ألمجموعات الجزئيه من مجموعة الأعداد الحقيقيه
The Subsets Of The Set Of The Real Numbers

(١): مجموعة الأعداد الطبيعيه(The Set Of The Natural Numbers) :
تكتب على النحو الأتي :{ $1,2,3,\ldots$ } حيث يرمز لها با لرمز **(N)** .

(٢): مجموعة الأعداد الصحيحه(The Set Of The Integer Numbers) :
تكتب على النحو الأتي :{ $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$ } حيث يرمز لها بـا لرمـز **(I)** أو **(Z)** .

(٣): مجموعة الأعداد النسبيه(The Set Of The Rational Numbers) :
حيث يرمز لها با لرمز**(Q)** وتكتب على النحو الأتي :
{ $x \in R,\ x = m/n$, ϶ n, m عددان صحيحان لا يوجد بينهما عامل مشترك }.
نلاحظ أن من خواص الأعداد النسبيه إمكانية كتابتها على شكل كسر عشري مثل:
$0.25 = (\frac{1}{4})$, ٠.٥ $= (\frac{1}{2})$, ...

(٤): مجموعة الأعداد غير النسبيه(The Set Of The Irrational Numbers):
مجموعه من الأعداد الحقيقيه لا يمكن كتابتها على شكل نسبة عددين صحيحين مثل:
$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \pi$ حيث π ألنسبه الثابته وتكتب على النحو الأتي ٢٢/ ٧ or ٣.١٤ = π.
ويرمز إلى ألمجموعه با لرمز **(IRR)**.

لاحظ أن $N \subset Z \subset Q \subset R$ و $R = Q \bigcup IRR$.

<u>خواص مجموعة الأعداد الحقيقيه مع عملية الجمع(R,+):</u>
ليكن كل من a, b, c عددا حقيقيا فان :
(١) : خاصية الانغلاق مع عملية الجمع تتحقق أي أن :
$a + b \in R$ (the cluaser property is satisfied)

(٢) : خاصية الإبدال مع عملية الجمع تتحقق أي أن :
$a + b = b + a$ (the commutative property is satisfied)

(٣) : خاصية التجميع مع عملية الجمع تتحقق أي أن :
$a + (b + c) = (a + b) + c$ (the associative property is satisfied)

(٤) : ألعنصر المحايد الجمعي موجود بمعنى :
$a + 0 = 0 + a = a$ (the identity element exist)

(٥) : ألنظير الجمعي موجود بمعنى :
$\exists\ (-a) \in R$ such that $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (the inverse element exist)

<u>خواص مجموعة الأعداد الحقيقيه مع عملية الضرب(R,.):</u>

ليكن كل من a, b, c عددا حقيقيا فان :

(١) : خاصية الانغلاق مع عملية الضرب تتحقق أي أن :

$a \,.\, b \in R$ (the cluaser property is satisfied)

(٢) : خاصية الإبدال مع عملية الضرب تتحقق أي أن :

$a \,.\, b = b \,.\, a$ (the commutative property is satisfied)

(٣) : خاصية التجميع مع عملية الضرب تتحقق أي أن :

$a.(b \,.\, c) = (a \,.\, b).c$ (the associative property is satisfied)

(٤) : ألعنصر المحايد ألضربي موجود بمعنى :

$a.1 = 1.a = a$ (the identity element exist)

(٥) : ألنظير ألضربي موجود بمعنى :

$\exists \ (a^{-1}) \in R$ such that $a^{-1} = 1/a$ and $a.a^{-1} = a.1la = 1$
(the inverse element exist)

(٦) : يمكن توزيع عملية الضرب على عملية الجمع يمينا و يسارا وذلك يعني:

$a.(b+c) = a.b + a.c$ and $(b+c).a = b.a + c.a$
(the distributive law is satisfied)

ألمتراجحات (The Inequalities) :

ليكن كل من a, b عددا حقيقيا . يقال أن b أكبر من a و يرمز له بالرمز $b>a$ ، إذا كان $b - a$ عددا موجبا أي أن $b - a > 0$.

ألفترات (The Intervals):

ليكن كل من a, b عددا حقيقيا، فإذا كان $a < b$ يقال أن a يرتبط مع b *بفتره* .

أنواع ألفترات (The Types Of The Intervals):

ألفترات على نوعين هما:

(١) :ألفترات المنتهيه (The Finite Intervals):

الفترات المنتهيه أربعة أنواع هي:

أ- الفتره المفتوحه(the open interval) : ليكن كل من a, b عددا حقيقيا بحيث أن $a < b$ ، يقال أن a يرتبط مع b *بفتره* مفتوحه إذا كان $\{ x \in R; a < x < b \}$ شرط أن لاينتمي كل من a, b إلى الفتره، و يرمز لها بالرمز (a , b) ، أي أن $a \notin (a , b)$ و$b \notin (a , b)$. يدعى كل من a, b نهايتا الفترة.

ب- الفترة ألمغلقه (the closed interval) : ليكن كل من a, b عددا حقيقيا بحيث أن $a < b$ ، يقال أن a يرتبط مع b *بفتره* مغلقه إذا كـان $\{ x \in R; a \le x \le b \}$ شرط أن ينتمي كل من a, b إلى الفتره، و يرمز لها بالرمز $[\ a\ ,\ b\ ]$، أي أن $a \in [a, b]$ و $b \in [a, b]$. يدعى كل من a, b نهايتا الفتره.

ج- الفتره نصف المفتوحه(the half open interval):ليكن كل من a, b عددا حقيقيا بحيث أن $a < b$ ، يقال أن a يرتبط مع b *بفتره* نصف مفتوحـه إذا كـان$\{ x \in R; a < x \le b \}$ شرط أن لا ينتمي a *إلى* الفتره بينما ينتمي b إلى الفتره، ويرمز لها بالرمز $(\ a\ ,\ b\ ]$. أي أن$a \notin (\ a,\ b]$ و$b \in (\ a, b\ ]$. أو على النحو الآتي $\{ x \in R; a \le x < b \}$ شرط أن ينتمي a *إلى* الفتره بينما لا ينتمي b إلى الفتره ، و يرمز لها بالرمز $[\ a\ ,\ b\ )$، أي أن $a \in [a,\ b)$ و$b \notin [\ a, b\ )$. يدعى كل من a, b نهايتا الفتره.

ألفترات غير المنتهيه (The Infinite Intervals):

ألفترات غير المنتهيه نوعين هما:

أ- الفتره المفتوحه (the open interval): ليكن a عددا حقيقيا بحيث أن $a<\infty$ ، يقال أن a يرتبط مع ∞ *بفتره* مفتوحه إذا كـان$\{ x \in R; a < x < \infty \}$ شرط أن لا ينتمي a *إلى* الفتره. و يرمز لها بالرمز $(a\ ,\infty)$ ، أي أن $a \notin (\ a\ ,\ \infty)$. بنفس الفكره نعرف الفتره المفتوحه $(-\infty,a)$. يدعى a نهاية الفترة. في حالة كون $\{ x \in R; -\infty < x < \infty \}$ يرمز للفتره بالرمز $(-\infty\ ,\ \infty)$ ، و يعد هذا تعريفا آخر إلى مجموعة الأعداد الحقيقيه.

ب- الفتره نصف المفتوحه(the half open interval): ليكن a عددا حقيقيا بحيث أن $a<\infty$ ، يقال أن a يرتبط مع ∞ *بفتره* نصف مفتوحه إذا كـان$\{ x \in R; a \le x < \infty \}$ شرط أن ينتمي a *إلى* الفتره، و يرمز لها بالرمز $[\ a\ ,\infty\ )$ ، أي أن $a \in [\ a\ ,\ \infty)$. بنفس الفكره نعرف الفتره نصف المفتوحه $(-\infty,a]$. يدعى a نهاية الفترة.

ألمجموعات ألمقيده (The Bounded Sets):

تدعى ألمجموعه A مقيده من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M بحيث أن $t \le M$ لكل $t \in A$، ويسمى M قيد أعلى للمجموعه A. أما إذا كانت ألمجموعه A مقيده من الأدنى فيوجد عدد حقيقي N بحيث أن $N \le t$ لكل $t \in A$ ، يسمى N قيد أدنى للمجموعه A.

أمثلـــــــــــه:

========

أ- ألفتره $[-6,1]$ مقيده ، العدد الحقيقي (١) قيد أعلى لها و العدد الحقيقي (٦ -) قيد أدنى لها.

ب- ألفتره $(٠,\infty)$ مقيده من الأدنى بالعدد الحقيقي (٠)، وغير مقيده من الأعلى.

ملاحظـــــــــه:

قد يكون كل من ألقيد الأعلى و الأدنى غير وحيد كما في ألمجموعه (١ ,٧-) المقيدة من الأعلى بالأعداد الحقيقيه ١ ، ٣/٢ ، ٢ وهكذا . كذلك هي مقيده من الأدنى بالأعداد الحقيقيه٧-، ٢ /١٧– و هكذا.

حل المتراجحه (The Solution Of The Inequality):

تعد مجموعة القيم التي تحقق المتراجحه بعد التعويض بالمتغير (x) حلا للمتراجحه.

قضيه (proposition) :

================

ليكن كل من $a, b, c \in R$ فإذا كان :

أ- $a<b$ فان $a + c< b + c$.

ب- $a<b$ و $c > 0$ فان $a . c< b . c$.

ج- $a<b$ و $c < 0$ فان $a . c>b . c$.

ألمتراجحات من ألدرجه الأولى (The Inequalities Of The First Degree):

في هذا النوع من المتراجحات تكون درجة المتغير (x) واحد كما في ألأمثله ألتاليه:

مثـــــال (١) (Example1):

==================

حل المتراجحه ألتاليه : $3 (x + 2) < 5$

ألحــــــــل :

$$3 (x + 2) < 5 \Rightarrow 3 x + 6 < 5 \Rightarrow ٣\ x < 5 - 6 \Rightarrow ٣\ x < -1$$

$$\Rightarrow x < -1 / 3$$

هــنا مجموعة الحل يمكن كتابتها على النحو الآتي :

$$(-\infty,-1/3) = \{ x \in R ; x < -1/3 \}$$

مثـــــال (٢) (Example 2):

====================

حل المتراجحه ألتاليه : $7< 2x + 3 < 11$

ألحــــــــل :

$$7< 2x + 3 < 11 \Rightarrow -3 + 7 < 2 x < -3 + 11 \Rightarrow$$

$$4 < 2 x < 8 \Rightarrow 2 < x < 4$$

هــنا مجموعة الحل يمكن كتابتها على النحو الآتي :

$$(2,4) = \{ x \in R ; 2 < x < 4 \}$$

مثـــــال (٣) (Example 3):

====================

حل المتراجحه ألتاليه : $[\ x / (x - 3)\ ] < 4$ بحيث أن $(x - 3) \neq 0$.

