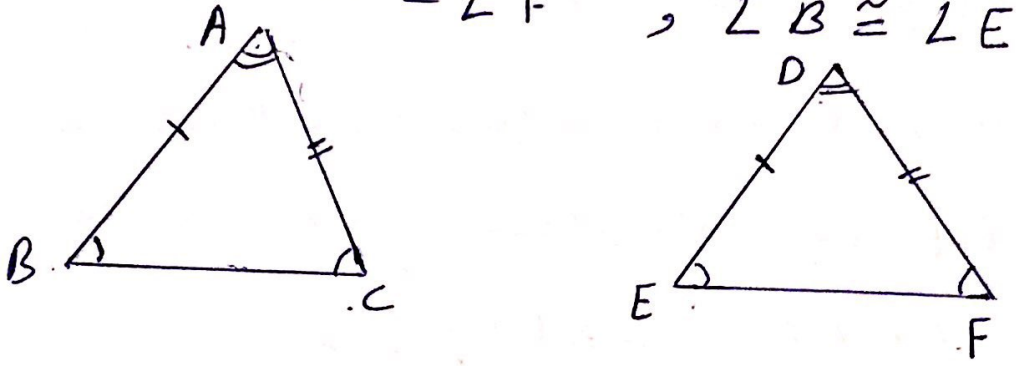
$$\angle BAC \cong \angle CDF \overset{\text{فإن}}{\Rightarrow} \angle CDF \cong \angle BAC$$

٣) علاقة متعدية اي ان اذا كان:

$$\angle BAC \cong \angle CDF, \angle CDF \cong \angle GHI \Rightarrow \angle BAC \cong \angle GHI$$

بديهية (١٦)

في مثلثين ABC ، DEF اذا كان $A-B \cong D-E$ ، $A-C \cong D-F$ ، $\angle A \cong \angle D$ فإن $\angle B \cong \angle E$ ، $\angle C \cong \angle F$



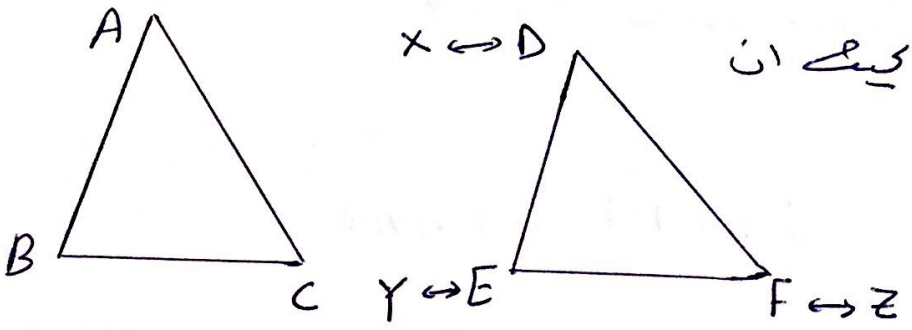
رمز

بالرمز $\triangle ABC - \triangle DEF$ نعني التناظر التالي :

$A \leftrightarrow D$	$\angle A \leftrightarrow \angle D$	$A-B \leftrightarrow D-E$
$B \leftrightarrow E$	$\angle B \leftrightarrow \angle E$	$B-C \leftrightarrow E-F$
$C \leftrightarrow F$	$\angle C \leftrightarrow \angle F$	$A-C \leftrightarrow D-F$

تعريف (٣)

ليكن ABC ، DEF مثلثين ، اذا وجد على الأقل تناظر واحد $\triangle ABC - \triangle XYZ$ حيث ان X, Y, Z هي D, E, F في ترتيب ما بحيث ان



$\angle A \cong \angle X$	$A-B \cong X-Y$
$\angle B \cong \angle Y$	$B-C \cong Y-Z$
$\angle C \cong \angle Z$	$A-C \cong X-Z$

فإن هذا التناظر يدعى تناظر متطابق ويقال المثلثين متطابقان

رمز: اذا كان $\Delta ABC - \Delta DEF$ هو تناظر متطابق للمثلثين ABC و DEF فانه يرمز لهذا بالرمز:

