الفصل الاول

علم الاحصاء:هو ذلك العلم الذي يعمل على استخدام الاسلوب العلمي في طرق جمع البيانات وتبويبها وتلخيصها وعرضهاوتحليلها بهدف الوصول منها على استنتاجات وقرارات مناسبة

مفاهيم الاحصاء :

١-البيانات:

أ-البيانات غيرالمبوبة (Ungrouped data):

هي البيانات الاولية (Raw data) التي جمعت ولم تبوب

ب-البيانات المبوبة (grouped data):

هي البيانات التي نظمت في جدول توزيع تكراري.

٢-المتغير :هي أي ظاهرة توجد اختلافات بين مفرداتها ويرمز لها بالرمز الخ والمتغيرات نوعان

أ-المتغيرات الوصفية (نوعية):

وهي المتغيرات التي يمكن قياسها بوسائل قياس مألوفة او هي تلك الظواهر والصفات التي لايمكن قياسها مباشرة بالارقام العددية مثل الحالة الاجتماعية (غني،فقير)

ب-متغيرات كمية:

هي تلك الظواهر او الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بالارقام العددية مثل صفة الطول والوزن والعمر ....وتقسم المتغيرات الكمية الى:

١-متغيرات المستمرة :وهي المتغيرات التي تاخذ المفردة فيها أي قيمة رقمية ضمن مدى معين لو افترضنا ان اطوال مجموعة من الاشخاص تتراوح بين 170-130سم نكتب المتغير بصيغة $130 \leq X \leq 170$

٢- متغيرات المتقطعة (المنفصلة) :وهي المتغيرات التي تاخذ المفردة فيها قيما متباعدة لو افترضنا ان عدد افراد الاسرة في اربعة عوائل هي 5,4,3,2

نكتب المتغير بصيغة $X = 2 , 3 ,4 ,5$

المجتمع :عبارة عن جميع القيم او المفردات التي يمكن ان ياخذها المتغير والمجتمع اما ان يكون :

أ-مجتمع محدد: أي يمكن حصر عدد مفرداته مثلاعدد وحدات منتجة في مصنع معين.

ب- مجتمع غير محدد: وهوالمجتمع الذي يصعب حصر عدد مفرداته مثلاعدد البكتريا في حقل معين.

٤- العينة :عبارة عن مجموعة من المفردات يتم اختيارها بطريقة معينة من المجتمع

المجموع (Summation) :

اذا كانت (x1,x2,,,,,,,,,,,,,,xn) تمثل مفردات المتغير X فان مجموع هذه المفردات يعبر عنها بالرمز : $\sum X_i$

اي ان : $\sum X_i = x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n$

EX : $X= 6,7,4,3,$ find $\sum X_i$, $\sum X_i^2$

SOL: $\sum X_i = 6 +7+4+3 = 20$

$\sum X_i^2 = 36 + 49 +16 +9 = 110$

EX: $X= 5 , 3 ,7 ,1$ find $(\sum X_i)^2$

العرض الجدولي (Tabular Presentation):

جدول التوزيع التكراري (Frequency Distribution):

هو جدول بسيط يتكون من عمودين ،العمود الاول تقسم فيه قيم المتغير الى مجموعات تدعى الفئات (Classes)والثاني يبين فيه عدد مفردات كل فئة يسمى التكرار(Frequency) ولكل فئة حدان الحد الاعلى الحقيقي والحد الادنى الحقيقي فاذا كانت حدود الفئات اعدادا صحيحة فان الحد الادنى الحقيقي لاي فئة يكون مساويا للحد الادنى لتلك الفئة مطروحا منه (0.5) والحد الاعلى الحقيقي لاي فئة يكون مساويا للحد الاعلى مضافا اليه (0.5)

١-جدول البسيط :وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات حسب صفة واحدة ويتالف عادة من عمودين الاول يمثل تقسيمات الصفة او الظاهرة الى فئات او مجموعات والثاني يبين عدد المفردات التابعة لكل فئة او مجموعة ،

مثال/ الجدول التالي يمثل توزيع عدد من طلبة جامعة ما حسب اوزانهم:

Fi	الفئات
85	60-62
15	63-65
45	66-68
27	69-71
8	72-74
180	المجموع

٢-جدول المزدوج :

وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات حسب صفتين او ظاهرتين او اكثر في نفس الوقت مثلا الجدول الزدوج (لصفتين)يتالف من الصفوف تمثل فئات او مجاميع احدى الصفتين و الاعمدة تمثل فئات او مجاميع الصفة الاخرى اما المربعات التي تقابل الصفوف والاعمدة تحتوي على عدد المفردات او التكرارات المشتركة في فئات ومجاميع كلا الصفتين،

مثال/ الجدول الاتي يمثل توزيع عدد من طلبة كلية ما حسب صفتي الطول والوزن

	51-60	61-70	71-80	المجموع
121-140	20	6	4	30
141-160	2	40	10	52
161-18	2	6	10	18
المجموع	24	52	24	100

طول الفئة : (Class Length)

هو مقدار المدى بين حدي الفئة وهي عبارة عن الفرق بين الحدين الاعلى او الحدين الادنى للفئتين المتتاليتين.

مركز الفئة (Class mid –Point) : وهو عبارة عن منتصف المدى بين الحدي الفئة اي :

مركز الفئة = (الحد الاعلى +الحد الادنى) / 2

التكرار النسبي :وهي تبين الاهمية النسبة لكل فئة ويحسب كالاتي :

التكرار النسبي لاي فئة = (تكرار الفئة / مجموع التكرارات)= $fi/\sum fi$

حيث تشير fi الى التكرار الفئة و $\sum fi$ الى مجموع التكرارات الكلية

التكرار المئوي = (التكرار النسبي × 100)

جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد (Less than Clumulative -dist)

هو الجدول الذي يعطينا عدد المفردات التي تقل قيمتها عن الحد الادنى لفئة معينة.

المدرج التكراري (Histogram)

عبارة عن مستطيلات رأسية تمتد قواعدها على المحور الافقي لتمثل اطوال الفئات بينما ارتفاعاتها تمثل تكرارات الفئات ولرسم مدرج تكراري تتبع الخطوات الاتية :

١- نرسم المحور الافقي والمحور العمودي
٢- يتم تقسيم المحور الافقي الى اقسام متساوي بمقياس رسم مناسب بحيث يشمل جميع الحدود الحقيقية للفئات ويفضل ترك مسافة صغيرة بين نقطة الاصل والحد الادنى للفئة الاولى ويقسم المحور العمودي الى اقسام متساوية بحيث تشمل اكبر التكرارات
٣- يرسم على كل فئة مستطيل راسي تمثل قاعدته طول تلك الفئة وارتفاعه يمثل تكرار تلك الفئة .

المضلع التكراري: (Freq . Polygon)

عبارة عن خطوط مستقيمة متكسرة تصل بين نقاط كل نقطة فيها واقعة فوقة مركز فئة على ارتفاع يمثل تكرار تلك الفئة وعادة يقفل المضلع بايصال بدايته بالمحور الافقي بمركز فئة خيالية واقعة الى يسار اول فئة تكرارها صفر ونصل نهاية المضلع بالمحور الافقي بمركز فئة خالية واقعة الى يمين اخر فئة وتكرارها صفر ايضا.

ملاحظة :لرسم المضلع التكراري يجب رسم المرج التكراري اولا ثم تصنف القواعد العليا للمستطيلات والتي تمثل مراكز الفئات بنقاط ثم نصل هذه النقاط بمستفيمات.

المنحني التكراري (Freg Carve):

لايختلف فكرة رسم المنحني التكراري(Freg Carve) عن المضلع التكراري من حيث الاسلوب لكل الفرق الوحيد ما بينهما هو انه بدلا من توصيل النقاط (مركزالفئة ،التكرار) بمستقيمات فانه يتم تمرير منحني ما بين هذه النقاط هذا المنحني يمثل المنحني التكراري.

التمثيل البياني لجدول التوزيع التكراري التجميعي :

يستخدم لذلك المضلع التكراري التجميعي وهو عبارة عن خطوط مستقيمة متكسرة تصل بين نقاط واقعة فوق الحدود الحقيقية للفئات واعلى ارتفاع يمثل التكرار التجميعي وهنالك نوعان من المضلع التكراري التجميعي :

١- المضلع التكراري التجميعي التصاعدي:

لرسمه نتبع الخطوات الاتية :

أ-يتدرج المحور الافقي الى اقسام متساوية تمثل جميع حدود الفئات ويقسم المحور العمودي الى اقسام متساوية بحيث تشمل على اكبر التكرارات التجميعية

وهي المجموع الكلي للتكرارات.

ب- وضع نقطة امام كل حد فئة ويعادل ارتفاعها التكرار التجميعي التصاعدي لذلك الحد ثم نوصل تلك النقاط بخطوط مستقيمة أي ان المضلع يبدا من الصفر وينتهي باعلى نقطة .

٢-المضلع التكراري التجميعي التنازلي:

ويرسم بنفس الطريقة السابقة غير ان هذا المضلع يبدا من اعلى نقطة أي(مجموع التكرارات) وينتهي بالصفر.

مثال/ الجدول التالي يمثل توزيع عدد من طلبة جامعة ما حسب اوزانهم:

الفئات	Fi
60-62	5
63-65	18
66-68	42
69-71	27
72-74	8
المجموع	100

اوجد :١-الحدود الحقيقية للفئات

٢-مراكز الفئات

٣-التكرار النسبي والمئوي

٤- جدول التوزيع التكراري التجميعي الصاعد مع الرسم

٥-جدول التوزيع التكراري التجميعي النازل مع الرسم

٦-ارسم المدرج التكراري والمضلع التكراري

الحل:

الفئات	تكرار	Xi	د الحقيقية	ار النسبي	ر المئوي	التكرار التجميعي الصاعد	التكرار عي االنازل
60-	5	61.5	59.5 -6	0.05	5	0	100
63-65	18	64	62.5-65	0.18	18	5	95
66-68	42	67	65.5-68	0.42	42	23	77
69-71	27	70	68.5-71	0.27	27	65	35
72-74	8	73	71.5-74	0.08	8	92	8
المجموع	100					100	0

ثم نعين النقاط على محور و ونرسم المنحني الصاعد والمنحني النازل

الفصل الثاني

١- مقايس النزعة المركزية

١-الوسط الحسابي :وهي القيمة الناتجة من قسمة مجموع تلك القيم على عددها

أ-اذاكانت البيانات غير مبوبة:اذاكان لدينا n من القيم أي(x1,x2,..xn)فان الوسط الحسابي لها هو
$X=\sum xi/n$

ب-البيانات المبوبة: اذا كان لدينا (x1,x2,...xn) تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراريمع تكراراتها(f1,f2,....dn) على التوالي فان الوسط الحسابي لها هو $X=\sum fixi/ \sum fi$

مثال:من جدول التوزيع التكراري الاتي جد الوسط الحسابي للبيانات التالية:

الفئات	Fi	Xi	Fi Xi
31-40	1	35.5	35.5
41-50	2	45.5	91.0
51-60	5	55.5	277.5
61-70	15	65.5	982.5
71-80	25	75.5	1887.5
81-90	20	85.5	1710.5
91-100	12	95.5	1146.5

$$Xi = \sum fi\ xi \ / \sum fi = 6130 / 80 = 76.62$$

٢-الوسيط:

أ-اذاكانت البيانات غير مبوبة:اذاكان لدينا n من القيم (x1,x2,......xn.) ترتب ا لقيم ترتيبا تصاعديا او تنازليا:١-اذاكان n عددا فرديا فان الوسيط هوالقيمة التالية

$$Me= (n+1)/2$$

٢-اذا كان n عددا زوجيا فان الوسيط يكون:(n/2 +1 , n/2)

مثال١:جد الوسيط للقيم الاتية "X=80,82,76,87,84

الحل/نرتب القيم ترتيبا تصاعديا او تنازليا ثم نلاحظ ان عددا فرديا نطبق القانون

,n=5   X=76,80,82,84,87اذن الوسيط هو   82=(n+1)/2)

مثال٢/اذاكانت n زوجية نرتب القيم تصاعدي او تنازلي ثم نطيق ا لقانون التالي

ليكن X=5,4,8,7,3,12,9,2 وn=8 اذن نطيق القانون التالي n/2 ,n/2+1

, n=8,   X=2,3,4,5,7,8,9,12 اذن 5=4+1 ,8/2=4

6=12/2=5+7 اذن الوسيط هو =6

ب-البيانات مبوبة :اذاكانت (x1,x2,.......xn) تمثل مراكز الفئات مع تكراراتها (f1,f2,.......fn) على التوالي فان قيمة الوسيط لهذه البيانات هي

Me= L1+(((fi/2)-Fi)/fi)× w

حيث ان (L1) يمثل الحد الادنى للفئة الوسيط

و(fi) تمثل مجموع التكرارات

و(Fi) تمثل التكرار المتجمع الصاعد عند بداية فئة الوسيط

و(fi) تمثل فئة الوسيط

و(w) تمثل طول فئة الوسيط

مثال/من جدول التوزيع التكراري جد الوسيط للبيانات التالية"

الفئات	Fi	التكرار التجميعي الصاعد
60-62	5	5
63-65	18	23
66-68	42	65
69-71	27	92
72-74	8	100

نجد الوسيط باستجدام القانون التالي

ثم نلاحظ القيمة واقعة بين (65-23) من جدول التوزيع المتجمع الصاعد وبعد ذلك نعين فئة الوسيط من الفئات الاصلية (68-66)ونجد الحدود الحقيقية لها ونجد تكرار الفئة الوسيط(fi=42)وطول الفئة(w) وبعد نطبق القانون

$$Me = L1 + (((\sum fi/2) - Fi)/fi) \times w$$

٣- المنوال:

ا-البيانات غير مبوبة:اذاكان لدينا n من القيم (x1,x2......xn)فان المنوال لها يكون الاكثر تكرارا ويرمز له ب M

مثال/اذا كانت X=3,5,2,6,5,9,2,5,8,6 جد المنوال لها؟

الحل/المنوال هو =5 لانه الاكثر تكرارا

ب-البيانات المبوبة:نستخدم هذه الطريقة عندما تكون الفئات مستمرة أي اذا كانت لدينا (x1,x2,..........xn) تمثل مراكز الفئات في جدول توزيع تكراري مع تكراراتها(f1,f2,........fn) على التوالي فان المنوال هو $M=L1+(d1/d1+d2)*w$

حيث ان فئة المنوال هي التي تمثل اكبر التكرارات

وان(L1) تمثل الحد الادنى ا لحقيقي لفئة المنوال

و(d1) هو الفرق بين تكرار الفئة المنوال والفئة السابقة لها

و(d2) هو الفرق بين تكرار الفئة المنوال والفئة الاحقة لها

و(w) هو طول الفئة

اما اذا كانت البيانات متقطعة نستخدم القانون التالي المنوال=(الحد الادنى+الحد الاعلى)/٢

مثال/من الجدول السابق جد المنوال له"

$$M = 66+68/2=67$$

في حالة المتقطعة نستخدم القانون التالي المنوال= (الحدالادنى + الحد الاعلى/ 2

بمعنى اخر المنوال يمثل مر كز الفئة التي تقابل اكبر التكرارات

مثال/من الجدول التالي جد المنوال له.

الفئات	20-	30-	40-	50-	60-	70-	80 - 9
Fi	2	8	10	20	13	12	5

الحل/نطبق القانون $M=L1+(d1/d1+d2) \times w$

$M= 49.5+(10/10+7)\ \ 10=49.5+5.88=55.38$

٢-مقايس التشتت او الاختلاف:

ونقصد به التباعد او التقارب الموجود بين قيم المشاهدات لمتغيرما وايضا هي مقياس مدى تشتت قيم المشاهدات عن وسطها فكلما كان التشتت كبيرا دل ذلك على

عدم تجانس بين القيم والعكس صحيح وهناك عدة مقايس للتشتت اهمها:

١-مقايس التشتت المطلق: أي التي تكون وحداتها نفس وحدات القيم الاصلية واهمها

ا-المدى(The Rang)

ب-الانحراف المتوسط (

ج-التباين والانحراف المعياري(القياسي)

٢-مقايس التشتت النسبي:وهو الذي يكون خالي من وحدات القياس واهمها:

"معامل الاختلاف"

المدى: لمجموعة من القيم هو الفرق بين اعلى قيمة واقل قيمة من تلك المجموعة ويرمزلها ب(R)"

مثال/لتكن $X=9,4,7,8,16, 10,20,2$

الحل/ $R= 20-2=18$

هذه في حالة اذا كانت البيانات غير مبوبة نستخدم هذه الطريقة اما اذا كانت البيانات

مبوبة نستخدم الجدول ونجد مراكز الفئات ثم نجد الفرق بين اعلى قيمة واقل قيمة من مراكز الفئات يمثل المدى

الانحراف المتوسط:اذا كانت البيانات غير مبوبة نستخدم القانون التالي:

$M\_D= \backslash xi-x\backslash / N$ وحيث M_D تمثل الانحراف المتوسط

والسبب في اخذ الانحراف المطلق هو ان ابقاء الاشارات تكون موجبة لان السالب

تجعل مجموع الانحرافات يساوي صفرا

مثال/ لتكن $X=9,8,6,5,7$ جد الانحراف المتوسط لهذه القيم ؟

الحل/ اولا نجد الوسط الحسابي $X = \sum xi/n \quad =9+8+6+5+7/5= 35/5=7$

ثانيا نطبق قانون $M\_D = \sum \ \backslash xi-x\backslash\ /n$

$M\_D=2+1+1+2+0/\ 5=6/5$

Xi	xi-x	\xi-x\
9	2	2
8	1	1
6	-1	1
5	-2	2
7	0	0

اما اذا كانت البيانات مبوبة نطبق القانون التالي:

$M\_D= \sum fi\backslash xi-x\backslash\ /\ \sum fi$

مثال/من جدول البيانات التالي جد الانحراف المتوسط

الفئات	Fi	Xi	Fixi	\xi-x\	Fi\xi-x\
10-18	5	14	70	26.5	132.5
19-27	8	23	184	17.5	140.0
28-36	10	32	320	8.5	85.0
37-45	20	41	820	0.5	10.0
46-54	17	50	850	9.5	161.5
55-63	10	59	590	18.5	185.0

اولا نجد الوسط الحسابي $x= \sum fi\ xi/ \sum fi \ = 2834\ /70 = 40\ .48$

ثانيانطبق القانون :

$M\_D = \sum fi\backslash xi-x\backslash / \sum fi \quad = 714.0\ /70 =10.2$

٢-التباين او الانحراف المعياري:في حالة البيانات غير مبوبة

اذاكان لدينا (n)من المشاهدات ($x1,x2,....xn$)فان التباين له والذي نرمز له(S^2) يكون:

$$S^2=(xi-x) / n-1$$

ويمكن ايجاد التباين بطريقة مختصرة وهي

$$S^2= [\sum xi^2 – \sum(x i/ n) ^2] / n – 1$$

وان الجذر التربيعي للتباين يسمى بالانحراف المعياري ويرمزله ب(S)

مثال/جد التباين والانحراف المعياري للقيم التالية: $x=4,5,7,9,3$

الحل/ نجد اولا $Xi^2= 16,25,49 ,81,9$

$$\sum Xi^2 = 16+25+49+81+9=432$$

ثم نجد مجموع قيم Xi $\sum Xi=4+5+7+9+3=28$

ونطبق القانون: $S^2 = 432-(28)^2/5-1= 432-/4$

اما الانحراف المعياري $S=$

اما بالنسبة للبيانات المبوبة نستخدم القانون التالي:

$$S^2= \sum(fixi^2- \sum(fixi)^2/fi) / \sum fi-1$$

او $S^2= \sum(fi\xi-x\^2)/ \sum fi-1$

مثال البيانات المبوبة/ جد التباين والانحراف المعياري للبيانات التالية:

الفئات	Fi	Xi	Fixi	Xi^2	FiIXi
60-62	5	61	305	3721	18605
63-65	18	64	1152	4096	73729
66-68	42	67	2814	4489	188538
69-71	27	70	1890	4900	132300
72-74	8	73	584	5329	42632

$$S^2= \sum(fixi^2- \sum(fixi)^2/ \sum fi) / \sum fi-1=$$

$$S^2= 455803 – (6745)^2/100/99 =8.6$$

اما الانحراف المعياري فهو $S= 2.9$

٤-مقايس اخرى للتشتت المطلق :هناك بعض المقايس لاخرى لقياس التشتت ولكنها قليلة الاستعمال وتسمى تشبيهات المدى

(Quasi- rang es_) مثل :

أ-نصف المدى الربيعي(الانحراف الربيعي)

(Semi _ int erquartile rang e)

ب-نصف المدى العشري او المئيني.

مقايس التشتت النسبي :ان مقايس التشتت النسبي لها اهميتها عند مقارنة التشتت لمجموعتين او اكثر تختلف في وحدات القياس لقيمتها لان مقايس التشتت تكون خالية من وحدات القياس واهم هذه المقايس هي :

١-معامل الاختلاف Cofficient of Variation :اذا كان لدينا (X,S)هما الانحراف المعياري والوسط الحسابي لمجموعة من القيم على التوالي فان معامل الاختلاف لها هو ويرمز له ب C.V

$$C.V= S/ X *100$$

مثال/من نتائج الامتحانات للمادتين الرياضيات والفيزياء حصلنا على المعلومات الاتية مادة الرياضيات كان الوسط الحسابي له(78)والانحرف المعياري هو(8) والوسط الحسابي لفيزياء هو(73)والانحراف هو(7.6) في أي المادتين كان التشتت اكثر؟

الحل/نطبق القانون التالي $C.V= S/X*100$

لمادة الرياضيات $C.V= 8/78*100 = 10.25\ \%$

لمادة الفيزياء $C.V = 7.6/ 73 *100 = 10.41\ \%$

أي ان التشتت للمادة الفيزياء اكثر

مثال/من نتائج الامتحانات للمواد التالية احصاء وكيمياءو فيزياء حصلنا على المعلومات التالية وسط الحسابي لمادة الاحصاء هي(81) والانحراف هو (9.2) لمادة الكيمياء الوسط الحسابي هو(76)وبانحراف(8.12)ولمادة الفيزياء هو(73)وبانحراف(7.6) في أي من هذه المواد كان تشتت الدرجات اكثر؟