ألحــــــــــل :

$$[\ x/(x-3)\ ] < 4 \Rightarrow [\ x/(x-3)\ ] - 4 < 0 \Rightarrow$$

$$[\{x-4.\ (x-3)\}\ /\ (x-3)] < 0 \Rightarrow [(x-4\,x+12\ )\ /\ (x-3)\ ] < 0$$

بما أن الكسر سالب فـ $(-/+)$ و $(+/-)$.

$$12-3x < 0 \vee x-3 > 0 \Rightarrow$$

$$12 < 3x \vee x > 3 \Rightarrow$$

$$4 < x \vee x > 3$$

$$S_1 = \{\ x \in R\ ;\ x > ٣\}$$

و

$$12-3x > 0 \vee x-3 < 0 \Rightarrow$$

$$4 > x \vee x < 3$$

$$S_2 = \{\ x \in R\ ;\ x < 4\}$$

هــنا مجموعة الحل يمكن كتابتها على النحو الآتي :

$$S = (\ ٣, \infty) \cap (-\infty, 4) = (3,4)$$

<u>المتراجحات من ألدرجه ألثانيه (The Inequalities Of The Second Degree):</u>

في هذا النوع من المتراجحات تكون درجة المتغير اثنان (x) كما في ألأمثله ألتاليه:

مثـــــال (Example):

==================

حل المتراجحه ألتاليه : $25 > x^2$

ألحــــــــــل :

$$x^2 < 25 \Rightarrow x^2 - 25 < 0 \Rightarrow (x-5)\ (x+5) < 0$$

بما أن الناتج سالب فأما $(-\ .\ +)$ أو $(+\ .\ -)$.

أمـــــــا $(\ x+5) > 0 \wedge (\ x-5) < 0 \Rightarrow$

$$x > -5 \wedge x < 5 \Rightarrow$$

$$S_1 = (-5, 5)$$

أو $(x+5) < 0 \;\wedge\; (x-5) > 0 \Rightarrow$

$$x < -5 \;\wedge\; x > 5 \Rightarrow$$

$$S_2 = \phi$$

هــنا مجموعة الحل يمكن كتابتها على النحو الآتي

$$S = (-5 , 5) \cup \phi = (-5 , 5)$$

<u>ألقيمـــــــــه ألمطلقـــــــــه (The Absolute Value) :</u>

يقصـد بالقيمـة ألمطلقـه إلـى x الجـذر ألتربيعـي إلـى x^2 و يرمـز لهـا بـالرمز $|x|$ و يمكـن كتابتها على النحو الآتي :

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & if \quad x > 0 \\ 0 & if \quad x = 0 \\ -x & if \quad x < 0 \end{cases}$$

أمثـــــــــــله :

========

$$|-9| = 9 , \quad |8| = 8 , \quad |0| = 0.$$

<u>خواص ألقيمه ألمطلقه (The Properties Of The Absolute Value):</u>

أ- $|-a| = |a|$

ب- $\|a\| = |a|$

ج- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

د- $|a / b| = |a| / |b|$

هـ - $|a+b| \le |a| + |b|$

<u>حل المتراجحات ألحاويه على ألقيمه ألمطلقه</u>

<u>The Solution Of The Inequalities Which Includes</u>

<u>The Absolute Value</u>

من التعريف السابق إلى ألقيمه ألمطلقه نتوصل إلى أن :

$$|x| = \begin{cases} x & if \quad x \ge 0 \\ -x & if \quad x < 0 \end{cases}$$

أي في حالة $x = 0 \Leftarrow x = |x|$.

و هكذا فان ألقيمه ألمطلقه لأي عدد حقيقي هي عدد حقيقي غير سالب.

مثـــــــــال (Example):

==================

حل المتراجحه ألتاليه : $|x| > 3$

ألحـــــــــل :

$$\{ x \in R ;\ x > 3 \vee x < -3 \} = (3, \infty) \cup (-\infty, -3) = R \setminus [-3, 3]$$

مجموعة تمارين مع حلها

(١) حل المتراجحات التالية:

- $-2 \le -7x + 5 < 1$
- $|x| < 3$
- $x^2 - 3 < 6$
- $x^2 + x - 2 > 0$
- $|x - 5| < 0$
- $|3x + 11| < 0$
- $\dfrac{3x^2}{2x} < 0, x \ne 0$
- $x + 5 > 1$
- $|7 - 4x| \ge 1$

(٢) هــل المجموعات التالية تمثل فترات. لماذا و مانوعها

- $\{x; x \in \text{IRR.}, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$
- $\{x; x \in Z, -7 \le x < 1\}$
- $\{x; x \in [-11, 8), -2 < x < 9\}$
- $\{x; x \in Q, \mathbf{6} \le x \le 9\}$
- $\{x; x \in N, -2 \le x < 4\}$
- $\{x; x \in R, -1 < x \le 11\}$

- $\{x;\, x \in R \setminus \{0\},\ -3 < x < 5\}$
- $\{x;\, x \in [-1, 4],\ \mathbf{0} \le x \le 10\}$

(١) حل المتراجحات التالية:

- $-2 \le -7x + 5 < 1$
- $|x| < 3$
- $x^2 - 3 < 6$
- $x^2 + x - 2 > 0$
- $|x - 5| < 0$
- $|3x + 11| < 0$
- $\dfrac{3x^2}{2x} < 0,\ x \ne 0$
- $x + 5 > 1$
- $|7 - 4x| \ge 1$

<u>**الحـــل:-**</u>

- $-2 \le -7x + 5 < 1$

  $-2 - 5 \le -7x < 1 - 5$

  $(-7 \le -7x < -4).(-1)$

  $(4 < 7x \le 7) \cdot \dfrac{1}{7}$

  $\dfrac{4}{7} < x \le 1$

  $S = \{x;\, x \in R \setminus\ \dfrac{4}{7} < x \le 1\}$
- $|x| < 3$

  $-3 < x < 3$

  $S = \{x;\, x \in R \setminus\ -3 \le x < 3\}$

- $x^2 - 3 < 6$

  $x^2 - 3 - 6 < 0$

  $x^2 - 9 < 0$

  $(x - 3).(x + 3) < 0$

  بما أن الناتج سالب فأما $(-\,.\,+)$ أو $(+\,.-)$

  أمـــــا

  $(x - 3) < 0 \wedge (x + 3) > 0$

  $x < 3 \wedge x > -3$

  $S_1 = (-3, 3)$

أو

$$(x-3)>0 \wedge (x+3)<0$$
$$x>3 \wedge x<-3$$
$$S_2=\Phi$$

هنا مجموعة الحل يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$S=(-3,3)\cup\Phi=(-3,3)$$

- $x^2+x-2>0$

$$(x+2).(x-1)>0$$

بما أن الناتج موجب فأما $(-.-)$ أو $(+.+)$

أما

$$(x+2)<0 \wedge (x-1)<0$$
$$x<-2 \wedge x<1$$
$$S_1=(-\infty,-2)$$

أو

$$(x+2)>0 \wedge (x-1)>0$$
$$x>-2 \wedge x>1$$
$$S_2=(1,\infty)$$

هنا مجموعة الحل يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$S=(-\infty,-2)\cup(١,\infty)=R\setminus[-2,1]$$

- $|x-5|<0$

من خواص القيمة المطلقة

$$|x|+|-5|<0$$
$$|x|+5<0$$
$$|x|<-5$$

المتراجحة ليس لها حل

- $|3x+11|<0$

من خواص القيمة المطلقة

$$|3x|+|١١|<0$$
$$|3x|+١١<0$$
$$3|x|<-١١$$
$$|x|<-\frac{11}{3}$$

المتراجحة ليس لها حل

- $\frac{3x^2}{2x}<0, x\neq 0$

$$\frac{3}{2}\ x < 0$$

$$x < 0$$

$$S = \{\ x;\ x \in R,\ \ x < 0\ \}$$

- $x + 5 > 1$

  $x > 1 - 5$

  $x > -4$

  $S = \{\ x;\ x \in R,\ \ x > -4\}$
- $|\ 7 - 4x\ \ | \geq 1$

<u>الحل</u>

$$|\ 7 - 4x\ \ | \geq 1$$

من خواص القيمة المطلقة

$$|7| + |-4\,x\,|\ \ \geq 1$$

$$7 + 4\,|x| \geq 1$$

$$4\,|\,x\,| \geq 1 - 7$$

$$4\,|\,x\,| \geq -6$$

$$|\,x\,| \geq -\frac{6}{4}$$

$$|\,x\,| \geq -\frac{3}{2}$$

$$S = \{\ x;\ x \in R,\ x \geq -\frac{3}{2}\ \vee x\ \ \leq -\frac{3}{2}\}$$

(٢) هــل المجموعات التالية تمثل فترات. لماذا و مانوعها

- $\{x;\ x \in \text{IRR.},\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\ \ \}$
- $\{x;\ x \in \text{Z},\ -7 \leq x < 1\}$
- $\{x;\ x \in [-11,\ 8),\ -2 < x < 9\}$
- $\{x;\ x \in \text{Q},\ 6 \leq x \leq 9\}$
- $\{x;\ x \in \text{N},\ -2 \leq x < 4\}$
- $\{x;\ x \in \text{R},\ -1 < x \leq 11\}$
- $\{x;\ x \in \text{R} \setminus \{0\},\ -3 < x < 5\}$
- $\{x;\ x \in [-1,\ 4],\ 0 \leq x \leq 10\}$
- $\{x\ ;\ x \in [-2,\ 4\ ) \setminus \{1\},\ -1 < x \leq 2\ \}$

<u>الحـــل:-</u>

- $\{x;\ x \in \text{IRR.},\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\ \ \}$

هذه المجموعة لا تمثل فترة لأن

$x \notin R$

- $\{x; x \in Z, -7 \le x < 1\}$

هذه المجموعة لا تمثل فترة لأن

$x \notin R$

- $\{x; x \in [-11, 8), -2 < x < 9\}$

هذه المجموعة لا تمثل فترة لأن

$9 \in [-11, 8)$

- $\{x; x \in Q, \mathbf{6} \le x \le 9\}$

هذه المجموعة لا تمثل فترة لأن

$x \notin R$

- $\{x; x \in N, -2 \le x < 4\}$

هذه المجموعة لا تمثل فترة لأن

$x \notin R$

- $\{x; x \in R, -1 < x \le 11\}$

هذه المجموعة تمثل فترة نصف مفتوحة لأن

$x \in R$

- $\{x; x \in R \setminus \{0\}, -3 < x < 5\}$

هذه المجموعة لا تمثل فترة لأن

$٠ \notin R$

- $\{x; x \in [-1, 4], 0 \le x \le 10\}$

هذه المجموعة لا تمثل فترة لأن

$[6,10] \not\subset R$

- $\{x ; x \in [-2, 4) \setminus \{1\}, -1 < x \le 2\}$

هذه المجموعة لا تمثل فترة لأن

$1 \notin [-2,4)$

<u>مجموعة تدريبات للطلاب</u>

(١)- حل المتراجحات ألتاليه :

أ- $3x + 2 > 7$

ب- $-7 \leq -\ 3x + 5 \leq 4$

ج- $(1/x) < 2$ بحيث أن $x \neq 0$.

