الفصل الخامس

(التطابق والمقارنة)

بديهيات عن تطابق القطع

التطابق: هو علاقة اولية تقنية، ويرمز له بالرمز $\cong$ فيقال ان شكلاً يطابق شكلاً اخر فمثلاً

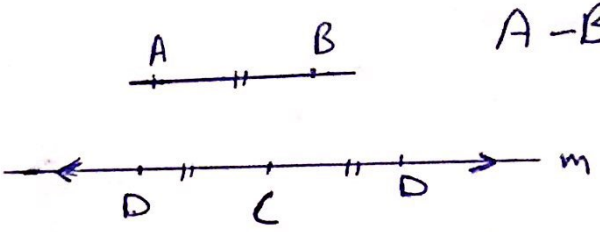
$A-B$ تطابق $C-D$ يرمز لها:

$$A-B \cong C-D$$

مجموعة البديهيات

بديهية (I1)

لتكن $A-B$ قطعة، C نقطة على خط m فانه على كل شعاع على m نقطة بدايته C توجد نقطة واحدة فقط D بحيث $A-B \cong C-D$



بديهية (I2)

تطابق القطع هو علاقة تكافؤ.

نقصد بعلاقة التكافؤ اي ان تطابق القطع هي

① علاقة انعكاسية اي القطعة تطابق نفسها اي اذا:

$$A-B \cong A-B$$

② علاقة تناظرية اي ان اذا $A-B \cong C-D$ فان $C-D \cong A-B$

③ علاقة متعدية اي ان اذا كان

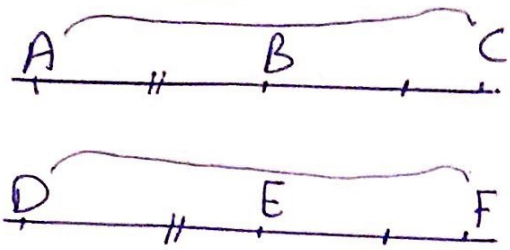
$$A-B \cong C-D, C-D \cong G-F \Rightarrow A-B \cong G-F$$

مبرهنة (١٣) (جمع القطع)

اذا كان (أ) $A-B-C$ (ب) $D-E-F$

و (ج) $A-B \cong D-E$ ، (د) $B-C \cong E-F$

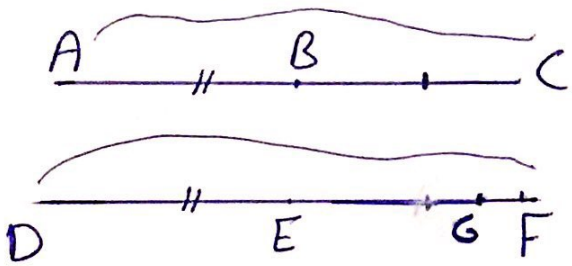
فإن $A-C \cong D-F$



مبرهنة (١٠) (طرح القطع)

اذا كان (أ) $A-B-C$ ، (ب) $D-E-F$

و (ج) $A-B \cong D-E$ ، $A-C \cong D-F$ فإن $B-C \cong E-F$



البرهان:

نفرض ان $B-C$ لاتطابق $E-F$

من ب١١ ← توجد نقطة G بحيث ان $D-E-G$ ، $B-C \cong E-G$

وكذلك $\because B-C$ لاتطابق $E-F$

من ب١٢ ← $E-F$ لاتطابق $E-G$ ← $F \neq G$

لكن بما ان $A-B \cong D-E$ ، $B-C \cong E-G$ ← ب١٢

$A-C \cong D-G$

ولكن من الفرض $A-C \cong D-F$ ← ب١٢ $D-F \cong D-G$

من ب١١، ب١٢ ← $F=G$ وهذا تناقض مع البرهان

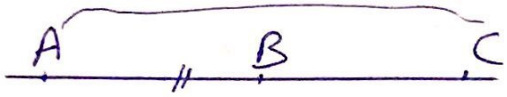
$\therefore$ نستنتج ان $B-C \cong E-F$

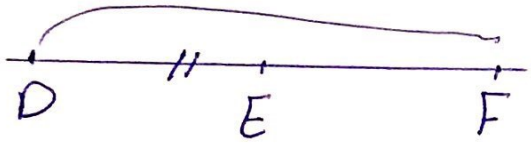
مسلمة (٥١) للاطلاع (قطع الفرجار)