الحل/ نطبق القانون $C.V= S/x*100$

للاحصاء $C.V= 9.2/81*100 =11.35$

للكيمياء $C.V= 8.12/76*100 =10.68$

للفيزياء $C.V= 7.6/73*100 =10.41$

نلاحظ ان تشتت للمادة الاحصاء اكثر من باقي المواد

الدرجة القياسية :

في كثيرمن الاحيان نحتاج الى المقارنة مفردتين من مجموعتين مختلفتين وفي هذه الحالة يجب تحويل وحدات كل مفردة الى وحدات قياسية حتى تكون المقارنة ذات معنى وذلك باستخدام الوسط الحسابي او الانحراف المعياري لكل مجموعة وتسمى القيمة (Zi)درجة قياسية اذا كانت .

$$Zi= Xi- x / s$$

مثال / حصل طالب على درجة(84) في الامتحان النهائي بالرياضيات علما بان الوسط الحسابي في امتحان الرياضيات لجميع الطلبة كان (76) وبانحراف قياسي قدره (10)اما في امتحان الكيمياء فقد حصل الطالب على درجة (90) حيث كان الوسط الحسابي لجميع الطلبة (82) وبانحراف(16) ففي أي الموضوعين كانت قابلية هذا الطالب اعلى ؟

الحل/ نحول هاتين الدرجتين الى درجات قياسية با ستخدام القانون

$$Zi = Xi - x /s$$

للرياضيات $Zi= 84 - 76 /10 = 0.8$

للفيزياء $Zi= 90 -82 /16 = 0.5$

ومن هذا يتضح بان قابلية الطالب في الرياضيات اعلى من الفيزياء على الرغم من ان درجته في الفيزياء اعلى

الفصل الثالث

مبادى نظرية الاحتمال

مفاهيم اساسية: ١-التجربة العشوائية :

هي التجربة التي لايمكن معرفة نتائجها لخضوعها لقوانين الاحتمال

٢-فضاء العينة :هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة تحدث عن طريق الصدفة ويرمزلها بالرمز(S)

مثال/ عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فان فضاء العينة يتكون من نتيجتين ممكنتين هماا S=[H,T] حيث يرمزH للصورة،T للكتابة

اما اذارمينا قطعتين من النقود فان فضاء العينة سيكون من اربعة نتائج ممكنة هي S=[HH,HT,TH,TT]

الحادث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ويرمزله ب(Ei)

مثال/ لرمي قطعة نقود مرة واحدة S=[H,T] فان

$E1=[H]$, $E2=[T]$, $E3=[H,T]$

١-الحوادث المتنافية :

يقال عن الحادثتين E1,E2 انهما متنافيان اذا استحال حدوثهما معا فمثلا :عند رمي قطعة نقود فمن المستحيل الحصول على صورة وكتابة قي نفس الوقت

٢-الحوادث المستقلة:

هي الحوادث التي اذا وقع احدهما لا يؤثر في وقوع الاخرفمثلا:

عند رمي قطعتين نقود فان نتيجة القطعة الاولى لا تؤثر بنتيجة القطعة الثانية.

٣الحوادث غير المستقلة:

هي الحوادث التي اذا وقع احدهما يؤثر في وقوع الحوادث الاخرى فمثلا:في حالة صندوق به كرات بيضاء وسوداء فعند سحب كرتان على التوالي بحيث لا تعاد الكرة الاولى فان نتيجة السحبة الثانية تتاثر بنتيجة السحبة الاولى لذا فالحادثتان غير مستقلتين أي معتمدة

مضروب n : n Factorial

مضروب n ويرمز له ب (n!) ويعرف بانه

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots 1$

ملاحظة: $0! = 1,\ 1! = 1,\ n! = n(n-1)$

مثال/جد قيمة !5؟

الحل/ $5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$

التباديل:

هو ترتيب n من العناصر في شكل معين ويرمز له ب(Pr^n) أي تبادل من وقانونه هو $Pr = n!/(n-r)!$

مثال/اذاكان لدينا اربعة حروف هي[A,B,C,D] واختيرمنها حرفان فما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار هذين الحرفين

الحل/ $Pr^n = 4!/(4-2)! = 4(3)(2)(1)/2(1) = 24/2 = 12$

أي ان عدد الطرق =12 وهذه الطرق هي [AB,AC,AD,BC,BD,CD,BA,CA,DA,CB,DB,DC]

حيث ان كلا منهما يمثل ترتيبا مختلفا للحرفين

التوافيق:

يقصد بالتوافيق بانها عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء باخذها كلها او بعضها ويرمز لها بCr^nوحيث

$C r^n = n! / r!(n-r)!$, $n > r$

ملاحظات/ $C 0^n = 1$, $C 1^n = n$, $C n^n = 1$, $C n-1^n = n$

مثال/بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تحتوي على اربع طلاب من صف فيه عشرون طالب ؟

ا لحل/ $C 4^20 = 20! / 4! (20-4)!$

$= 20(19)(18)(17)(16)! / 4(3)(2)(1) (16)!$

$= 20(19)(18)(17) / 4(3)(2)(1) = 4845$

قواعد اساسية :

١-اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادثE1 هو (n) وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E2 هو (m) وكان E1,E2حادثان متنافيان فان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E2اوE1هو(n+m) من الطرق

مثال / ورق اللعب يتكون من (52)ورقة فورقة ( ) يمكن ان تحدث ب(13) طريقةوان ورقة( ) يمكن ان تحدث ب (13) طريقة فعند سحب ورقة عشوائية من اوراق اللعب فان عدد الطرق الممكنة لاختيار ( )او( ) =13+13= 26

٢-اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادثE1 هو (n) وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E2 هو (m) وكان E1,E2حادثان مستقلان فان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E2اوE1هو(m×n) من الطرق

مثال/اذا سحبت ورقتان من مجموعة اوراق اللعب بحيث ان احداهما ()والاخرى() فان هناك 169=13×13طريقة لعمل ذلك

مثال/ صندوق به (6) كرات حمراء و(4)كرات بيضاءو(2)سوداء ماعدد طرق اختيار (5)كرات بحيث تكون(2) منها بيضاء و(3)حمراء.

الحل/عدد طرق اختيار (3)كرات حمراء هي

C3^6= 6! /3!(6-3)! = 6(5)(4)(3)(2)1/3!(3)!

= 6(5)(4) /3(2)1 =20

وعدد طرق اختيار ()كرات بيضاء هي

C2^4= 4! /2!(4-2)! = 4(3)(2)(1) /2!(2)! =6

اذن عدد الطرق لاختيار (3)كرات حمراء (2) بيضاء هو

C3^6 * C2^4 = 20 * 6 = 120

تعريف الاحتمالية : Probability

هي نسبة الجزء للكل او هي دالة المنطلق لها الحادث (مجموعة الحوادث)المستقر لها

وهي دالة منطلقها مجموعة جزئية من فضاء العينة (الحوادث) والمستقر لها مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية

فاذا كان عدد عناصرمجموعة فضاء العينة (m)و(n)مجموعة عناصر الحادث(E) (وتسمى الحالات المواتية Favourable)

عدد الحالات الممكنة / عددالحالات المواتية للحادث = P(E) = n /m

, n <m

احتمالية الحادث المكمل (احتمالية عدم ظهور هذا الحادث)أي فشله

P(E^c) = 1-P(E) = 1- n/m = m-n/m

مثال/ جد احتمالية وجود صورتان اذا رمي قطعة نقود ثلاث مرات

الحل/ S=[HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT]

A=[HHT,HTH,THH]

P= n /m = 3/8

مثال/ عند رمي زهر كم احتمال فردي ؟

S= [1,3,5] ,

مثال/ صندوق يحتوي على (3) كرات بيضاء و(5)كرات سوداء و(2)حمراءفاذا سحبت كرة عشوائية من هذا الصندوق ماهو احتمال ان تكون :

أ-سوداء ب- غير سوداء ج –غير حمراء

الحل/ احتمال الحصول على كرة سوداء هو $P(E)$

$$P(E)= \quad n/m = 5/10 = 1/2$$

احتمال الحصول على كرةغير سوداء هو$P(E^c)$

$$P(E^c)= 1 - 1/2 = 1/2$$

احتمال الحصول على كرةغير حمراء هو $P(R^c)$

$$P(R^c) = 1- P(R) = 1-2/10 =1-1/5 =4/5$$

بعض خواص الاحتمالية :

١-اذا رمزنا لاحتمال حدوث حادث بالرمز$P(E)$ واحتمال عدم حدوث هذا الحادث ب($P(E^c)$) فان $P(E) + P(E^c) =1$

مثال/ صندوق يحتوي على (6) كرات بيضاء و(4)كرات سوداء و(5)حمراءفاذا سحبت منه كرة واحدة عشوائيا ماهودرجة احتمال ان تكون هذه الكرة :

أ-بيضاء ب- غير بيضاء

الحل/ $P(W) = 6/15$

$$P(W^c) =1- 6 / 15= 9 / 15$$

ومن هذا يتضح ان $P(W)+P(W^c)= 6 /15 +9/15 =15/15 =1$

خاصية ثانية :

ان درجة احتمال أي حادث تتراوح بين الصفر والواحد أي $0<P(E)<1$

خاصية ثالثة:

اذا كانت $E1,E2,\ldots\ldots En$هي عناصر او نقاط فضاء العينة فان مجموع درجات احتمالاتها=1

$$P(E1)+P(E2)+ +P(En)= 1$$

$$P(Ei)=1$$

مثال/ صندوق يحتوي على (5) كرات بيضاء و(9)كرات سوداء و(3)خضراء فاذا سحبت كرة عشوائيا فان احتمال ان تكون بيضاء هو: $P(E1)= 5 / 20$

احتمال ان تكون سوداء هو: $P(E2)= 9 / 20$

احتمال ان تكون خضراء هو: $P(E3)=6 / 20$

$$P(E1)+P(E2)+P(E3)= 5/20 +9/20 + 6/20 =20 /20 = 1$$

تمارين

١-طالب يجيب على(8)اسئلة من مجموع (10) اسئلة كم طريقة مختلفة للاجابة على الاسئلة؟

٢-ماعدد طرق الاختيار التي يمكن الحصول عليها لاختيارلجنة مؤلفة من (5)اشخاص من مجموع (9) اشخاص ؟

٣-بكم طريقة يمكن ان يجلس ثلاثة اولاد وبنتان في صف ؟

بفرض عدم السماح بالتكراركم عدد مكون من ثلاثة ارقام يمكن تكوينه من الارقام 6,7,9, 2,3,5,؟

٤-سحبت قطرة دم من شخص يرغب في فحص صنف دمه ما هو احتمال ان يكون صنف دم هذا الشخص AB؟

٥- صندوق يحتوي على (7) كرات حمراء و(5)كرات بيضاء و(8)خضراء فاذا سحبت منه كرة واحدة عشوائيا فان احتمال ان تكون هذه ١-بيضاء ٢-غير بيضاء؟

قوانين الاحتمالية : Laws of probability

نفرض ان هناك حادثان E1,E2 فالتعابير التالية يقصد بها مايلي:

احتمال وقوع الحدث E1او الحدث E2 = P(E!+E2)

أي احتمال وقوع ايا منهما فقط

احتمال وقوع الحادث E1 والحادث E2 معا= P(E1E2)

احتمال حدوث E2علما بان الحادث E1 قد وقع = P(E2/E1)ويسمى الاحتمال الشرطي (Conditional Probability)؟