د- $x^2 - 5 - 6 > 0$

هـ - $|x| \leq 4$

و- $|x - 4| < 5$

ل- $|7 - 4x| \geq 1$

(٢)- بين فيما إذا كانت المجموعات الآتية فترات مع ذكر السبب

$A = \{x\ ;\ x \in N\ ,\ 0 \leq x \leq 3\ \}$

$B = \{\ x\ ;\ x \in R\ ,\ 1 \leq x < \infty\}$

$C = \{\ x\ ;\ x \in I\ ,\ -1 \leq x \leq 5\ \}$

$D = \{\ x\ ;\ x \in Q\ ,\ (1/2) < x < 4\}$

$E = \{x\ ;\ x \in [\ -3, 3\ ) \backslash \{0\}, -1 < x \leq 1\ \}$

ألغايـــات و الأســـتمراريـه (The Limits And The Continuity)

ألغايـــــة(The Limit) :

تدعى L غاية $f(x)$ إذا كانت f تقترب من L كلما اقتربت x من x_0 و تكتب على النحو الآتي :

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

أي أن الغاية تعبر عن الاقتراب من نقطه معينه ، فمثلا إذا كانت x_0 تمثل كلية ألتربيه ابن الهيثم و x تمثل طالب في قسم الكيمياء في الكليه فان $f(x_0)$ تمثل قسم الكيمياء في كلية ألتربيه ابن الهيثم و $f(x)$ تمثل طلاب في قسم الكيمياء بكلية ألتربيه ابن الهيثم . وهذا يعني أن غاية أي طالب في القسم هي الوصول إليه وهذا لايحدث إلا عن طريق الدخول إلى الكلية بمعنى أن غاية الطلاب تتحقق إذا وصل كل منهم إلى القسم ويكون الجميع قد وصل إلى الكلية .

مـــــــــلاحظه:

يعبر عن الاقتراب بالشكل الآتي ($\to$) أي أن $f(x) \to f(x_0)$ إذا كانت $x \to x_0$.

مثـــــــال (Example):

===============

لتكن ألداله $f(x) = x^2 + 3$ لنرى ماذا يحدث عند اقتراب x من ٢ .

ألحــــل :

الجدول الآتي يبين الغاية من خلال الاقتراب بوضوح .

من اليمين	x	3	2.5	2.3	2.1	2.012	2.001	2.0001	...
	$f(x)$	10.2	9.25	8.24	7.44	7.040	7.004	7.0004	...
من اليسار	x	1	1.2	1.4	1.5	1.9	1.99	1.999	...
	$f(x)$	4	4.44	4.96	5.25	5.98	6.96	6.999	...

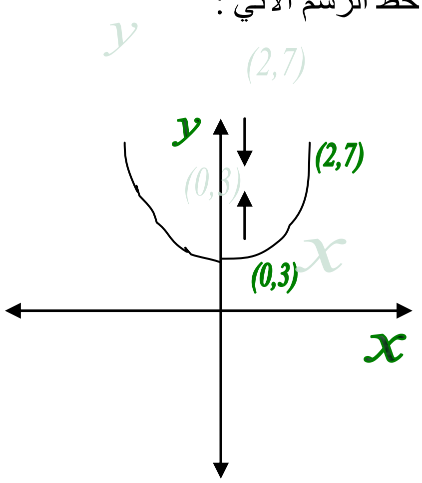
من الجدول أعلاه يتبين لنا أن

$$f(x) \to 7 \leftrightarrow x \to 2$$

ويمكن كتابتها على النحو الآتي :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 7 \ni x_0 = 2 \wedge f(x_0) = 7$$

و ليكون الأمر أكثر تفصيلا لاحظ ألرسم الآتي :



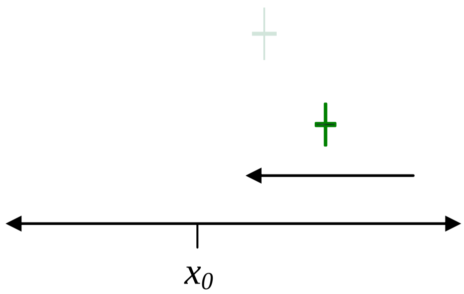
في المثال السابق نرى من الجدول انه تمت مناقشة مسألة الاقتراب من اليمين و من اليسار لذا كان لزاما علينا تعريف الغاية من اليمين و من اليسار .

<u>الغاية من اليمين (The Right Limit):</u>

يمكن تعريف الغاية من اليمين بالصيغة ألآتيه :

$$L^{+} = \lim_{x \to x_0^{+}} f(x)$$

و يتضح ذلك من الرسم الآتي:

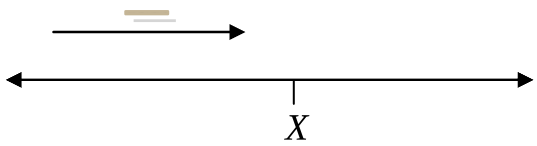


<u>الغاية من اليسار (The Left Limit):</u>

يمكن تعريف الغاية من اليسار بالصيغة ألآتيه :

$$L^{-} = \lim_{x \to x_0^{-}} f(x)$$

و يتضح ذلك من الرسم الآتي:



<u>حالات إيجاد الغاية:</u>

لإيجاد الغاية لأية دالة نتبع الحالات الآتية :

- إذا كانت ألداله متعددة حدود، يتم إيجاد غايتها بالتعويض المباشر عن x_0 كما في المثال الآتي:

$f(x) = x^2 + x + 5 \quad \ni x \to 1$

$$L = \lim_{x \to 1} x^2 + x + 5 = 1 + 1 + 5 = 7$$

$f(x) \to 7$ when $x \to 1$

- إذا كانت الدالة كسريه يتم إيجاد الغاية على النحو الآتي:

أ- إذا كانت نقطة الغاية تجعل المقام يساوي صفر يتم تبسيط ألداله باستخدام بعض الطرق مثل (الاختصار- الضرب بالمرافق - التحليل إلى العوامل) لجعل المقام لايساوي صفر ثم يتم التعويض بالدالة ألنهائيه كما في المثال الآتي:

$f(x) = x(x+1)/x$ when $x \to 0$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

هنا اختصرنا لأن النقطة صفر تجعل المقام يساوي صفر.

ب- إذا كانت نقطة الغاية لاتجعل المقام يساوي صفر يتم التعويض مباشرة كما في المثال الآتي :

$$f(n)=\frac{\sqrt{4+n}-2}{n}\quad \text{when}\quad n\to 5$$

$$L=\lim_{n\to 5}\frac{\sqrt{4+n}-2}{n}=\frac{\sqrt{4+5}-2}{5}=\frac{1}{5}$$

- إذا كانت ألداله جذرية نتبع الآتي لإيجاد غايتها:

أ- إذا كانت نقطة الغاية نقطة حدودية أي تقع على حدود المجال كان لزاما علينا إيجاد غاية ألداله من اليمين و من اليسار بحيث أن إحداهما تكون غير موجودة ، هذا فيما يختص بالجذور ألزوجيه لأن المجال في حالة ألجذور ألفردية هو مجموعة ألأعداد الحقيقية مادامت الدالة الجذرية ليست في المقام كما في المثال ألآتي:

$$f(x)=\sqrt{2x-6}\qquad \text{when}\quad x\to 3$$

$$D_f=[\,3\,,\,\infty\,)$$

$$L^{+}=\lim_{x\to 3}\sqrt{2\cdot 3-6}=\sqrt{6-6}=0$$

$$L^{-}=\lim_{x\to 3}\sqrt{2x-6}$$

هذه الغاية غير موجودة لأن المجال غير معرف من اليسار.

ب- إذا كانت نقطة الغاية موجودة داخل مجال ألداله، يتم إيجاد غايتها عن طريق التعويض المباشر كما في المثال ألآتي:

$$f(x)=\sqrt{2x-6} \quad \text{when} \quad x \to 5$$

$$D_f = [\,3\,,\,\infty\,)$$

$$L=\lim_{x\to 5}\sqrt{2\cdot 5-6}=\sqrt{10-6}=\sqrt{4}=2$$

- إذا كانت ألداله مجزئة نتبع الآتي لإيجاد غايتها :

أ- إذا كانت نقطة الغاية نقطة فاصلة بين جزئي ألداله كان لزاما علينا إيجاد غاية ألداله من اليمين و من اليسار فإذا كانت الغايتان موجودتين و متساويتين عندئذ تكون الغاية موجودة كما في المثال الآتي:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & if \quad x\ge 0 \\ -x & if \quad x<0 \end{cases}$$

النقطة صفر نقطة فاصلة بين جزئي ألداله و هذا يعني وجوب إيجاد الغاية من اليمين و من اليسار وكما يأتي:

$$L^{+}=\lim_{x\to 0^{+}}|x|=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$L^{-}=\lim_{x\to 0^{-}}|x|=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

$$L^{-}\;L^{+}=$$

$$L=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

ب- إذا كانت نقطة الغاية نقطة غير فاصلة بين جزئي ألداله فيتم إيجاد غايتها عن طريق التعويض المباشر كما في المثال ألآتي:

$f(x) = |\,x\,|$ when $x \to -1$

$$L=\lim_{x\to -1}|x|=|-1|=1$$

ملاحظـــــــــة:

نستنتج مما سبق أن نقطة الغاية لاتنتمي إلى مجال الدالة دائما ولكن يجب وجود فتره مفتوحة تحيط بنقطة الغاية تنتمي إلى مجال الدالة كما في حالة الدالة الكسرية .