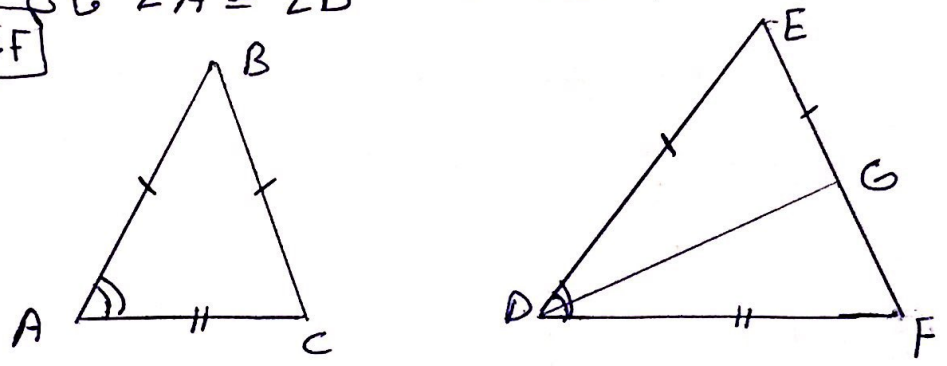
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

مبرهنة (٥٦) (SAS)

اذا كان ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث اخر، فان المثلثين يتطابقان.

بعبارة اخرى، اذا كان في مثلثين ABC ، DEF ، $A-B \cong D-E$ و $A-C \cong D-F$ و $\angle A \cong \angle D$ فان

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



البرهان:

من ب٢ ← $\angle B \cong \angle E$ ، $\angle C \cong \angle F$ ، حسب تعريف ٣، يجب ان نبرهن $B-C \cong E-F$. نفرض ان العبارة خطأ.

من م٥٠، اما $B-C < E-F$ او $E-F < B-C$

نفرض ان $B-C < E-F$

حسب (تعريف ٢٢) تعريف الاصغر ← توجد نقطة G بحيث ان $B-C \cong E-G$ و ان $E-G-F$

من ب٦ ← E ، G ، F نقاط متمايزة وتقع على مستقيم واحد اي ان F ، G تقعان على المستقيم EF.

م٨ (و) ← F و G في نفس الجهة من DE.

في المثلثين ABC ، DEG ،

$\angle BAC \cong \angle EDG$ ← ب١٦ وكذلك من الفرض $\angle BAC \cong \angle EDF$

لذلك من ب١٤ ← $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DF}$ اي ان F ، $G \in DF$ وهذا تناقض م ،

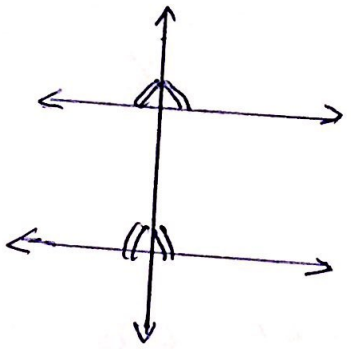
لذلك فأن الفرض $B-C < E-F$ يؤدي الى تناقض وبنفس الطريقة $E-F < B-C$ يؤدي الى تناقض لذلك فأن

$B-C \cong E-F$ وان $\triangle BAC \cong \triangle EDF$

و.ه.م

تعريف ٤

زاويتان لهما ضلع مشترك وضلعيهما الاخرين يكونان شعاعين متعاكسين يقال عنهما تكونان زوجاً خطياً.



تعريف (٥)

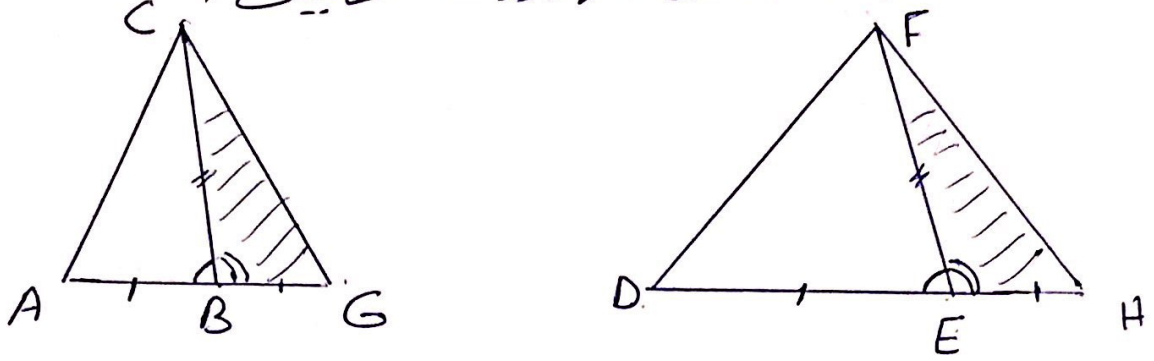
زاويتان تطابقان على التوالي زاويتين لزوج خطي يقال عنهما متكاملتان ، احدهما مكملة للاخرى.