والحوادث ما يلي :أ- قانون الجمع (Addition law)

١-اذاكانت الاحداث متنافية ، أي اذا كانت E1وE2 حادثان متنافيان فان احتمال حدوث أي منهما (E1اوE2)هو حاصل جمع احتمال كل منهما أي

$$P(E1+E2) = P(E1)+P(E2)$$

مثال/ صندوق يحتوي على (6) كرات بيضاء و(3)كرات سوداء و(5)زرقاء فاذا سحبت منه كرة واحدة فان احتمال ان تكون هذه بيضاء او سوداء؟

الحل/ $P(E1+E2)= P(E1)+P(E2)$

$$6/14 + 3/14 = 9/14$$

مثال/في حالة رمي زهر نرد(زار) فما هو احتمال الحصول على عدد فردي ؟

$$P(1+3+5) = P(1) + P(3) + P(5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$$

٢-اذاكانت الاحداث غير متنافية ، أي اذا كانت E1وE2 حادثان غير متنافيان فان احتمال حدوث أي منهما (E1اوE2)هو حاصل جمع احتمال كل منهما مطروحا منه احتمال حدوثهما معا أي

$$P(E1+E2) = P(E1)+P(E2) - p(E1E2)$$

مثال/ في احدى الكليات 25% من الطلبة راسب بالرياضيات 15% ومن الطلبة راسب في الكيمياء و10% راسب في كلا الرياضيات والكيمياء فذا انتخب طالب منهما عشوائيا فما هو احتمال ان يكون راسبا في الر ياضيات او الكيمياء؟

الحل/ نرمز للرياضيات ب M وللكيمياء ب C

$$p(M+C)= p(M)+p(C)-p(MC) =0.25+0.15-0.10 =0.30$$

مثال /اذا رمي زار مرة واحدة فما هو احتمال ظهور عدد يكون فردي او يقبل القسمة على 3 ؟

الحل /نفرض E1 الحادث الفردي وعدد حالاته الممكنة(3) وهي (1,3,5)

نفرض الحادث E2 يقبل القسمة على(3) وعدد حالاته الممكنة (2) وهي (3,6)

$$P(E1) = 3/6 \;,\quad P(E2) = 2/6$$

يمثل E1E2 الحادث فردي ويقبل القسمة على 3 هو فقط 3 وعدد الحالات الممكنة =1

$$P(E1E2) = 1/6$$

اذن $P(E1+E2)= P(E1)+P(E2 –P(E1E2)$

$$= 3/6 +2/6 - 1/6 = 4/6$$

ب- قانون الضرب :

٣-اذاكانت الاحداث مستقلة ، أي اذا كانت E1وE2 حادثين مستقلين فان احتمال حدوثهما معا هو حاصل ضرب كل منهما أي

$$P(E1E2) =P(E1)\, P(E2)$$

مثال/عند رمي قطعتي نقود ما هو احتمال الحصول على صورة في كليهما؟

الحل/ احتمال الحصول على صورة من القطعة الاولى (P(H1

احتمال الحصول على اصورة من القطعة الثانية (P(H2

اذن $P(H1H2)= P(H1)\, P(H2) = (1/2)(1/2) = 1/4$

مثال/ اذا كان احتمال اصابة الطائرة الاولى (A)لهدف معين يساوي (4 / 1) واحتمال اصابة الطائرة الثانية (B) لنقس الهدف يساوي (6 / 1) فاذا كان عمل كل منهما مستقلاعن الاخر واطلقت كل من الطائرتين قنبلة في آن واحد تجاه الهدف فما هو احتمال أ – انتصيب الطائرتان معا الهدف ب- ان لا تصيبا الهدف ؟

الحل / $P(AB) = P(A)\,P(B) = (1/4)(1/6) = 1/24$

ب- احتمال الاولى ان لا تصيب الهدف

- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 1/4 = 3/4$
- احتمال الثانية ان لاتصيب الهدف
- $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 1/6 = 5/6$
- احتمال ان لا تصيبا الهدف
- $P(A^c * B^c) = P(A^c)\,P(B^c) = (3/4)(5/6) = 15/24$
-

٤-اذاكانت الاحداث غير مستقلة ، أي اذا كانت E1وE2 حادثان غير مستقلين فان احتمال حدوثهما معا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادث الاول في احتمال وقوع الحادث الثاني بشرط حدوث الاول أي

$$P(E1E2) = P(E1)\,P(E2/E1)$$

مثال / صندوق به (5) كرات حمراء و(3) سوداء فاذا سحبت كرتان سوية (او سحبت كرتان على التوالي بدون ارجاع الكرة الاولى الى الصندوق) ماهو احتمال ان تكون كلتاهما سوداء ؟

الحل/ احتمال الحصول على كرة سوداء في السحبة الاولى هو:

$$P(E1) = 3/8$$

اما في السحبة الثانية (بدون ارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق)

فان احتمال ان تكون الكرة سوداء هو :

$$P(E2/E1) = 2/7$$

$$P(E1E2) = P(E1)\,P(E2/E1) = (3/8)(2/7) = 6/56$$

الاحتمال الشرطي :Cond itional probab ility

اذا كان الحادث A قد وقع فعلا والمطلوب احتمال وقوع الحادث B بحيث ان B يعتمد على A فان الاحتمال الشرطي علما ان (A,B غير مستقلين) هو كالاتي:

$$P(B/A)= P(AB) / P(A) \quad ,P(A) >0$$

مثال/ رمينا قطعة نقود مرتان واردنا ان نحسب احتمال حصولنا على صورة في الرمية الاولى مع العلم اننا لم نحصل على كتابة مرتين ؟

الحل/ الحادث بالرمية الاولى صورة $S= [HH,TH,HT ,TT]$

$$P(A) = 2 /4$$

الحادث عدم الحصول على كتابتين $B=[HH,TH,HT]$

$$P(B) = 3 / 4$$

$$P(A/B) = P(AB) / P(B) = (2/4) /(3/4) = 2/3$$

مثال / تم تصنيف احدى الافراد وفق الجدول التالي:

الجنس	له وظيفة E	ليس له وظيفة V	المجموع
ذكورM	460	40	500
اناثF	140	260	400
المجموع	600	300	900

ثم اختيار فرد بصورة عشوائية فما احتمال ان يكون ذكر وله وظيفة ؟

الحل/ $P(M/E)= P(ME) / P(E) =(460 /900)/(600/900)$

$$=460 / 600 = 0 . 76$$

مثال واجب/ نفس المثال السابق مااحتمال ان يكون انثى وليس لها وظيفة؟

الفصل الرابع

التوزيع الاحتمالي " Probability D istribution "

المتغير العشوائي : Random V arable

هو دالة ذات قيمة حقبقبة معرفة على مجموعة فضاء العينة حيث S تمثل المنطلق ومستقر الدالة مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية ويرمز له باحدى تاتحرف الكبيرة بحيث ان لكل X عدد حقيقي x قيمة المتغير العشوائي.

$X(w) < x$, w ينتمي ل S

مثال /رمي قطعة نقود معينة مرتين وكان المتغيرx يمثل عدد الصور ؟

الحل/ $S = [\ HH,HT,TH,TT\ ]$

$X(TT) = 0 \quad , \quad X(HT) = X(TH) = 1 \quad , \quad X(HH) = 2$

$X = 0 , 1 , 2$

ويمكن التميز بين نوعين من المتغيرات العشوائية اعتمادا على نوع القيم التي يأخذها المتغير العشوائي وهي :

١- المتغير العشوائي الذي تختلف قيمة الواحدة عن الاخرى بكميات محددة يسمى المتغير العشوائي المتقطع
٢- المتغير العشوائي الذي ياخذ أي قيمة ضمن حدود معينة يسمى المتغير العشوائي المستمر Continuous . R . V

التوزيع الاحتمالي المتقطع :

هو قانون او جدول يعطي جميع قيم المتغير العشوائي المتقطع مع جميع الاحتمالات القترنة مع كل قيمة من قيم المتغير المتقطع ويرمز له ب بحيث يحقق الشرطين وهما :

$1\text{-}P(X) > 0 \qquad 2\text{-}\ P(Xi) = 1$

وتسمى $P(X)$ بدالة الاحتمال

مثال /بالنسبة للمثال السابق

احتمال المتغير العشوائي X=0 يعني احتمال عدم الحصول على الصورة ؟

الحل/ P(X=0) = 1/ 4

P (X= 1) = 2 / 4 = 1 / 2

P(X= 2) = 1 / 4

اذن P(X) = [1 / 4 , X= 0 , 2

1 / 2 , X= 1

0 , o . w

او

X	0	1	2
P(X)	1 / 4	1 / 2	1 / 4

مثال / دالة الكتلة الاحتمالية لرمي الزار للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد النقاط عند رمي الزار .؟

الحل / P(X) = 1 / 6 , X= 1, 2, 3, 4 , 5 , 6

= 0 , o . w

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	1 /6	1 /6	1 /6	1 /6	1 /6	1 /6

التوزيع الاحتمالي المستمر :

هو التوزيع الذي ياخذ فيه المتغير العشوائي قيما بين حدين ودالته f(x) تكون موجبة لجميع قيم x بين & >x<& - تسمى f(x) بدالة الكثافة الاحتمالية ومن خواص هذه الدالة هو :

1-f(x) >0 2- $ f(x) = 1

مثال / من تجربة رمي زارين جد التوزيع الاحتمالي لمجموع النقاط التي تظهر على الوجهين فان $X= 2,3,4................12$

ان عدد عناصر فضاء العينة هو

$S= [(1,1), (1,2).......................(1,6)$

$(2,1),(2,2)....................... ....(2,6)$

$(6,1) , (6,2) ....(6,6)$

عندما فالعنصر هو (1,1) فقط أي ان : $P(X=2) = 1 /36$

وعندما فالعناصرهي (1,2)و(2,1) فقط أي ان : $P(X= 3)= 2 /36$

وهكذا يمكن ايجاد الاحتمال عند كل قيمة من قيم x وبذلك يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هو كما يلي :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	5/3	4/3	3/3

ومجموع هذه الاحتمالات = 1

التوقع الرياضي :

اذا كان X متغير عشوائي بدا لة كثافة احتمالية او كتلة احتمالية $P(X),f(X)$ وكانت $g(X)$ دالة اخرى بدلالة المتغير العشوائي فالتوقع الرياضي لهذه الدالة يعرف بالصيغة التالية ويرمز له ب $E(g(X))$

$E[g(x)] =\sum g(x) P(x)$ في حالة المتغير العشوائي المتقطع

$E[g(x)] = g(x) f(x) dx$ في حالة المتغير العشوائي المستمر

بعض الحالات الخاصة للتوقع الرياضي:

أ_المعدل (Mean) : اذاكانت $g(x) = X$ فالتوقع الرياضي في هذه الحالة يسمى القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ويرمز له ب M

متغير عشوائي متقطع $E(X) = M = \sum x P(X)$

متغير عشوائي مستمر $E(x) = M = \int x \; f(x)\, dx$

ويعني القيمة المتوقعة هي في الحقيقة قيمة المتوسط النظري للمجتمع M أي $E(X)=M$

ب_ التباين (Variance)