حالات عدم وجود الغاية:

هناك حالتان ينعدم وجود الغاية عندهما :

- إذا كانت إحدى الغايتين غير موجودة عندئذ تكون الغاية غير موجودة كما في الحالة **(أ)** من الدالة ألجذريه .
- إذا كانت الغايتين موجودتين ولكن غير متساويتين عندئذ تكون الغاية غير موجودة كما في المثال :

$$f(x)=\frac{|x|}{x} \quad \text{when } x \to 0$$

$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \frac{x}{x} & x>0 \\ \infty & x=0 \\ \frac{-x}{x} & x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1 & x>0 \\ \infty & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

النقطة صفر نقطة فاصلة بين جزئي ألداله و هذا يعني وجوب إيجاد الغاية من اليمين و من اليسار وكما يأتي:

$$L^{+}=\lim_{x\to x^{+}} f(x)=\lim_{x\to x^{+}} 1=1$$

$$L^{-}=\lim_{x\to x^{-}} f(x)=\lim_{x\to x^{-}} (-1)=-1$$

$$L^{+}\neq L^{-}$$

و هذا بعني أن الغاية غير موجودة.

خصائص الغايات(The Properties Of The Limits):

- إذا كانت ألداله

$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \ni c_0, c_1, \ldots, c_n \in R \,.\, c_n \neq 0 \; \forall n \in I \wedge n > 0$

متعددة حدود فغاية هذه ألداله هي:

$$L = \lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

- إذا كانت ألداله

$f(x) = c \ni c \in R$

ثابتة فغاية هذه ألداله هـي:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

- إذا كان $c \in R$ و غاية ألداله $f(x)$ موجودة فان :

$$L = \lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- إذا كانت كلا من $g(x),\ f(x)$ داله وغاية كلا منهما موجودة فان :

$$L_{f \pm g} = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- إذا كانت كلا من $g(x),\ f(x)$ داله وغاية كلا منهما موجودة فان :

$$L_{f \cdot g} = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- إذا كانت $f(x)$ داله وغايتها موجودة فان:

$$L^n = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^n$$

- إذا كانت $r(x)$ داله نسبية وغايتها موجودة فان :

$$L_r = \lim_{x \to x_0} r(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = r(x_0)$$

$\ni r(x) = p(x) / q(x) \wedge p(x)\ , q(x)$ is a polynomial for $x \wedge q(x) \neq 0.$

غايات اللانهاية :

تدعى الغاية غاية اللانهاية إذا كانت نتيجتها ∞ أو ∞ - كما في المثال الآتي:

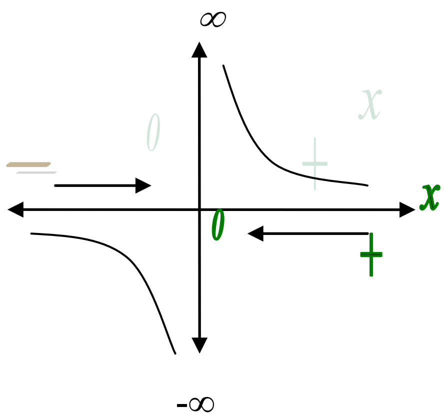
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{when } x \to 0$$

$$L^{+} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{1}{x} = \infty$$

$$L^{-} = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$L^{+} \neq L^{-}$$

و هذا يعني أن الغاية غير موجودة كما يتضح من الرسم الآتي:



ألغايات عند اللانهاية :

عند اقتراب x من ∞ أو ∞ - تكون الغاية عند اللانهاية كما في المثال ألآتي:

$f(x) = 1 / x \ \ni x \to \infty \ \wedge x \to -\infty$

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

في مثل هذا النوع من الغايات يكون الحل بقسمة كل من البسط و المقام على الحد ذي القوة الأكبر (أعلى أس) فتصبح لدينا ثلاث حالات للناتج :

- إذا كانت درجة البسط أعلى من درجة المقام فالغاية تساوي ∞ أو ∞ - كما في المثال الآتي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+2}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}$$

ويمكن كتابة النتيجة على النحو الآتي :

=١+ كمية صغيرة جدا / كمية صغيرة جدا = ∞

- إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فالغاية تساوي معامل الحد ذي القوة الأكبر في البسط مقسوما على معامل مثيله في المقام كما في المثال الآتي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{5x^2+2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x^2}}$$

ويمكن كتابة النتيجة على النحو الآتي :

=١+ كمية صغيرة جدا / ٥+ كمية صغيرة جدا = ١/ ٥

- إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فالغاية تساوي صفر كما في المثال الآتي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{0}{1+0}=0$$

ملاحـــظة:
جميع الخواص السابق ذكرها في الغايات تصح في غايات اللانهاية و الغايات عند اللانهاية.

ألاستمرارية (The Continuity):
إذا كانت ألداله f مستمرة عند نقطة لا تحتوي قطع في تلك النقطة، أما إذا كانت ألداله f مستمرة في فترة معينة فلا تحتوي قطعا في تلك الفترة . وبناءا على ما سبق يمكن صياغة تعريف الاستمرارية على النحو الآتي:
تكون ألداله f المعرفة على فترة معينة تحتوي x_0 مستمرة على x_0 إذا حققت الشروط التالية:

1- $f(x_0)$ exist

أي أن ألداله موجودة عند x_0

2- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ exist

أي أن غاية ألداله موجودة عند x_0

3- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

أي أن غاية ألداله عند x_0 تساوي $f(x_0)$.

مـلاحظـــة :
سبق وأن ذكرنا في الغايات أن النقطة x_0 ليس من الضروري انتمائها إلى مجال ألداله حتى تكون الغاية موجودة، أما في الاستمرارية فيجب أن تكون النقطة x_0 منتمية إلى مجال ألداله لكي يكون الشرط الأول متحققا.

مثـــــال :
بين فيما إذا كانت ألدالة $f(x)=x^2$ مستمرة عند $x_0=2$ ؟
الحـــــل:

$D_f=R$

1- $f(2)=2^2=4$

2- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

أي أن ألدالة مستمرة عند $x_0=2$.

حـالات إيجاد ألاستمرارية :

- اذا كانت الداله متعددة حدود تكون مستمره على جميع نقاط مجالها و هو مجموعة الأعداد الحقيقيه كما في المثال الآتي :
بين استمرارية الدالة

$f(x) = x^2+3x+5$

عند النقطة 1

$1 \in D_f = R$

$f(1) = 1^2+3+5= 9$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(x^2+3x+5) = 1+3+5 = 9$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = f(1)$$
$$\Rightarrow f \text{ is continuous}$$

- إذا كانت الدالة كسرية تكون مستمرة في حالة كون النقطة تنتمي الى مجال الدالة كما في المثال الأتي :
بين استمرارية الدالة

$f(x) = [\ (x^3 - 2x^2+5x - 1) / (x^2 - 3x+2)\ ]$

عند النقطة 1

بما ان النقطة 1 لاتنتمي الى مجال الدالة لذا فان $f(1)$ غير موجودة و عليه فان الدالة f غير مستمرة.

- اذا كانت الدالة جذرية تكون مستمرة اذا تحقق الآتي :
أ- النقطة واقعة داخل مجال الدالة كما في المثال التالي :
بين استمرارية الدالة

$f(x) = \sqrt{x - x^2}$

عند النقطة 1/2

$x - x^2 \geq 0 \Longrightarrow x(1 - x) \geq 0$

$x \geq 0 \wedge 1 - x \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 1$

$x \leq 0 \wedge 1 - x \leq 0 \Longrightarrow x \leq 0 \wedge x \geq 1$

$D_f = [\ 0 , 1\ ]$

النقطة 1/2 واقعة في مجال الدالة لذا نجد الأستمرارية

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow f$ *is contnuous*

ب- إذا كانت النقطة واقعة على حدود المجال بحيث تحقق الشرط الأخير تكون الدالة مستمرة كما في المثال الأتي:

بين استمرارية الدالة

$$f(x)=\sqrt{x-x^2}$$

عند كل من النقاط ٠ و ١

بما أن النقطة ٠ واقعة على حدود المجال لذا فان :

$$L^{+}=\lim_{x\to0^{+}} f(x)=\lim_{x\to0^{+}}\sqrt{x-x^2}=0$$

$$f(0)=\sqrt{0-0}=0$$

$$L^{-}=\lim_{x\to1^{-}} f(x)=\lim_{x\to1^{-}}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{1-1}=0$$

$$f(1)=\sqrt{1-1}=0$$

و هذا يعني أن الدالة مستمرة عند كل من النقاط ٠ و ١ .

ملاحظـــــــــة:

في المثال السابق تكون إحدى الغايتين فقط موجودة كما ذكرنا في الغايات ، لكننا سنكتفي بها طالما كانت تساوي $f(x_0)$

- إذا كانت الدالة مجزئة يتم تحقيق التعريف كما في المثال الآتي:

بين استمرارية الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

عند النقطة ٠

$0 \in D_f = R$

$f(0) = 0+1=1$

$$L^{+} = \lim_{x\to 0^{+}} (x+1) = 0+1 = 1$$

$$L^{-} = \lim_{x\to 0^{-}} (1) = 1$$

$$L^{+} = L^{-}$$

أي أن الغاية موجودة و تساوي ١ و هذا يعني أن ألدالة مستمرة عند النقطة ٠

<u>ملاحظـــــة:</u>
إذا كانت الدالة غير مستمرة عند نقطة معينة في المجال عندها نقول أن الدالة متقطعة (Discontinuous) عند تلك النقطة ، كما في المثال ألآتي:

Sgn x دالة متقطعة عند النقطة ٠ حيث أن :

Sgn $(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^{+}} Sgn(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} Sgn(x) = -1$$

و معنى ذلك أن الشرط الثالث غير متحقق و الغاية غير موجودة .