مبرهنة (٥٧) للاطلاع فقط النص

اذا كانت زاويتان تكونان زوجاً خطياً ، فأنهما متكاملتان

مبرهنة (٥٨)

اذا كانت زاويتان متطابقتين، فانه تتطابق كذلك الزاويتان اللتان تكونان معهما، زوجين خطيين.



البرهان

لتكن $\angle ABC \cong DEF$

من ب٩ ← توجد نقطة G بحيث ان $A-B-G$ وتوجد نقطة H بحيث ان $D-E-H$.

لذا يكون الشعاعان BA ، BG متعاكسين. كذلك الشعاعان ED ، EH متعاكسين، وتكون الزاويتان ABC ، CBG زوجاً خطياً كذلك ~~الزاويتان~~ الزاويتان DEF ، FEH زوجاً خطياً.

نختار النقاط D ، H ، F بطريقة لا تؤثر على التعميم بحيث ان

$D-E \cong A-B$ ، $E-F \cong B-C$ ، $E-H \cong B-G$

يجب ان نبرهن $\boxed{\angle CBG \cong \angle FEH}$

في المثلثين ABC ، DEF فيهما:

$A-B \cong D-E$ ، $\angle DEF \cong \angle ABC$ ، $B-C \cong E-F$ لذلك

$A-C \cong D-F$ ← (SAS) حسب م ٥٦ ، $\angle EDF \cong \angle BAC$

من ب١٣ ← $A-G \cong D-H$ (SAS) حسب م ٥٦ فيكون $\triangle CAG$ ، $\triangle FDH$

$\triangle CAG \cong \triangle FDH$ ← $C-G \cong F-H$ ، $\angle AGC \cong DHF$

في المثلثين CBG ، FEH فيهما:

$\angle BGC \cong \angle EHF$ ، $B-G \cong E-H$ ، $G-C \cong H-F$

من ب١٩ ← $\angle CBG \cong \angle FEH$

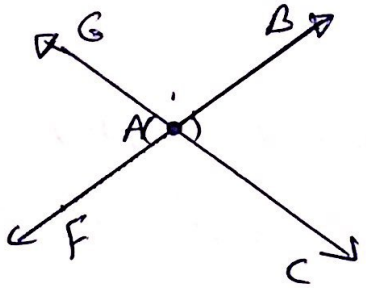
$\angle CBG \cong \angle FEH$ ← ب ١٦

نتيجة (١) للاطلاع (فقط للغة)

مكملات الزاويا المتطابقة تكون متطابقة

تعريف (٦)

يقال عن زاويتين لهما رأس مشترك بأنهما زاويتان رأسيتان اذا وفقط اذا شعاعي زاوية واحدة هما الشعاعين المعاكسين لشعاعي الزاوية الاخرى.

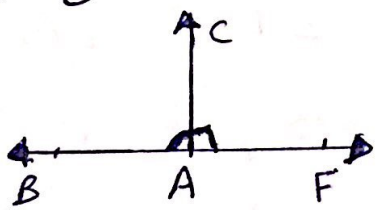


نتيجة (٢) : للاطلاع (فقط للغة)

تكون الزاويتان الرأسيتان متطابقتين.

تعريف (٧)

زاويتان لهما رأس مشترك وضلع مشترك وضلعاهما الاخريين في الجهتين المتعاكستين لذلك الضلع المشترك تدعيان زاويتين متجاورتين.



نتيجة (٣)

زوجا خطية: اذا كانت زاويتان متكاملتين ومتجاورتين فانهما تكونان