اذا كانت الدالة $g(X) = (X-M)^2$ فالتوقع الرياضي في هذه الحالة تباين المتغير العشوائي X ويرمز له ب $S^2 = E(X-M)^2$

او $S^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

خواص التوقع الرياضي:

اذا كان X متغير عشوائي بدالة كثافة (كتلة) و$C1,C2$ ثوابت فان :

1- $E(C1) = C1$

2- $E(C1X) = C1E(X)$

3- $E(C1X+C2) = C1E(X) + C2$

مثال / اذا كان متغير عشوائي بدالة كثافة احتمالية : $F(X)=2X \;,\; 0<X<1$
احسب معدل وتباين المتغير العشوائي X ؟

الحل/ $E(X) = M = \int Xf(X)\, dx = \int 2X^2\, dx = 2/3$

$S^2 = Var(X) = \int (X-M)^2 f(X)\, dx = \int (X-2/3)^2 (2x)\, dx$

$\int (2X^3 - 8/3 X^2 + 8/9 X)dx = 1/2x^4 - 8/9X^3 + 4/9X^2$

$1/2 - 8/9 + 4/9 = 1/2 - 4/9 = 1/18$

مثال / من التوزيع الاحتمالي المتقطع الاتي احسب متوسط المجتمع وتباينه ؟

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.15	0.15	0.35	0.25	0.10

الحل/

$M=E(X)= \sum Xi\ P(Xi) =$
$(0)(0.15)+(1)(0.15)+(2)(0.35)+(3)(0.25)+(4)(0.10)= 2$

$S^2(X)= E(X- M)^2 = (0-2)^2(0.15)+(1-2)^2(0.15)+(2-2)^2(0.35)+(3-2)^2(0.25)+(4-2)^2(0.10)= 1.4$

مثال/اذاعلمت ان $X= 0,1,2,3$, $P()= C^3(X)\ (1/2)\ ^3$ جد

$E(X^2 +1)$؟

الحل /نجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي كالاتي :

		1	2	3
P(	1	3/	3/	1/

$E(X^2+1)= E(X^2)+1=\sum Xi^2P(Xi)+1$

$= (0)^2(1/8)+(1)^2(3/8)+(2)^2(3/8)+(3)^2(1/8)= 4$

مثال/ اذا كان $F(X)=1/2 \quad , 1 \le X \le 3$

أ _ برهن ان $f(X)$ هي دالة كثافة احتمالية.

ب_جد $P(2 < X < 2.5)$

ج_ جد $P(x\le 1.6)$

الحل / أ _ $\int f(X)dx =\int 1/2\ dx = 1/2x \Big| = 1/2(3- 1) = 1$

ب_ $P(2 <X < 2.5) = \int F(X)\ dx = 1/2\int dx = 1/2\ x\ \Big| = 1/ 4$

ج_ $P(X 1.6) = \int f(X)\, dx = 1/2 \int dx = 1/2\, X \Big| = 0.3$

خواص التباين: يرمز للتباين ب ∂X ^2 او Var(X) فاذا كان a,b ثوابت

فان: $1\text{-}V(a) = 0$

$2\text{-}V(aX) = a^2\, V(x) = a^2\, \partial x^2$

$3\text{-}V(X \pm a) = V(X) = \partial x^2$

$4\text{-}V(ax \pm b) = a^2\, V(x) = a^2 \partial x^2$

تمارين

١- احسب توقع وتباين المتغير العشوائي الذي دالته الاحتمالية كما يلي :

a- $P(X) = X/15 \quad , \quad X = 1,2,3,4,5$

b- $f(X) = 3x^2 \quad , \quad 0 < X < 1$

٢-من التوزيع الاحتمالي الاتي :

X	8	12	16	20	24
P(X)	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

جد : a_ E(X) b_ E(X^2) c_ ا لتباين

٣- اذا كان : $f(X) = 2X \;,\; 0 < X < 1$

أ_برهن ان f(X) هي دالة كثافة احتمالية

ب- جد : $P(1/2 < X < 3/4)$

من التوزيع الاحتمالي الاتي :

X	-2	-1	0	1	2
P(X)	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

أ_جد : ∂x^2 ب_ $E(X^2 - 2X + 3)$

ج_ $V(3X - 4)$ د_ $V(-8X)$

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :

توزيع ذي الحدين : B nom ial _ Distribution

لنفرض ان تجربة تكررت (n) من المرات (المحاولات) وان (p) يمثل احتمال النجاح في كل محاولة و(q) يمثل احتمال الفشل في كل محاولة و($q = 1 - p$)

اذا فرضنا X يمثل عدد المرات التي يحدث فيها النجاح والقيم الممكنة هي(...,0,1,2 n....) فان X متغير عشوائي له توزيع ذي الحدين ودالة كتلة احتمال هي

$$P(X) = Cx^n \; P^x (1-P)^{n-1} \qquad ,X = 0,1,2.......,n$$

حيث: $Cx^2 = n! \,/\, x!\,(n-x)\,!$

وتوزيع ذي الحدين يكون بالمعلمة P ,n أي ان

$$X \approx B(n, p) \;.\; M = np \;,\; \partial x^2 = V(x) = npq$$

مثال / اذا كانت نسبة الوحدات الرديئة المنتجة في معمل ما هي ()

وقد اخذت عينة من خمسة وحدات جد احتمال:

١-كون عدد الوحدات التالفة او الرديئة تقل عن الربع.

ان نجد على الاقل ثلاثة وحدات صالحة في العينة

الحل/

$$P = 10/100 = 1/10 \;,\; q = 1-p = 1-1/10 = 9/10 \;, n=5$$

$$X \sim B(5, 1/10)$$

$$P(X) = C x^5 \; (1/10)^x \, (9/10)^{5-x} \;, X=0,1,2,3,4,5$$

1- $P(X<5/4) = P(X<1.25) = P(0)+P(1)$

$C_0^5 (1/10)^0 (9/10)^5 + C_1^5 (1/10)(9/10)^4 =$

$(9/10)^5 + 1/2(9/10)^4 = (9/10)^4 [9/10+1/2]$

$=(9/10)^4 [14/10]$

2- $P(X\geq 3) = 1-P(<3) = 1-[P(0)+P(1)+P(2)]$

$1-[(9/10)^4 + C_2^5 (1/10)^2 (9/10)^3 =$

مثال/عائلة مكونة من اربعة اطفال اوجد دالة احتمال بحيث يكون لديهم ولدين؟

الحل/ نفرض عدد الاولاد X

$P=1/2 \quad , \quad q=1/2 \quad .X=0,1,2,3,4$

$B(4,1/2) \sim X$

$P(X) = C_x^4 (1/2)^x (1/2)^{4-x}$

$P(X=2) = C_2^4 (1/2)^2 (1/2)^2 = 3/8$

مثال/ اذا كان لدينا X يتوزع حسب توزيع ذي الحدين أي :

$X \sim B(n,p)$ و لدينا $\partial x^2 = 4/3 \quad , \quad M=2$ جد n , p ؟

الحل / $M = np = 2$ 1

$\partial x^2 = npq = 4/3$ 2

نعوض قيمة n في المعادلة 2 ←

$\partial x^2 = npq = np(1-p) = 4/3$

$(2/p)\,p\,(1-p) = 4/3 \quad = 2(1-p) = 4/3$

$n=6 \rightarrow P=1/3$ اذن $X \sim B(6, 1/3)$

توزيع الحوادث النادرة:

توزيع بواسون

يعرف توزيع بواسون بتوزيع الحوادث النادرة حيث ان احتمالية وقوع حادث صغيرجدا وعدد المحاولات كبيرة فالمتغير العشوائي الذي يمثل حصول على محاولة ناجحة يكون له توزيع بواسون

$$P(X)= \lambda \text{ \^{}}x \text{ ẹ \^{}-}\lambda \text{ /xi , xi=0,1,2,\dots\dots\dots ,}\lambda>0$$

حيث ان λ هو متوسط (معدل) النجاحات

$$X \sim P(\lambda)$$

اما الحالات التي يستخدم فيها هذا التوزيع :

١- الحوادث التي تحدث عن طريق الصدفة في زمن معين
٢- الاخطاء المطبعية في صفحة معينة من كتاب
٣- عدد البكتريا في محلول معين .....الخ

مثال/ اذا علمت ان معدل السيارات المتعطلة في شارع معين هو () سيارات باليوم الواحد ماهي احتماللية ان تتعطل سيارة واحدة في الشارع المذكور مابين الساعة الثامنة والنصف والتاسعة صباحا؟

الحل/ معدل السيارات المتعطلة خلال اليوم الواحد هي (3) سيارات هو = 3 / 2 4

معدل السيارات المتعطلة خلال 1/2 ساعة هو

$$3 \ /24 \ (1/2) \ = 3/48$$

$$X \sim P(3/48)$$

$$P(X)= (3/48)\text{\^{}}x \ (\text{ẹ\^{}-}(3/48)) \ / \ xi , \qquad xi =0,1,2,\dots\dots$$

$$P(X=1) = \ (3/48) \ (\text{ẹ\^{}-}3/48)$$

مثال /اذا كان عدد الاخطاء المطبعية في كتاب يحتوي على(600) صفحة هو (400)خطا جد احتمال ان صفحة واحدة تحتوي على ثلاثة اخطاء مطبعية؟

الحل/ وجود خطا واحد في الصفحة (1 / 600)

وجود خطا في الكتاب كله (400)

معدل بصورة عامة: $\lambda = (1/600)(400) = 2/3$

$X \sim P(2/3)$

P(X)= (2/3) ^x (ẹ^(2/3)) / xi , xi= 0,1,2.........

P(X=3) = ẹ^(2/3)(2/3)^3 / 3! = ẹ^(2/3)(2/3)^3/6

مثال/

لوحظ في منطقة معينة ان من بين كل( ) شخص هنالك شخص واحد مصاب بمرض معين ما هو احتمال ان من بين ()شخص هنالك

أ- ثلاثة اشخاص مصابين بهذا المرض

ب-اكثر من شخصين مصابين بهذا المرض

الحل / λ =np (2000) (0.001) = 2

$X \sim P(2)$

P(X)= (2^x)(ẹ^-2) / xi , xi= 0,1.......

P(X=3) =(2^3)(ẹ^-2) / 3! = 0.18045

$P(X>2) = 1 - P(X\leq2) = 1-[p(x=0)+p(x=1)+P(x=2)]$

1 –[(2^0)ẹ^2) /0!

=1-(2^0e^-2/0!+2^1e^-2/1!+2^2e^-2/2!)

=1 – (e^-2 +2e^-2 +2 e^-2)

=1 – 0.67668 = 0.32332

تمارين

احد الفرق الرياضية يكون احتمال الفوز لها (2/3) فاذا تم اللعب (4) مرات ما هو احتمال الفوز

-مرتين بالضبط

- على الاقل مرة واحدة

- اكثر من نصف مرات اللعب

اذا كانت نسبة الوفاة نتيجة الاصابة بمرض معين هي (25%)اختير سبعة اشخاص مصابين بهذا المرض جد احتمال ،

-على الاقل ثلاث منهم سيموتون

-اثنان على الاكثر سيشفون

اذا كان (4%) من انتاج معمل هو سلع رديئة جد احتمال وجود سلعتين على الاقل رديئة في عينة تتكون من (100) سلعة .