<u>خواص ألاستمرارية (The Properties Of The Continuity):</u>

- إذا كانت كل من f و g دالة مستمرة فان :

أ- $f+g$ ، f-g ، $f.g$ دوال مستمرة عند النقطة x_0 كذلك الحال للدالة f/g حيث أن x_0 لا تساوي صفر.
ب- كل متعددة حدود مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية.
ج- كل دالة ثابتة مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

- إذا كانت f دالة مستمرة عند النقطة a و $\lim_{x\to a} g(x) = a$ فان :

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(a)$$

مجموعة تمارين مع حلها

أ- احسب غايات كل من الدوال الآتية إن وجدت :

1- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x-2}}$

-2 $\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^3+4}$

-3 $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^4}$

-4 $\lim_{x\to -1}\frac{3}{\sqrt{x}}$

-5 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}$

-6 $\lim_{x\to -4}\sqrt{x-5}\ , \ni D_f=[5,\infty)$

الحــــل:-

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x-2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}=\infty$$

بما أن درجة البسط أعلى من درجة المقام هذا يؤدي إلى أن الناتج مساوي إلى ∞

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^3+4}$

بما أن النقطة لا تجعل المقام صفر يتم التعويض مباشرة:

$$\frac{0-2}{0^3+4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

3. $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^4}$

بما أن النقطة لا تجعل المقام صفر يتم التعويض مباشرة:

$$\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$$

4. $\lim_{x\to -1}\frac{3}{\sqrt{x}}$

بما أن النقطة لا تجعل المقام صفر يتم التعويض مباشرة:

$$\frac{3}{\sqrt{-1}}\in C$$

هذه النتيجة تهمل لأنها تنتمي إلى مجموعة أكبر من مجموعة الأعداد الحقيقية.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}$

$$L^+ = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4} = \infty$$

$$L^- = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4} = -\infty$$

$$L^+ \neq L^-$$

و هذا يؤدي إلى أن الغاية غير موجودة.

6. $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{x-5}\,,\ni D_f = [5,\infty)$

إذا كانت نقطة الغاية موجودة داخل مجال ألداله، يتم إيجاد غايتها عن طريق التعويض المباشر

$$\sqrt{-4-5} = \sqrt{-9} \in C$$

هذه النتيجة تهمل لأنها تنتمي إلى مجموعة أكبر من مجموعة الأعداد الحقيقية.

ب- اختبر استمرارية الدوال المعطاة في (أ) .

<u>الحـــل:-</u>

- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$

لاختبار استمرارية الدالة يجب أن نحقق الشروط

1. $D_f = [2,\infty),\ \infty\in [2,\infty)$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} = \infty$

3. $f(\infty) = \dfrac{\infty}{\sqrt{\infty-2}} = \dfrac{\infty}{\sqrt{\infty-2}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

و هذه كمية غير معرفة أي أن الدالة غير مستمرة.

- $f(x) = \dfrac{x-2}{x^3+4}$
- $D_f = [\sqrt[3]{-4},\infty)$.

الدالة غير مستمرة لأن المجال أكبر من مجموعة الأعداد الحقيقية.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$
- $D_f = R \setminus \{0\},\ 3\in R \setminus \{0\}$
- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$
- $f(3) = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$

- $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^4}=f(3)$

الدالة مستمرة لتحقق الشروط.

- $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$
- $D_f=R\setminus\{0\},\ -1\in R\setminus\{0\}$
- $\lim_{x\to -1}\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{-1}}$

الدالة غير مستمرة لأن $\frac{3}{\sqrt{-1}}$ تنتمي إلى مجموعة أكبر من مجموعة الأعداد الحقيقية.

- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}$

1. $D_f=R\setminus\{0\},\ 0\notin R\setminus\{0\}$

الدالة غير مستمرة لعدم تحقق الشرط الأول.

- $\lim_{x\to -4}\sqrt{x-5}\ ,\ \ni D_f=[5,\infty),\quad -4\notin[5,\infty)$

الدالة غير مستمرة لعدم تحقق الشرط الأول.

<u>مجموعة تدريبات للطلاب</u>

أ- احسب غايات كل من الدوال الآتية إن وجدت :

1- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$

2- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$

$\lim_{x\to 3}\frac{4}{(x-3)^4}$ **3-**

4- $\lim_{x\to -1}\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4+x^2+2}$ **5-**

$\lim_{x\to -4}\sqrt{x+4}\ ,\ \ni D_f=[-4,\infty)$ **6-**

ب- اختبر استمرارية الدوال المعطاة في **(أ)** .

ألـــــــدوال ألخـــــــاصــــة

<u>ألـــدوال الخاصة (The Special Functions):</u>

في هذا ألفصل سنتطرق إلـى ألدوال ألخاصـة وكل مـا يتعلـق برسـمها ، قيمهـا ، خواصـها ، ... و كيفية التعامل معها. هذه ألدوال هي المثلثية ، أللوغارتميه ، ألأسيه. سنبدأ بدراسة المثلثية أولا.

<u>ألـــدوال المثلثية (The Trigonometric Functions):</u>

إحدى ألدوال ألخاصة و تكتب على النحو الآتي:

أ- دالة ألجيب : $\sin\theta$

ب- دالة ألجيب تمام : $\cos\theta$

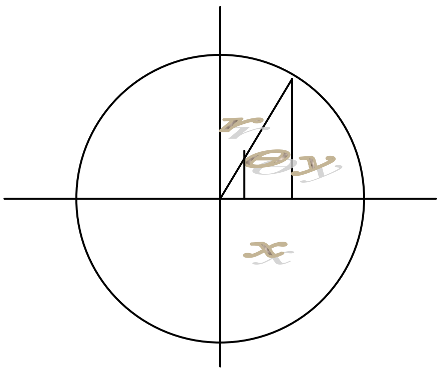
ج- دالة ألظل : $\tan\theta$

د- دالة الظل تمام : $\cot\theta$

ك- دالة القاطع : $\sec\theta$

ل- دالة القاطع تمام : $\csc\theta$

هذه الدوال لها قوانين و خواص ناتجة عن المثلث القائم الزاوية المرسوم داخل دائرة على النحو الآتي :



$$\sin\theta = y / r \Longrightarrow y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = x / r \Longrightarrow x = r\cos\theta$$

$$\tan\theta = y / x \Longrightarrow \tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$$

$$\cot\theta = x / y \Longrightarrow \cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$$

$$\sec\theta = r / x \Longrightarrow \sec\theta = 1 / \cos\theta$$

$$\csc\theta = r / y \Longrightarrow \csc\theta = 1 / \sin\theta$$

ملاحــــظه :

نرى أن نصف القطر في دائرة الوحدة يساوي واحد أي أن :

$$y = \sin\theta \;,\; x = \cos\theta \;\Rightarrow\; r = 1$$

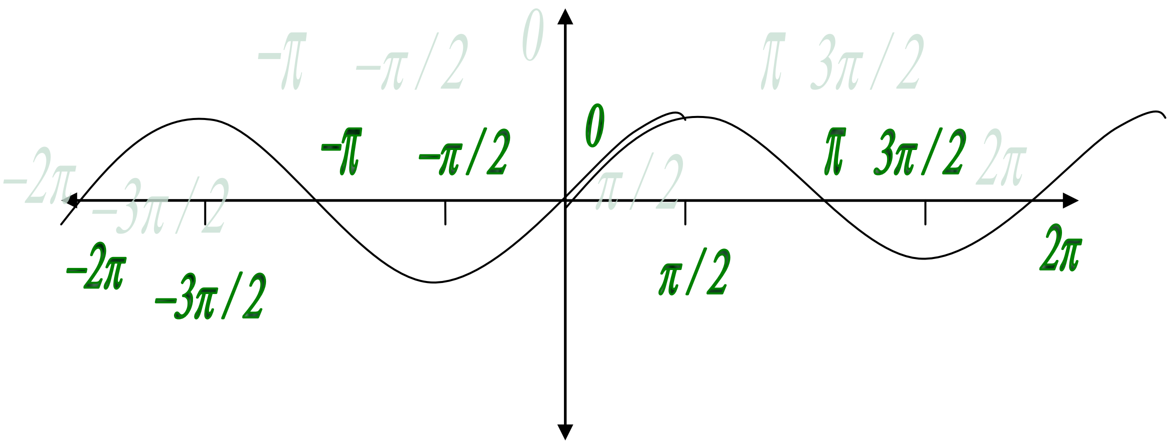
نستنتج أن معادلة دائرة الوحدة هي

$$x^2 + y^2 = 1 \;\Rightarrow\; \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

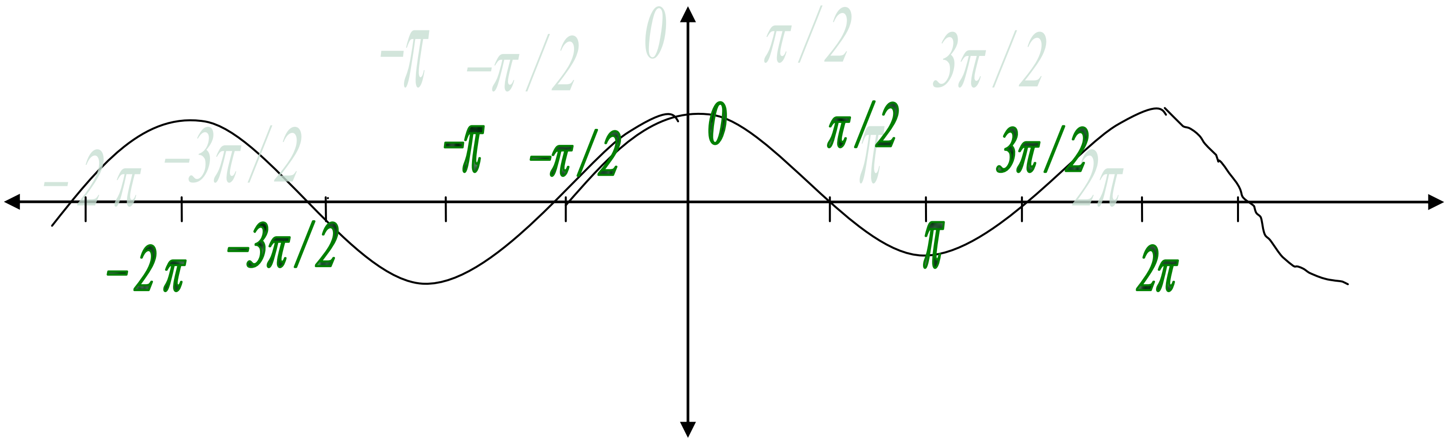
حيث يكون مركز الدائرة نقطة الأصل . هذه العلاقة هامه جدا و سنستعملها في الكثير من العلاقات التي تخص الدوال ألمثلثيه . هنا سنأخذ بعض قيم الدوال ألمثلثيه و نرى الشكل العام من خلالها.