اذا كان $A-C \cong D-F$ ، B نقطة بين $A-C$

فانه توجد نقطة E بحيث $D-E-F$ ،

$A-B \cong D-E$





مقارنة القطع

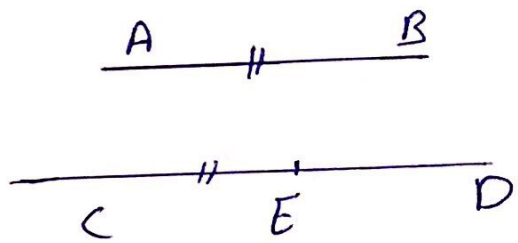
تعريف (٢٢)

$A-B$ تكون اصغر من $C-D$ اذا وفقط اذا توجد نقطة E بحيث ان $C-E-D$ ،

$A-B \cong C-E$

رمز

يرمز للعبارة $A-B$ اصغر من $C-D$ بالرمز $A-B < C-D$



مبرهنة (٥٢) للاطلاع (قطع الفرجار)

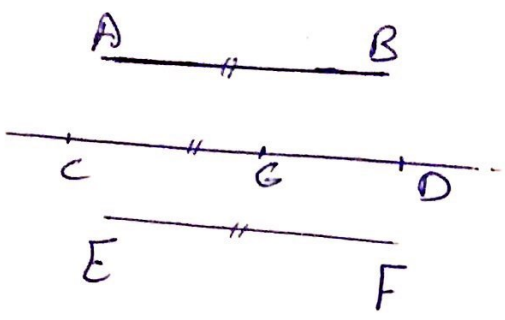
اذا كانت $A-B$ ، $C-D$ اي قطعتين فانه تحقق واحدة فقط مما يلي !

$A-B < C-D$ ، $A-B \cong C-D$، $C-D < A-B$

مبرهنة (٥٣)

اذا كان $A-B < C-D$ ، $A-B \cong E-F$ فإن $E-F < C-D$

البرهان



بما ان $A-B < C-D$ بالفرض

حسب تعريف (١١) توجد نقطة G بحيث

ان $C-G-D$ ، $A-B \cong C-G$

من الفرض $A-B \cong E-F$

من ب١٢ $\leftarrow$ $E-F \cong C-G$.

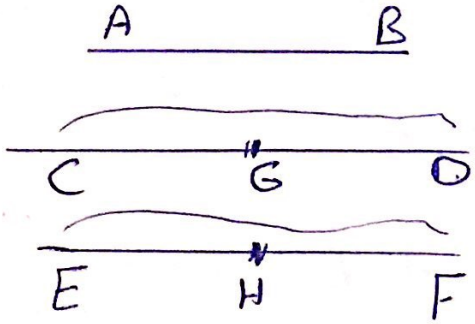
من تعريف ١١ يكون $E-F < C-D$.

مبرهنة (٥٤)

اذا كان $A-B < C-D$ ، $C-D \cong E-F$ فإن

$A-B < E-F$

البرهان



من تعريف ١١ $\leftarrow$ توجد نقطة G

بحيث ان $C-G-D$ ، $A-B \cong C-G$

من م ١٥ $\leftarrow$ توجد نقطة H بحيث ان $E-H-F$ ،

$E-H \cong C-G$

بما ان $A-B \cong C-G$ بالبرهان $\xleftarrow{\text{ب١٢}}$ $A-B \cong E-H$

لذلك $A-B < E-F$

مبرهنة (٥٥)

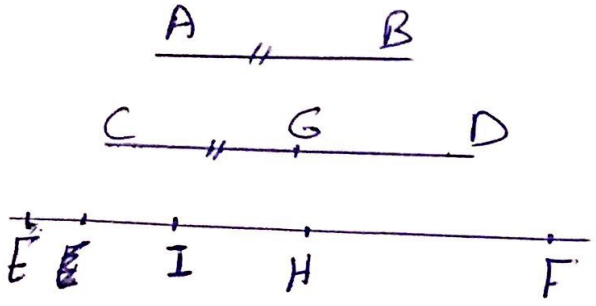
اذا كان $C-D < E-F$ و $A-B < C-D$ فإن

$$A-B < E-F$$

البرهان

بما ان $A-B < C-D$ فانه توجد نقطة G

بحيث ان $A-B \cong C-G$ و $C-G-D$



بما ان $C-D < E-F$ ← بالفرض

توجد نقطة H بحيث ان $E-H-F$

و $C-D \cong E-H$

من م ٤٥ ← $A-B < E-H$ ← توجد نقطة I بحيث $E-I-H$

و $A-B \cong E-I$.

بما ان $E-H-F$ ، $E-I-H$ ← م ٤٣ ← $E-I-H-F$

لذلك $E-I-F$.

∴ يكون $A-B < E-F$