شركة تأجير سيارات تملك اربع سيارات فاذا افترضنا معدل الطلبات على هذه السيارات هو (2.5) باليوم جد احتمال ،

-ان تتلقى الشركة عدد من الطلبات اكثر من عدد سيارات الشركة .

- ان يمر يوم دون ان تتلقى هذه الشركة أي طلب على هذه السيارات.

التوزيعات المستمرة: Continuous Distributions

التوزيع الطبيعي : Normal Distribution

اذا كان المتغير العشوائي X يتوزع توزيعا طبيعيا وله وسط حسابي μ وتباين ∂وان معادلة المنحني الطبيعي هي :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \partial}\ e^{-(x-\mu)^2/2\,\partial\text{^}2} \quad , \qquad -\infty< x< \infty \quad ، \qquad \partial>0$$

خصائص التوزيع الطبيعي :

- التمثيل البياني له منحني يشبه الجرس ومتماثل بالنسبة للوسط
- يتساوى الوسط و الوسيط والمنوال ويقع في المركز
- المنحني متصل

- يقترب المنحني من المحور x ولكنه لايمسه
- المساحة تحت المنحني تساوي 1 او 100% .

يتصف التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ وانحرافه المعياري ∂ بالخصائص الاتية

- يقع 68% تقريبا من البيانات ضمن الفترة $\mu + \partial$ ، $\mu - \partial$
- يقع 95% تقريبا من البيانات ضمن الفترة $\mu + 2\partial$ ، $\mu - 2\partial$
- يقع 99% تقريبا من البيانات ضمن الفترة $\mu + 3\partial$ ، $\mu - 3\partial$

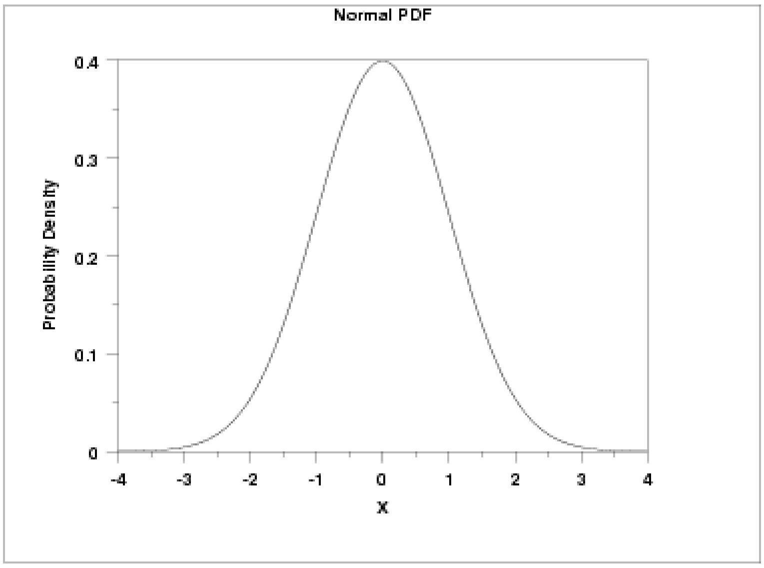
$$X \sim N(\mu , \partial^2)$$

التوزيع الطبيعي : Normal Distribution

يقال للمتغير العشوائي X بانه له التوزيع الطبيعي القياسي

Standard Normal Distribtuion بوسط حسابي يساوي صفر وتباين يساوي واحد اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Z بالصيغةالتالية

$$F(Z)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^{2l}/2} , \quad -\infty < X < \infty$$



مجالات استخدام التوزيع الطبيعي :

-الاحصاءات ا لبايلوجية كالوفيات والولادات في فترة معينة وفي كل مكان مغين

- الظواهر الاجتماعية كالزواج والطلاق تخضع لتوزيع قريب من التوزيع الطبيعي وكذلك نسبة الدخول ومستوى الانتاج

- المقايس النفسية والعقلية كالذكاء والقابليات العقلية

بما ان *f(X)* دالة كثافة احتمالية *P.D.F* لذا فان $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

X ~ N (0 , 1)

والان اصبح من السهل تحويل المتغيرات العشوائية *X* التي تتوزع توزيعا طبيعا الى المتغيرات عشوائية *Z* والتي تتوزع توزيع طبيعي قياسي وذلك بالطريقة التالية :

$$Z=\frac{x-\mu}{\partial}$$

مثلا: اذا كانت *X* بين الحدين *x1,x2* فان *Z* لها ستكون بين *Z1,Z2* حيث ان

$$Z1 = \frac{x1-\mu}{\partial} \quad ، \quad Z2 = \frac{x2-\mu}{\partial}$$

ملاحظة : اذا كان متغير عشوائي له التوزيع الطبيعي فان

$$P(X < x)= N(x)$$

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي

امثلة :

- X ~ N (3 , 4) فان

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 2}\ e^{-(x-3)^2/2(4)}$$

اذن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-(x-3)^2/8}$

- X ~ N (-2 , 9) *فان*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-(x+2)^2/18}$$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-(x-3)^2}$ جد ∂ ، μ

الحل :

بما ان $(x-\mu)^2 = (x-3)^2$

اذن $\mu = 3$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \partial} \quad = \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}\ \partial} = 1$$

$$\rightarrow \quad \partial = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \quad \partial\ \text{^}2 = \frac{1}{2}$$

مثال :

اذا كان الوسط الحسابي لتوزيع طبيعي هو (25= μ) والانحراف القياسي (المعياري) له هو ($\partial = 10$) جد قيمة z1,z2 بحيث ان :

$$P(45 < X < 62) = P(z1 < Z < z2)$$

علما بان : $P(z1<0.5) = 0.933\ ,\ P(z2<12) = 0.8849$

الحل:

$$Z1 = \frac{x1-\mu}{\partial} = \frac{45-50}{10} = -0{,}5$$

$$Z2 = \frac{x2-\mu}{\partial} = \frac{62-50}{10} = 1\ .2$$

$$P(45<X<62) = P(-0.5< Z< 1.2)$$

$$P(-0.5< Z< 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5)$$

$$= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$$

مثال:

اذا كان X له التوزيع الطبيعي $\underline{X \sim N(}3, 4)$ جد $P(X \le 2)$ ؟

الحل:

$$P(X \le 2) = P\left(\frac{x-\mu}{\partial} \le \frac{2-3}{2}\right) = P\left(Z \le -\frac{1}{2}\right)$$

$$= N\left(-\frac{1}{2}\right) = 1-(0.5) = 1-0.691 = 0.309$$

مثال :

اذا كانت درجات الحرارة خلال شهر نيسان في مدينة ما تتوزع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي هو 20 c وانحراف معياري 2c جد احتمال ان تكون درجة الحرارةلاحد الايام :

- اقل من 18 c
- اكثر من 22 c
- بين 18 c و 22 c

الحل :

$$\underline{X \sim N(}20 \ , 4)$$

- $P(X < 18) = P\left(\frac{x-\mu}{\partial} < \frac{18-20}{2}\right)$
- $P\left(Z < \frac{-2}{2}\right) = N(-1) = 1 - N(1) = 1 - 0.841 = 0.159$
- $P(X > 22) = 1 - P(X \leq 22) = 1 - P\left(Z \leq \frac{22-20}{2}\right) = 1 - N(1)$

$= 1 - 0.841 = 0.159$

- $P(18 < X < 22) = P(X < 22) - P(X < 18)$
- $P\left(Z < \frac{22-20}{2}\right) - P\left(Z < \frac{18-20}{2}\right)$
- $= N(1) - N(-1) =$
-
- $N(1) - 1 + N(1) = 2N(1) - 1$
- $2(0.841) - 1 = 0.682$

ملاحظة:

$$F(-X) = 1 - F(X)$$

تمارين

١- اذا كان متوسط انتاج الدونم من الذرة الطفراء هو800 كغم وبانحراف قياسي قدره 40 كغم وعلى فرض ان كمية المحصول يتتبع التوزيع الطبيعي . ما هو احتمال ان نباتا يعطي محصولا بين 778 - 834كغم ؟

٢- $X \sim N(2\ ,\ 25)$ اوجد

- $P(X < 0)$
- $P(0 < X < 10)$
- $P(|X| < 10)$

٣- اذا كان اوزان الف طفل عند الولادة يتوزع توزيع طبيعي يوسط حسلبي (8.5)وانحراف قياسي (معياري) (0.5) باون احسب عدد الاطفال باوزان

- اقل من 9.7
- بين 7.2 و 8.5

الفصل الخامس

اختبار الفرضيات Tests of Hypotheses

- **الفرضية الاحصائية : Statistical Hypothesis**

هي عبارة عن ادعاء او تصريح (قد يكون صائبا او خطأ) حول معلمة او اكثر لمجتمع او لمجموعة مجتمعات.

عندما ناخذ عينة من مجتمع ما لمعرفة فرضية معينة نستخدم جميع المعلومات من العينة للوصول الى قرار بقبول او رفض الفرضية الاحصائية ،

فالاحصائي او الباحث يحاول دائما ان يضع الفرضية بشكل يأمل ان يرفضها مثلا:

اذا اراد الباحث ان يقارن بين صنفا جديدا من الحنطة مع الصنف المحلي . فانه يضع فرضية فحواها بانه لايوجد فرق معنوي او جوهري بين الصنفين وكذلك اذا اراد ان يبرهن بان طريقة جديدة من طرق التدريس احسن من غيرها فانه يضع فرضية تقول بعدم وجود فرق بين طرق التدريس هذه وهكذا .

ان الفرضية التي يضعها الباحث على امل ان يرفضها تدعى بفرضية العدم (Null Hypothesis) ويرمز لها ب H0 وفرضنا لفرضية العدم يقودنا الى قبول فرضية بديلة عنها هذه الفرضية تدعى الفرضية البديلة (Alternative Hypothesis) ويرمز لها ب H1 .

-مستوى المعنوية Level of Significant

او مستوى الاحتمال Probability Level

او حجم الاختبار Size of the Test

ويعرف مستوى المعنوية :

بانه درجة الاحتمال الذي يرفض به فرضية العدم (H0) عندما تكون صحيحة او (بعبارة اخرى هو احتمال الوقوع في الخطا من النوع الاول ويرمز لها ب (∝) يرمز لدرجة الاحتمال ∝

هذه الدرجة () تحدد من قبل الباحث وهي اما () او () على الاكثر . عندما ناخذ مستوى احتمال () يعني بانه اذا تكررت التجربة لعدد كبير من المرات فمن المحتمل ان نرفض فرضية العدم () بالرغم من انها صحيحة مرة كل () مرة أي ان احتمال الوقوع في الخطا في الاستنتاج من النوع الاول هو () او اقل وان الاستنتاج يكون صائبا وسليم بدرجة ثقة () كما ان مستوى احتمال () يعني بانه فمن المحتمل ان نرفض فرضية العدم () وهي صحيحة خمس مرة في كل () مرة فاحتمال الوقوع في الخطا في الاستنتاج من النوع الاول هو () او اقل بينما الاستنتاج يكون صائبا وسليم بدرجة ثقة () اما اذا قبلنا فرضية العدم دل ذلك على وجود فرق معنوي .