Degrees	0	30	45	60	90	180	270	360
Radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	١	٠	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1	0	1

بالإمكان رسم الدوال على النحو الآتي :



$y = \sin x \qquad D_{\sin x} = R \qquad R_{\sin x} = [-1 , 1]$



$y = \cos x \qquad D_{\cos x} = R \qquad R_{\cos x} = [-1 , 1]$

من ألرسم السابق يتبين لنا أن دوال ألجيب و ألجيب تمام تتكرر بعد 2π ، -2π أي أن ألرسم يتكرر مره أخرى لأن :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 4\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 4\pi) = \cos x$$

يدعى هذا النوع من الدوال بالدوال ألدوريه و يعرف على النحو الآتي :

ألدوال ألدوريه (The Periodic Functions):

تدعى f داله دوريه إذا حققت ألعلاقة ألتاليه :

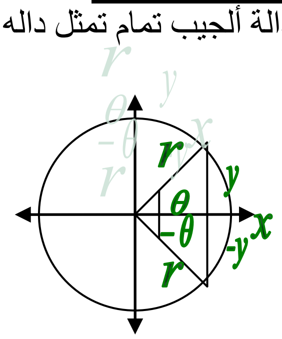
$$f(x + 2n\pi) = f(x) , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

كما في المثال ألآتي :

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2n\pi) = \cos x, \; n \in I$$

ملاحظـــــــــــه :

دالة ألجيب تمام تمثل داله زوجيه لأنها متناظرة حول محور y كما يتبين من ألرسم الآتي :



$\cos \theta = x / r, \qquad \cos (-\theta) = x / r$

بينما تمثل دالة الجيب داله فرديه وفقا للرسم نفسه و على النحو الآتي :

$sin\ \theta = y / r\ ,\quad sin\ (-\ \theta) = -y / r$

في حين تمثل دالـة القاطع دالـه زوجيـه، أمـا دوال ألظل، ألظل تمـام ، ألقـاطع تمـام فتمثل دوال فرديه.

علاقات الدوال ألمثلثيه:

ذكرنا العلاقة ألهامه:

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

فيما سبق حيث بالإمكان أن نستنتج منها العلاقات ألآتيه:

أ- نقسم ألمعادله على مربع الجيب تمام لنستنتج :

$$tan^2 x + 1 = sec^2 x$$

ب- نقسم ألمعادله على مربع الجيب لنستنتج :

$$1 + cot^2 x = csc^2 x$$

كذلك بالإمكان الحصول على العلاقات ألآتيه:

ج- $sin(x \pm y) = sin\ x\ cos\ y \pm cos\ x\ sin\ y$

$sin\ 2\ x = 2\ sin\ x\ cos\ x$

و- $cos\ (x \pm y) = cos\ x\ cos\ y \mp sin\ x\ sin\ y$

ل- $cos\ 2\ x = cos^2 x - sin^2 x$

ك- $cos\ 2\ x = 2\ cos^2 x - 1 \quad or \quad cos\ 2\ x = 1 - 2\ sin^2 x$

م- $tan\ (x \pm y) = (tan\ x \pm tan\ y) / (1 \pm tan\ x\ tan\ y)$

ملاحـــــــظه:

يمكن الاستفادة من قوانين الجمع و الطرح إلى دوال الجيب و الجيب تمام لمعرفة قيم بعض الزوايا فمثلا :

أ- إذا أضيفت إلى الزاوية إحدى الزاويتين $\pi / 2$ أو $٣\pi / 2$

تقلب دالة الجيب إلى دالة الجيب تمام والعكس صحيح على النحو الآتي :

1- $sin\ [(\pi / 2) + x] = sin\ \pi / 2\ \ cos\ x + cos\ \pi / 2\ \ sin\ x = cos\ x$ (عند الربع 2)

2- $sin\ [(3\pi /2) +x] = sin\ 3\pi /2\ cos\ x + cos\ 3\pi /2\ sin\ x = -\ cos\ x$ (عند الربع 4)

3- $sin\ [(\pi / 2) - x] = sin\ \pi / 2\ \ cos\ x - cos\ \pi / 2\ \ sin\ x = cos\ x$ (عند الربع 1)

4- $sin\ [(3\pi /2) -x] = sin\ 3\pi /2\ cos\ x - cos\ 3\pi /2\ sin\ x = -\ cos\ x$ (عند الربع 3)

5- $cos\ [(\pi / 2) + x] = cos\pi / 2\ \ cos\ x - sin\ \pi / 2\ \ sin\ x = -sin\ x$ (عند الربع 2)

6- $cos\ [(\pi / 2) - x] = cos\ \pi / 2\ cos\ x + sin\ \pi / 2\ \ sin\ x = sin\ x$ (عند الربع 1)

7- $cos\ [(3\pi /2) +x] = cos\ 3\pi /2\ cos\ x - sin\ 3\pi /2\ sin\ x = sin\ x$ (عند الربع 4)

8- $cos\ [(3\pi /2) - x] = cos\ 3\pi /2\ cos\ x + sin\ 3\pi /2\ sin\ x = -\ sin\ x$ (عند الربع 3)

ب- إذا أضيفت إلى الزاوية إحدى الزاويتين π أو $2\ \pi$

تبقى ألداله كما هي مع مراعاة الاشاره و على النحو الآتي :

1- $sin(\pi + x) = sin\ \pi\ cos\ x + sin\ x\ cos\ \pi = -\ sin\ x$ (عند الربع ٣)
2- $sin(2\pi + x) = sin\ 2\pi\ cos\ x + sin\ x\ cos\ 2\pi = sin\ x$ (عند الربع ١)
3- $sin(\pi - x) = sin\ \pi\ cos\ x - sin\ x\ cos\ \pi = sin\ x$ (عند الربع ٢)
4- $sin(2\pi - x) = sin\ 2\pi\ cos\ x - sin\ x\ cos\ 2\pi = -\ sin\ x$ (عند الربع ٤)
5- $cos(2\pi + x) = cos\ 2\pi\ cos\ x - sin\ x\ sin\ 2\pi = cos\ x$ (عند الربع ١)
6- $cos(\pi - x) = cos\ \pi\ cos\ x + sin\ x\ sin\ \pi = -\ cos\ x$ (عند الربع ٢)
7- $cos(2\pi - x) = cos\ 2\pi\ cos\ x + sin\ x\ sin\ 2\pi = cos\ x$ (عند الربع ٤)
8- $cos(\pi + x) = cos\ \pi\ cos\ x - sin\ x\ sin\ \pi = -\ cos\ x$ (عند الربع ٣)

إزاحة بيانات الدوال ألمثلثيه:

في هذا الفصل سنقلص مجال الدوال ألمثلثيه إلى الفتره ($\pi, 2\ \pi$) وهي تمثل دورتين لغرض رسم ألداله ونضيف الآتي إلى ما سبق ذكره من قوانين في الفصل الثاني:

أ- أذا ضربت الزاوية بعدد فان ألداله تضغط أو تسحب إلى الجانب بالاعتماد على قيمة العدد .
ب- أذا ضرب مدى ألداله بعدد فان ألداله تضغط أو تسحب من الأعلى و الأسفل بالاعتماد على قيمة العدد .

معكوس الدوال ألمثلثيه:

الدوال ألمثلثيه بصوره عامه غير متقابلة لذا فان معكوس كل منها لا يمثل داله ، كما و أن جميع الدوال ألمثلثيه دوريه أي تكرر نفسها بعد دوره أو دورتين، فإذا قصرنا كل من هذه الدوال على منطلق معين لوجدنا أن الدوال المقصورة متقابلة و معكوس كل منها يمثل داله تستحق الدراسة.

ألداله المتقابلة :

تدعى ألداله متقابلة إذا وفقط إذا حققت الشرط الآتي :

$$f: X \to Y \ \ni y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}: Y \to X \ \ni x = f^{-1}(y)$$

أ- معكوس دالة الجيب :

أولا يجب تحديد مدى و مجال معكوس دالة الجيب كي تكون هذه ألداله موجودة و معرفة، وعلى النحو الآتي:

$$y = sin\ x\ ,\ sin : [-\pi/2\ ,\ \pi/2] \to [-1\ ,\ 1]$$

$$sin^{-1} y = x \ \Longrightarrow\ -\pi/2 \le sin^{-1} y \le \pi/2$$
$$R_{sin}{}^{-1} = [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$$

$$-1 \le y \le 1 \ \Longrightarrow D_{sin}{}^{-1} = [-1\ ,\ 1]$$
$$sin^{-1} y : [-1\ ,\ 1] \to [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$$

$$y = sin\ x \Leftrightarrow x = sin^{-1} y \quad \forall\ x \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$$

ملاحظـــــات:

أ- $sin^{-1} y \ne 1/sin\ y$
ب- معكوس دالة الجيب داله فرديه حيث أن:

$$sin^{-1} y \ = -\ sin^{-1} y$$

يتضح ذلك في المثال الآتي:

$$\sin^{-1}(-1) = -\pi/2 \ , \quad \sin^{-1}(1) = \pi/2$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(-1) = -\sin^{-1}(1)$$

ب- معكوس دالة الجيب تمام :

أولا يجب تحديد مدى و مجال معكوس دالة الجيب تمام كي تكون هذه ألداله موجودة و معرفة، وعلى النحو الآتي:

$$y = \cos x \ , \ \cos: [0 , \pi] \rightarrow [-1 , 1]$$

$$\cos^{-1} y = x \Rightarrow 0 \le \cos^{-1} y \le \pi$$

$$R_{\cos}{}^{-1} = [0 , \pi]$$

$$-1 \le y \le 1 \Rightarrow D_{\cos}{}^{-1} = [-1 , 1]$$

$$\cos^{-1} y : [-1 , 1] \rightarrow [0 , \pi]$$

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \cos^{-1} y \quad \forall x \in [0 , \pi]$$

<u>ملاحظـــــات:</u>

أ- معكوس دالة الجيب تمام داله لا فرديه و لا زوجيه لأنها تأخذ قيم من جهة واحده من جهات المحور كما يتضح في المثال الآتي:

$$\cos^{-1}(-1) = \pi, \quad \cos^{-1}(1) = 0$$

ب-

$$\cos^{-1}(-y) = \pi - \cos^{-1} y$$

ج- معكوس دالة الظل :

أولا يجب تحديد مدى و مجال معكوس دالة الظل كي تكون هذه ألداله موجودة و معرفة، وعلى النحو الآتي:

$$y = \tan x \ , \ \tan: [-\pi/2 , \pi/2] \rightarrow R$$

$$\tan^{-1} y = x \Rightarrow -\pi/2 \le \tan^{-1} y \le \pi/2$$

$$R_{\tan}{}^{-1} = [-\pi/2 , \pi/2]$$

$$y \in R \Rightarrow D_{\tan}{}^{-1} = R$$

$$\tan^{-1} y : R \rightarrow [-\pi/2 , \pi/2]$$

$$y = \tan x \Leftrightarrow x = \tan^{-1} y \quad \forall x \in [-\pi/2 , \pi/2]$$

<u>ملاحظـــــه:</u>

معكوس دالة الظل داله فرديه كما يتضح في المثال الآتي:

$$\tan^{-1}(-1) = -\pi/4 \ , \quad \tan^{-1}(1) = \pi/4$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1)$$

د- معكوس دالة الظل تمام:

أولا يجب تحديد مدى و مجال معكوس دالة الظل تمام كي تكون هذه ألداله موجودة و معرفة، وعلى النحو الآتي:

$$y = \cot x \ , \ \cot: [0 , \pi] \ \to R$$

$$\cot^{-1} y = x \ \Rightarrow \ 0 \le \cot^{-1} y \le \pi$$
$$R_{\cot^{-1}} = [0 , \pi]$$
$$y \in R \Rightarrow D_{\cot^{-1}} = R$$
$$Cot^{-1} y : R \to [0 , \pi]$$
$$y = \cot x \Leftrightarrow x = \cot^{-1} y \quad \forall\, x \in [0 , \pi]$$

<u>ملاحظـــــه:</u>

مما سبق يتبين لنا أن :

$$\cot^{-1} y = (\pi / 2) - \tan^{-1} y$$

ك- معكوس دالة القاطع:

أولا يجب تحديد مدى و مجال معكوس دالة القاطع كي تكون هذه ألداله موجودة و معرفة، وعلى النحو الآتي:

$$y = \sec x \ , \ \sec : [0 , \pi] \setminus \{\pi / 2\} \to R \setminus (-1 , 1)$$
$$\sec^{-1} y = x \ \Rightarrow \ \sec^{-1} y \in [0 , \pi] \setminus \{\pi / 2\}$$
$$R_{\sec^{-1}} = [0 , \pi] \setminus \{\pi / 2\}$$
$$y \in R \setminus (-1 , 1) \Rightarrow D_{\sec^{-1}} = R \setminus (-1 , 1)$$
$$\sec^{-1} y : R \setminus (-1 , 1) \to [0 , \pi] \setminus \{\pi / 2\}$$
$$y = \sec x \Leftrightarrow x = \sec^{-1} y \quad \forall\, x \in [0 , \pi] \setminus \{\pi / 2\}$$

ل- معكوس دالة القاطع تمام:

أولا يجب تحديد مدى و مجال معكوس دالة القاطع تمام كي تكون هذه ألداله موجودة و معرفة، وعلى النحو الآتي:

$$y = \csc x \ , \ \csc : [-\pi / 2 , \pi / 2] \setminus \{0\} \to R \setminus (-1 , 1)$$
$$\csc^{-1} y = x \ \Rightarrow \ \csc^{-1} y \in [-\pi / 2 , \pi / 2] \setminus \{0\}$$
$$R_{\csc^{-1}} = [-\pi / 2 , \pi / 2] \setminus \{0\}$$
$$y \in R \setminus (-1 , 1) \Rightarrow D_{\csc^{-1}} = R \setminus (-1 , 1)$$
$$\csc^{-1} y : R \setminus (-1 , 1) \to [-\pi / 2 , \pi / 2] \setminus \{0\}$$
$$y = \csc x \Leftrightarrow x = \csc^{-1} y \quad \forall\, x \in [-\pi / 2 , \pi / 2] \setminus \{0\}$$

<u>ألداله أللوغارتميه(The logarithm Function):</u>

تكتب دالة اللوغاريتم على النحو الآتي :

$Log_a^u = Ln\, u / Ln\, a\ ,\ \ a > 0\ ,\ \ a \neq 1$

حيثu تمثل أس اللوغاريتم

a تمثل أساس أللوغاريتم

أما فيما يختص باللوغاريتم ألطبيعي و الذي نحن بصدد دراسته الآن فتكتب ألداله على النحو الآتي:

$Ln\, u$

حيثu تمثل أس اللوغاريتم بينما اثنان تمثل أساس أللوغاريتم و هوعدد ثابت لايتغير

$Ln: (0, \infty) \rightarrow R$

أي أن مدى ألداله هو مجموعة الأعداد الحقيقيه و مجالها $(0, \infty)$ كذلك الحال بالنسبة لدالة اللوغاريتم .

<u>خواص دالة اللوغاريتم الطبيعي:</u>

1- $Ln\, x\, y = Ln\, x + Ln\, y$

2- $Ln\, x / y = Ln\, x - Ln\, y$

3- $Ln\, 1 / x = -Ln\, x$

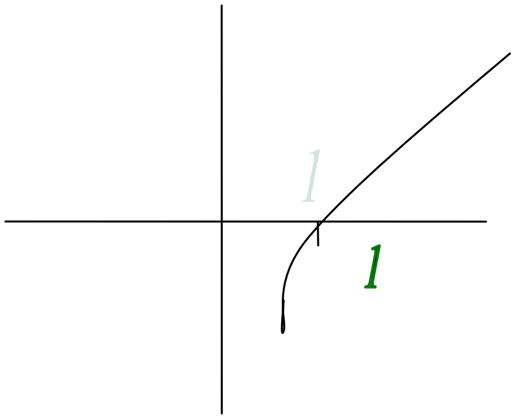
4- $Ln\, x^a = a\, Ln\, x$

<u>رسم دالة اللوغاريتم الطبيعي:</u>

مما سبق يتبين لنا أن :

$Ln\, 1 = 0$

و بناءا عليه فان رسم ألداله يكون على النحو الآتي :



<u>ألداله ألأسيه (The Exponential Function):</u>

تكتب الدالة ألأسيه على النحو الآتي:

$e^x = exp\,(x)$, ∍ x is a real number

$e: R \rightarrow (0, \infty)$

أي أن مدى ألداله هو$(0, \infty)$ و مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقيه.

<u>خواص ألداله ألأسيه :</u>

$e = 2.712$

1- $e^0 = 1$

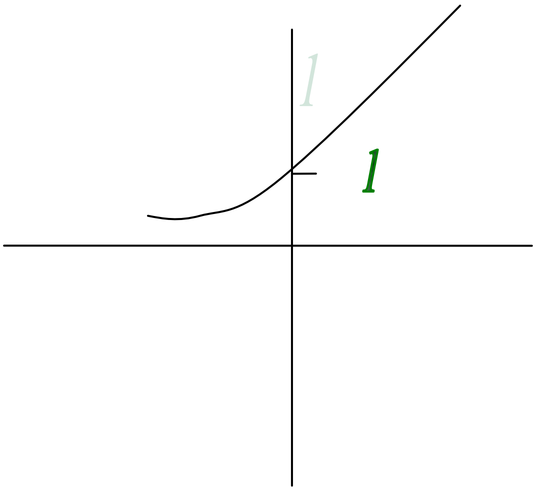
2- $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} . e^{x_2}$

3- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

4- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$**,** **5-** $e^{Ln\,x} = x = Ln\, e^x$

رسم ألداله ألأسيه :

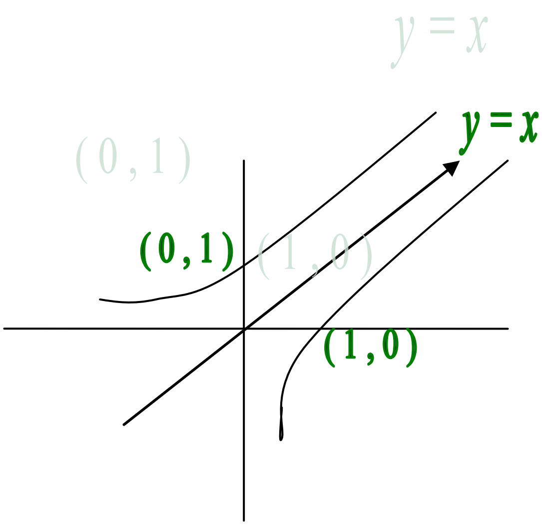
بناءا على ما سبق بالإمكان رسم ألداله على النحو الآتي :



ملاحظـــــات:

أ- ألداله ألأسيه موجبه دائما و لا تساوي صفر أبدا

ب- من الخاصية الخامسة يتبين لنا أن ألداله ألأسيه معكوس دالة اللوغاريتم الطبيعي كما هو مبين في الرسم الآتي :



$e^x = Ln^{-1} x$

مجموعة تمارين مع حلها

(١)- استخدم علاقات الدوال المثلثية لإيجاد كل من الدوال التالية:

$\cos(2\pi - 5),\ \cot(4 - 3\pi),\ \sin(3\dfrac{\pi}{2} - 2),\ \sec^2 3x,\ \tan^2 2\pi.$