-المختبر الاحصائي :

عبارة عن متغبير عشوائي له توزيع معلوم ويصف المختبر الاحصائي العلاقة بين القيم النظرية للمجتمع والقيم المحسوبة للعينة

-منطقة الرفض
او المنطقة الحرجة :
ان منطقة الرفض هي تلك المنطقة التي اذا وقعت قيمة المختبر الاحصائي داخلها تسبب في رفض فرضية العدم ()اما المنطقة الاخرى غير منطقة الرفض تسمى منطقة القبول
() : وهي المنطقة التي اذا وقعت قيمة المختبر الاحصائي داخلها تسبب في قبول فرضية العدم () .

اختبارات تتعلق بالمتوسطات
١-اختبارات تتعلق بمتوسط واحد
الاختبار يتعلق بالفرضية الاتية $H0: \mu = \mu 0$
حيث μ هو الوسط الحسابي للمجتمع
$\mu 0$ هو قيمة معينة معلومة ، علما ان تباين المجتمع ∂ ^2 معلوم وبعبارة اخرى سنقارن هنا متوسط عينة بمتوسط المجتمع لنرى هل ان العينة تنتمي لهذا المجتمع ام لا؟
فاذا كانت نتيجة الاختبار بالايجاب ففي هذه الحالة يكون متوسط العينة المحسوب لايختلف اختلافا جوهريا عن متوسط المجتمع .

صياغة فرضيتا العدم والبديلة :
عند اختيار متوسط المجتمع μ يساوي قيمة معينة μ 0 ضد فرضية القائلة بان μ لا يساوي μ 0 فاننا نكتب الفرضيتان بالشكل الاتي :

$$H0: \mu = \mu 0$$
$$H1: \mu \neq \mu 0$$

عند رفض فرضية العدم فان الفرضية البديلة تاخذ مدى من القيم يشمل جميع القيم الممكنة لمعلمة المجتمع

مثلا:
عند اختبار درجة تعبئة معمل تعليب معجون الطماطة التي تزن (250)غم فاننا نضع فرضية العدم (H0) بان متوسط وزن علبة المعجون هو(250) غم ،اما الفرضية البديلة فهي في هذه الحالة ان متوسط علبة المعجون لا تساوي (250) غم أي :

$$H0: \mu = 250$$
$$H1: \mu \neq 250$$

فاذا رفضنا فرضية العدم وقبلنا الفرضية البديلة يعني ذلك ان متوسط وزن العلبة لايساوي (250) غم وهذا معناه ان متوسط الوزن قد يكون اكثر او اقل من (250) غم

مثال أخر :
نفرض ان وزارة الصحة تريد اختبار فاعلية دواء مستحدث عن الدواء الحالي في علاج مرض معين فاذا كان متوسط شفاء المرضى المصابين بهذا المرض بعد تناولهم الدواء الحالي هو (70%) أي ان ($p=0.70$) بينما اذا اعطيت للمرضى الدواء الجديد الذي قيل بانه اكثر فعالية من الدواء الحالي فان (p) في هذه الحالة ستكون اكثر من (70%)أي ($p>0.70$) أي ان فرضية العدم والبديلة ستكون

$H_0: p = 0.70$
$H_1: p > 0.70$

واذا كان العكس فان الفرضيتان تكون :

$H_0: p = 0.70$
$H_1: p < 0.70$

اتخاذ القرارات :

$-\propto: 0.01$ رفض H0 اذا كانت قيمة	$\propto: 0.05$ رفض H0 اذا كانت قيمة	$\propto: \propto$ رفض H0اذا كانت قيمة	حالات الاختبار
$Z \geq 2.58$ *and* $Z \leq -2.58$ or $\|Z\| \geq 2.58$	$Z \geq 1.96$ *and* $Z \leq -1.96$ or $\|Z\| \geq 1.96$	$Z \geq Z_{\frac{\propto}{2}}$ *and* $Z \leq -Z_{\frac{\propto}{2}}$ or $\|Z\| \geq Z_{\frac{\propto}{2}}$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
$Z \geq 2.33$	$Z \geq 1.65$	$Z \geq Z_{\propto}$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
$Z \leq -2.33$	$Z \leq -1.65$	$Z \leq -Z_{\propto}$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$

مثال:

ينتج معمل للتعليب قناني فاكهة مفروض ان يكون متوسط وزنها (15)باوند وبانحراف قياسي هو(0.5)باوند للتاكيد من ان المعمل لازال ينتج عند المستوى المطلوب اخذت عينة مكونة من (50) علبةفوجد ان متوسط وزنها (14.8)باوند فاذا كان وزن العلبة متغير عشوائي تتوزع توزيع طبيعيا فهل تدل العينة على ان انتاج المعمل لازال (15) باوند باختبار $\propto = 0.01$ كمستوى معنوية؟

الحل :

-فرضيةالعدم $H_0: \mu = 15$

-الفرضية البديلة $H_1: \mu \neq 15$

-مستوى المعنوية $\propto = 0.01$

-منطقة الرفض $Z \geq 2.58$ *or* $Z \leq -2.58$

-المختبر الاحصائي $x=14.8$, $n = 50$, $\partial = 0.5$

$$Z = \frac{x - \mu_0}{\frac{\partial}{\sqrt{n}}} = \frac{14.8 - 15}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}} = -2.83$$

-القرار : بما ان قيمة Z المحسوبة (-2.83) هي اقل من قيمةZ الجدولية (-2.58) أي ان قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضية العدم وتقبل ا لفرضية البديلة

$$H0: \mu = 15$$

$$H1: \mu \neq 15$$

أي ان المعمل لا ينتج علب اوزانها (15) باوند

مثال :

كان معدل انتاج احد الاصناف المحلية من الحنطة في السنين الخمس السابقة هو 1600 كغم / هكتار وقد ادعى احد المزارعين بانه قد استنبط سلالة من هذا الصنف يعطي انتاج اكثر ولاختبار صحة الادعاء اخذت عينة عشوائية مولفة 81 من نباتا من السلالة الجديدة ووجد ان متوسط انتاجها 1630كغم / هكتار بانحراف قياسي 15 كغم هل نتائج العينة تؤيد ادعاء الباحث تحت مستوى معنوي 0.01 ؟

الحل: فرضيةالعدم $H0: \mu = 1600$

-الفرضية البديلة $H1: \mu > 1600$

-مستوى المعنوية $\propto = 0.01$

-منطقة الرفض $Z \geq 2.33$

-المختبر الاحصائي $x=1630$, $n = 81$, $\partial = 15$

$$Z= \frac{x-\mu 0}{\frac{\partial}{\sqrt{n}}} = \frac{1630-1600}{\frac{15}{\sqrt{81}}} = 18$$

-القرار : بما ان قيمة Z المحسوبة (18) هي اقل من قيمةZ الجدولية (2.33) أي ان قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضية العدم وتقبل ا لفرضية البديلة أي ان ادعاء المزارع كان صحيحا .

مثال /

ادعت احدى شركات انتاج البنجر السكري بانها انتجت صنفا من البنجر السكري نسبة السكر فيه لا تقل عن (0.18) غم/ أي 18لكل (100)غم وبانحراف قياسي قدره (2.5) غم ولاختبار هذا الاعاء اخذت عينة عشوائية مؤلفة من (36) ثمرة من البنجر وحسبت منه نسبة السكر فكان وسطها الحسابي(17.2)غم/(100)غم فهل ادعاء الشركة عند مستوى احتمال (0.05) مقبولا؟

الحل:

فرضيةالعدم $H0: \mu = 18$

-الفرضية البديلة $H1: \mu < 18$

-مستوى المعنوية $\propto = 0.05$

-منطقة الرفض $Z \leq -1.65$

-المختبر الاحصائي $x=17.2$, $n = 36$, $\partial = 2.5$

$$Z= \frac{x-\mu 0}{\frac{\partial}{\sqrt{n}}} = \frac{17.2-18}{\frac{2.5}{\sqrt{36}}} = -1.9$$

القرار : بما ان قيمة Z المحسوبة (-1.9) هي اقل من قيمةZ الجدولية (-1.65) أي ان قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضية العدم وتقبل ا لفرضية البديلة أي بعبارة اخرى ان ادعاء الشركة غير صحيح تحت مستوى احتمال 0.05 .

واجب /

نفس المثال ولكن استخدم $\propto = 0.01$

اختبارات تتعلق بمتوسطين Tests Concerning Two Means .

في بعض الاحيان نحتاج مقارنة متوسطي مجتمعين ، فمثلا نقارن بين نوعين من التغذية للاطفال اومقارنة صنفين من الذرة الصفراء...............الخ

ففي هذه الحالة ستتصمن الفرضية مقارنة الفرق بين متوسطين هما µ2، µ1 وتباينهما $\partial 1$، 2 ∂وسوف نختبر الفرضية القائلةان الفرق بين المتوسطين يساوي قيمة معينة أي

H0: µ1 -µ02 =d0

حيثان هي القيمة المعلومة ،اما الفرضية البديلة ستكون احدى الفرضيات الاتية

H0: µ1 -µ02 =d0

H1: µ1 -µ02>d0

H1: µ1 -µ02 <d0

مفهوم درجة الحرية Concept of degree of freedom

لتوضيح هذا المفهوم نفرض ان عينة حجمها (5) أي (n=5) وكما هو معلوم فان مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي يساوي صفر أي ا ن

$$\sum_1^n (xi - x) = 0$$

لذا سيكون لدينا (5) انحرافات ولكن d1,d2,d3,d4,d5 فاذا عرفنا اربعة من هذه الانحرافات فاننا بسهولة سنعرف الخامس فليس لنا حرية الاختيار قيمة له لانه قد حددت قيمة بعد معرفة القيم الاربعة مثلا :

d1= 5 , d2 =-3 ,d3 =1,d4=6

والمطلوب ايجاد قيمة d5 هي

d1 + d2 +d3 +d4+d5= 0

5+(-3)+1+6+d5=0

D5= 9

لذا فاذا كان لدينا عينة حجمها n فلنا الحرية في الاختيار قدرها (n-1) لاختيار قيم الانحرافات عن الوسط الحسابي للعينة لذا فان مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي لها درجات الحرية قدرها (n-1) وبالتالي فان درجات الحرية للتباين هو ايضا (n-1)

مثال:

لوحظ من خلال الفترة السابقة ا ن متوسط المبيعات الاسبوعية من سلعة معينة كان(150)صندوق قامت الشركة المنتجة لهذه السلعة بعمل اعلا ن تلفزيوني الهدف منه رفع متوسط المبيعات الاسبوعية من تلك السلعة وبعد مضي فترة زمنية لوحظ ان متوسط المبيعات من هذه السلعة في (24) محل كان (172) صندوق والانحراف القياسي

(27.4) صندوق هل ترى لهذا الاعلان اثر جوهري في رفع متوسط المبيعات الاسبوعية عند مستوى معنوي(0.05) ؟

الحل/

n= 24 , S=27.4 , x = 172 , u = 150

صياغة الفروض

$H0 : \mu = 150$

$H1: \mu > 150$

مستوى المعنوية $\propto = 0.05$

T (23 , 1-0.05) = t (23 , 0.95) = 1.714

حساب احصائية الاختبار

$$t^* = \frac{x-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{172-150}{\frac{27.4}{\sqrt{24}}} = \frac{22}{\frac{57.4}{4.899}}$$

=3.933

اتخاذ القرار :

قيمة المحسوبة اكثر من قيمة t الجدولية عند درجة حرية (23) ومستوى المعنوية 0.05 التي هي (1.714) لذا نرفض H0 ونقبل H1 أي ان الاعلان له اثر جوهري في رفع متوسط المبيعات الاسبوعية .

الفصل السادس

تحليل التباين   Analysis of Variance

تحليل التباين بمعيار واحد   One may analysis of Variance

من المثال التالي نشرح طريقة الحل :

لصناعة منتج معين استخدمت مواد اولية من ثلاثة مصادرمختلفة اختيرت عينات من القطع المنتجة لكل مادة اولية مستعملة بقصدمعرفة ما اذا كان هناك فرق في نسبة الشوائب من القطع المنتجة من اختلاف مصدرالمواد المستخدمة تحت مستوى اختبار 0.05 علما بان منطقة الرفض (8,02)

المصدر ١	1	2	2	4
المصدر ٢	3	4	5	7
المصدر ٣	6	8	8	9

الحل:

-نحسب مجموع المفردات ومجموع مربعات المفردات للعينات

T1=1+2+2+4=9   Ts1=1+4+4+16=25

T2=3+4+5+7 =19   Ts2=9+16+25+49=99

T3=6+8+8+9=31   Ts3=36+64+64+81=245

-نحسب المجموع الكلي للمفردات والمجموع الكلي لمربعات المفردات:

$$T = \sum_{i=1}^{3} Ti = 59$$

$$Ts = \sum_{i=1}^{3} Tsi = 369$$

-نحسب مجموع المربعات الكلي Tss (Total sum of squares)

Tss = Ts – T^2 / N = 369 – 290.1 = 78.9

-نحسب مجموع المربعات الاختلافات بين الفئات (SSB)

Sum of Squares Between Classes

$$SSB = \frac{T1\ ^2}{n1} + \frac{T2^2}{n2} + \frac{T3^2}{n3} - \frac{T^2 2}{N}$$

$$SSB = \frac{9^2}{4} + \frac{19\quad ^2}{4} + \frac{31\quad ^2}{4} - \frac{(59)^2}{12} =$$

$$\frac{81}{4}+\frac{361}{4}+\frac{961}{4}-\frac{3481}{12}=$$

20.25+ 90.25 + 240.25- 290.1 = 60.65

- -نحسب المجموع الكلي للمربعات داخل الفئات (SSW)

Sum of Squares Within Classes

وغالبا مايصطلح عليها بالخطا العشوائي

SSW = Tss - SSB = 78.9 - 60.65 = 18.25

وعليه سيكون جدول تحليل التباين :

مصدر التباين	درجة الحرية(df)	مجموع المربعات (ss)	متوسط المربعات(ms)
بين المجموعات	3-1	SSB = 60.65	60.65/ 2 = 30.3
داخل المجموعات	12 -3 =9	SSW = 18.25	18.25 / 9 = 2.
المجموع	11	78.9	14.940

عند مستوىمعنوي (0.05) نستخرج من جدول توزيع F القيمة المرادفة تحت درجات حرية (9,2) F
2,9 = 8.02

وبما ان قيمة F المحسوبة اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية (2,9) نستنتج من اخيبارنا هذا بان نسبة الشوائب في قطع الانتاج تتاثر باختلاف المادة الاولية المستعملة أي اننا رفضنا الفرضية الاحصائية بعدم وجود فرق معنوي في نسبة الشوائب علما بانه نسبة الخطا في استنتاجنا هذا هي 5%

مثال :

: زرعت ثمانية انواع مختلفة من الحنطة في ثلاثة قطع اراضي فاعطتنا النتائج الموجودة في الجدول ادناه اختبر عند مستوى معنوية 0.05 فيماذاكان معدل الانتاج مساويا للانواع الثمانية من الحنطة علما بان منطقة الرفض

T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	المجموع
8	5	8	10	5	12	5	7	
7	4	7	9	4	8	7	8	
9	7	9	6	11	6	10	8	
24	16	24	25	20	26	22	23	180

نلاحظ في هذا المثال ان عدد الاعمدة (k=8) وعدد الصفوف (n=3)

نحسب مجموع المفردات ومجموع مربعات المفردات للعينات

T1=8+7+9=24 Ts1=64+49+81=194

T2=3+4+5+7 =19 Ts2=9+16+25+49=99

T3=8+7+9=24 Ts3=64+49+81=194

T4 =10+9+6= 25 Ts4=100+81+36=217

T5=5+4+11=20 Ts5=25+16+121=217

T6=12+8+6= 26 Ts6 =144+64+36= 244

T7=5+7+10= 22 Ts7= 25+49+100= 174

T8= 7+8+8= 23 Ts8= 49+64+64= 177

نحسب المجموع الكلي للمفردات والمجموع الكلي لمربعات المفردات:

$$T = \sum_{i=1}^{8} Ti = 180$$

$$Ts = \sum_{i=1}^{8} Tsi = 1452$$

-نحسب مجموع المربعات الكلي Tss (Total sum of squares)

مجموع مربعات انحرافات المفرداتعن متوسط الحسابي العام للمجتمع ويمكن حسابه بالطريقة الاتية

Tss = Ts – T^2 / N = 1452 –(180) ^2/ 24 =

1452 - 1350 = 102

-نحسب مجموع المربعات الاختلافات بين الفئات (SSB)

Sum of Squares Between Classes

$$SSB = \frac{T1\ ^2}{n1} + \frac{T2^2}{n2} + \frac{T3^2}{n3} + \frac{T4\ ^2}{n4} + \frac{T5^2}{n5} + \frac{T6^2}{n6} + \frac{T7\ ^2}{n7} + \frac{T8^2}{n8} - \frac{T^2 2}{N}$$

$$SSB = \frac{24^2}{3} + \frac{16\ \ ^2}{3} + \frac{24\ \ ^2}{3} + \frac{25^2}{3} + \frac{20\ \ ^2}{3} + \frac{26\ \ ^2}{3} + \frac{22^2}{3} + \frac{23\ \ ^2}{3} + - \frac{(180)^2}{24} =$$

$= 192+85.3+192+208.3+133.3+225.3+161.3+176.3-1350$

$= 1374 - 1350 = 24$

- -نحسب المجموع الكلي للمربعات داخل الفئات (SSW)

Sum of Squares Within Classes

وغالبا مايصطلح عليها بالخطا العشوائي

$SSW = Tss - SSB = 102 - 24 = 78$

درجات الحرية للاعمدة $v1=k-1=7$, $v2=k(n-1)=16$ وداخل المجموعات (للخطا)

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{k(n-1)}}$$

$$= \frac{\frac{24}{7}}{\frac{78}{16}} = \frac{3.429}{4.875} = 0.703$$

من جدول توزيع f وعند مستوى معنوية (0.05) ودرجات الحرية $v1=7, v2=16$

نجد ان $f_{7,16} = 2.66$ تمثل منطقة الرفض وبما ان (0.703)لا تقع في منطقة الرفض اذن تقبل H0 .

الفصل السابع

الانحدار والارتباط البسيط

Simple Regression and Correlation

مقدمة :

في الفصول السابقة كان اهتمامنا ينصب على قضايا الاحصاء الاستنتاجي التي تعود الى توزيع ذو متغير واحد.هو X

اما الان فسنحول اهتمامنا الى قضايا تخص توزيع ذو متغيرين

(Birariate Dist)وسنرمزلهذين المتغيرين بالرمزX,Y فمثلا قد يكون المتغير Xهو عدد نبات القطن في وحدة المساحة بينما المتغيرY هو كمية المحصول الناتج او قد يكون Xهو درجات الحرارة بينما المتغيرY هو الكمية المذابة غم من الماء في مادة كميماوية معينة او قدتكونX هو المعدل الفصلي للطلبة بينما Y هو الدرجات النهائية لهم في مادة الاحصاء ومن ذلك يتضح بان كل فرد من الافراد العينة له قياسان احدهما للمتغيرX والاخر للمتغيرY فمثلا لكل طالب درجتان هما معدله الفصلي (X) ودرجته النهائية (Y)

وهناك نوعان من الانحدار :

- انحدار بسيط (Simple Regression)
- انحدار متعددد (Multiple Regression)

الانحدار البسيط: (Simple Regression)

يشمل على متغيرين فقط هما مستقل (X)و معتمد(Y)

اما الانحدار المتعدد: (Multiple Regression)

يشمل على اكثر من متغيرين احدهما معتمد(Y) و مستقل (x1,x2,..........xn)

مثال:

البيانات التالية تمثل الدرجة الفصلية و الدرجة النعائية في درس الاحصاء لاثني عشر طالبا . اوجد معاجلة الانحدار ؟

Xi	65	50	55	65	55	70	65	70	55	70	50	55
Yi	85	74	76	90	85	87	94	98	81	91	76	74

الحل :

Xi	65	50	55	65	55	70	65	70	55	70	50	55
Yi	85	74	76	90	85	87	94	98	81	91	76	74
Xi^2	4225	2500	3025	4225	3025	7569	4225	7569	3025	7569	2500	3025
XiIYi	5525	3700	4180	5850	4675	6090	6110	6860	4455	6370	3800	4070

$$b = \frac{\sum xiyi - [(\sum xi)(\sum yi)]/n}{\sum xi^2 - \frac{(\sum \quad xi)^\wedge 2}{n}}$$

$$= \frac{61685 - \frac{(725)(1011)}{12}}{4475 - \frac{(725)^2}{12}} = \quad 0.897$$

a= y – b x

a = 84. 250 - (0.897)(60.417) = 30.056

Y^* = Y = a + b x = 30.056+(0.897)x

أي قيمة ناخذ ل X ولتكونان 50 , 70 سوف نجد منها قيمة ال Y^*او Y فتكون:

Y (50) = 30.056 + 0.897 (50) = 74 .9

Y(70) = 30.056 + 0.897 (70) = 92. 8

والخط المستقيم الذي يمر بها تين النقطتين هو الانحدار

وبالتعويض في هذه المعادلة عن كل قيمة من قيم فانه يمكن حساب قيم تقديرية ال(Y,Y^*) والتي تقع جميعها على خط الانحدار البسيط وهذه القيم موضحة في الجدول التالي

Xi	65	50	55	65	55	70	65	70	55	70	50	55
Yi	85	74	76	90	85	87	94	98	81	91	76	74
Y(x)	88.4	74.9	79.4	88.4	79.4	92.8	88.4	92.8	79.4	92.8	74.9	79.4

اذن خطوات الحل لايجاد معادلةا لانحدار الخطي هي :

- نجد Xi^2 و XI Yi في الجدول
- ثم نجد b , a
- ثم نجد معادلة خط الانحدار والتي هي:

Y^*= Y(x) = a + b x

ومن خواص معادلة الانحدار الخطي البسيط هو

- انقيمة النقطة (xi,yi) تقع على خط الانحدار
- ان خط الانحدار يمر من جميع قيم (xi,yi)
- ان مجموع الانحرافات عن خط الانحدار يساوي صفر أي ان $\sum(yi - yx) = 0$
- ان مجموع مربعات الانحرافات عن خط الانحدار هي اقل ما يمكن أي ان

$$\sum(yi - yx)^2 = minmum$$

هذا يمكن ان نستخدم معادلة خط الانحدار للتنبؤ عن قيمة Y لقيمة معينة من Yغير موجودة في العينة مثل الدرجة النهائية المتوقعة لطالب معدله الفصلي (73)هي

Y(73) = 30.056+ 0.897 (73) = 95.5