الحـــل:-

- $\cos(2\pi - 5)$

  $= \cos 2\pi \cos 5 + \sin 2\pi \sin 5$

  $= 1. \cos 5 + 0 . \sin 5$

  $= \cos 5$

- $cot(4 - 3\pi)$

$$= \frac{\cos(4-3\pi)}{\sin(4-3\pi)}$$

$$= \frac{\cos 4 \cos 3\pi + \sin 4 \sin 3\pi}{\sin 4 \cos 3\pi - \sin 3\pi \cos 4}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos 4 \cos 3\pi + \sin 4 \sin 3\pi}{\sin 4}}{\sin 4 \cos 3\pi - \sin 3\pi \cos 4}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos 4 \cos 3\pi}{\sin 4} + \dfrac{\sin 4 \sin 3\pi}{\sin 4}}{\sin 4 \cos 3\pi - \sin 3\pi \cos 4}$$

$$= \frac{\cot 4 \cos 3\pi + \sin 3\pi}{\sin 4 \cos 3\pi - \sin 3\pi \cos 4}$$

$$= \frac{\dfrac{\cot 4 \cos 3\pi + \sin 3\pi}{\cos 3\pi}}{\sin 4 \cos 3\pi - \sin 3\pi \cos 4}$$

$$= \frac{\dfrac{\cot 4 \cos 3\pi}{\cos 3\pi} + \dfrac{\sin 3\pi}{\cos 3\pi}}{\sin 4 \cos 3\pi - \sin 3\pi \cos 4}$$

$$= \frac{\cot 4 + \tan 3\pi}{\dfrac{\sin 4 \cos 3\pi - \sin 3\pi \cos 4}{\sin 4 \cos 3\pi}}$$

$$= \frac{\cot 4 + \tan 3\pi}{\dfrac{\sin 4 \cos 3\pi}{\sin 4 \cos 3\pi} - \dfrac{\sin 3\pi \cos 4}{\sin 4 \cos 3\pi}}$$

$$= \frac{\cot 4 + \tan 3\pi}{1 - \tan 3\pi \cot 4}$$

- $\sin(3\frac{\pi}{2} - 2)$

$$= \sin 3\frac{\pi}{2} \cos 2 - \sin 2 \cos 3\frac{\pi}{2}$$
$$= -1.\cos 2 - \sin 2.0$$
$$= -\cos 2$$

- $\sec^2 3x$

$$= \tan^2 3x + 1$$
$$= (\frac{\sin 3x}{\cos 3x})^2 + 1$$
$$= (\frac{\sin(x + 2x)}{\cos(x + 2x)})^2 + 1$$
$$= (\frac{\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x}{\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x})^2 + 1$$

- $\tan^2 2\pi$

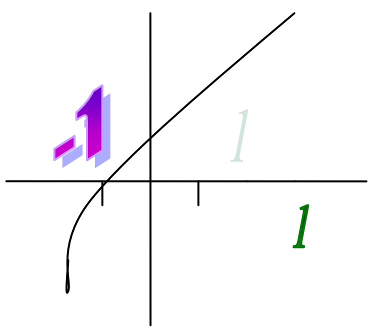
$$= (\frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi})^2$$
$$= 0$$

(٢)- ارسم الدوال التالية:

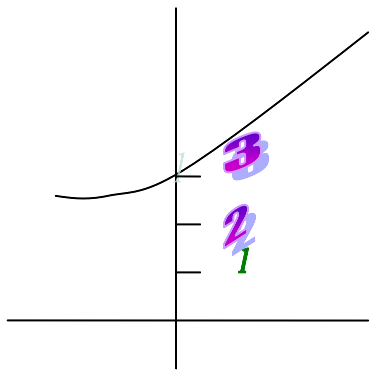
$Ln(x+2)$, $e^x + 2$, $\cos y + 3$, $\sin y - 2$.

<u>الحـــل:-</u>

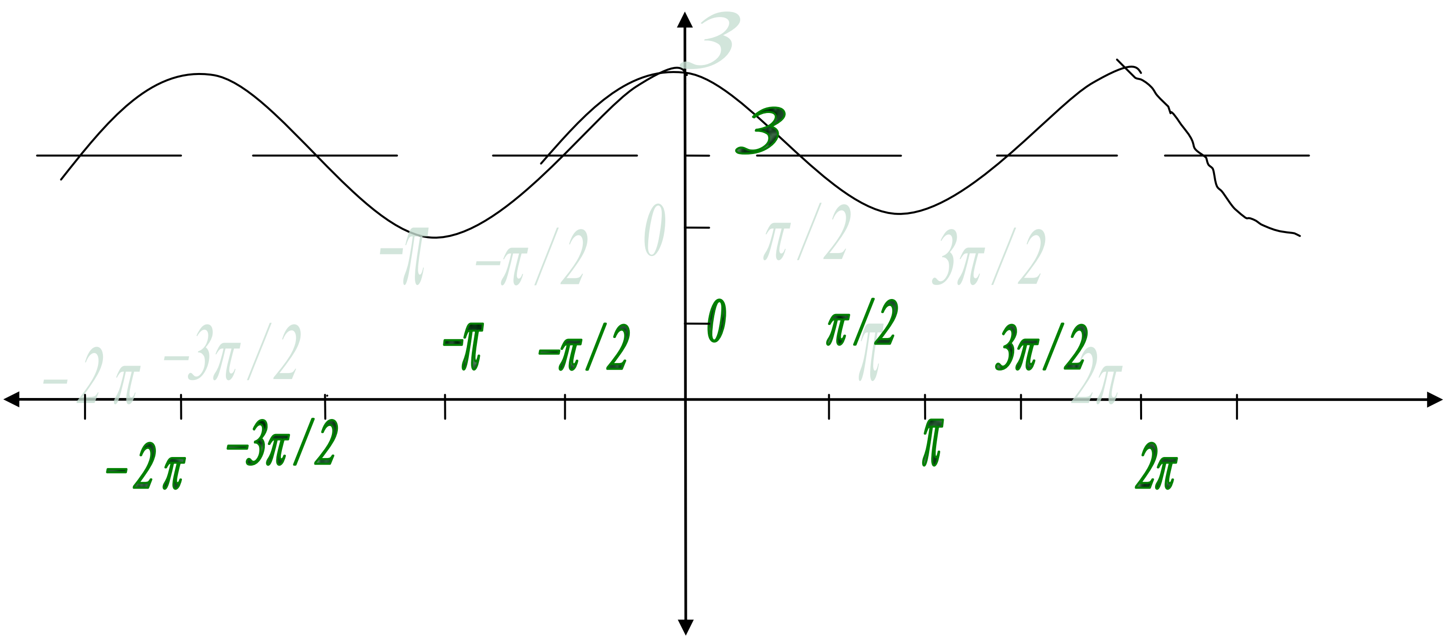
- $Ln(x+2)$



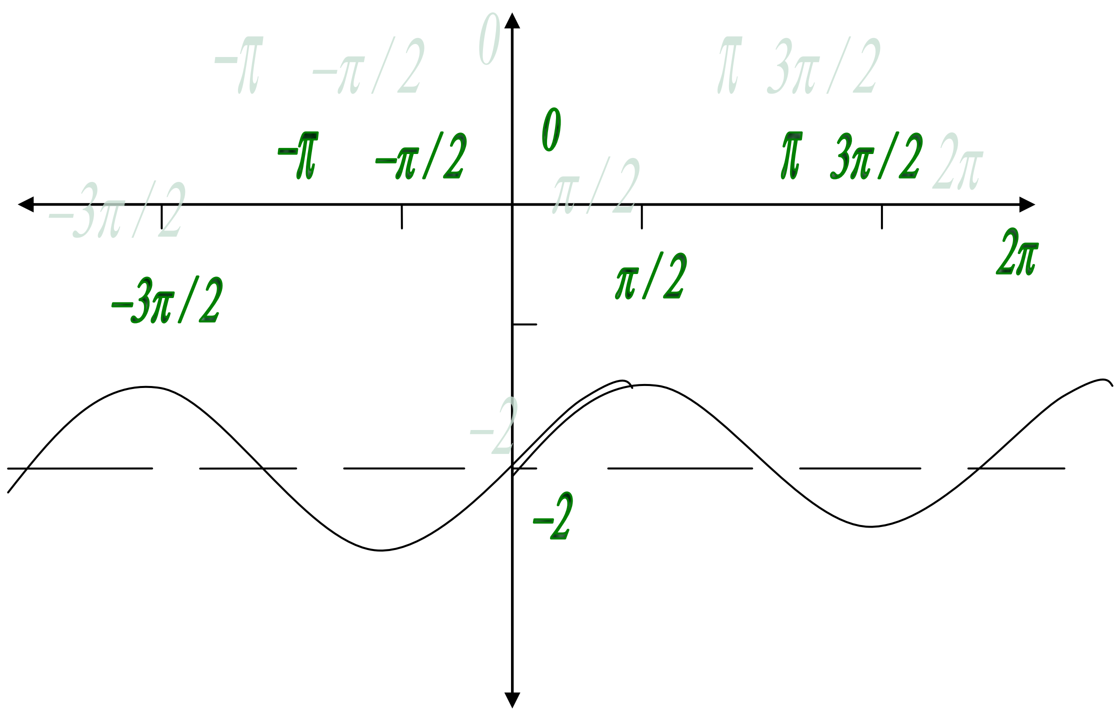
- $e^{x} + 2$



- $\cos y + 3$



- $\sin y - 2$



(٣)- جد معكوس الدوال التالية:

$\tan(-2), \tan 4, \csc 3, \sec(-1)$

<u>**الحــل:-**</u>

- $\tan(-2)$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1}(-2) \leq \frac{\pi}{2}$$

بما أنه لا توجد دالة بين هذه الدوال ظلها يساوي -2 ← لا يوجد معكوس لهذه الدالة

- $\tan 4$

بما أنه لا توجد دالة بين هذه الدوال ظلها يساوي 4 ← لا يوجد معكوس لهذه الدالة

- $\csc 3$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \csc^{-1} 3 \leq \frac{\pi}{2}, \csc^{-1} 3 \neq 0$$

بما أنه لا توجد دالة بين هذه الدوال قاطع تمام لها يساوي 3 ← لا يوجد معكوس لهذه الدالة

- $\sec(-1)$

  $\rightarrow y = \sec^{-1}(-1)$

  $\rightarrow y = \pi$

مجموعة تدريبات للطلاب

(١)- أوجد كل من ألدوال ألآتيه باستخدام علاقات ألدوال ألمثلثيه :

$\sin(\pi+3)$, $\tan(3x \pm 2y)$, $\cos[(\pi/2)+1]$, $\sin(2\pi-4)$, $\csc^2 3\pi$

$\cot^2 2x$, $\cos(2\pi-5)$

(٢)- ارسم ألدوال ألآتيه :

$\sin(x+2\pi)$, $\cos[x-(3\pi/2)]$, $Ln(x-1)$, $Ln\, x-2$

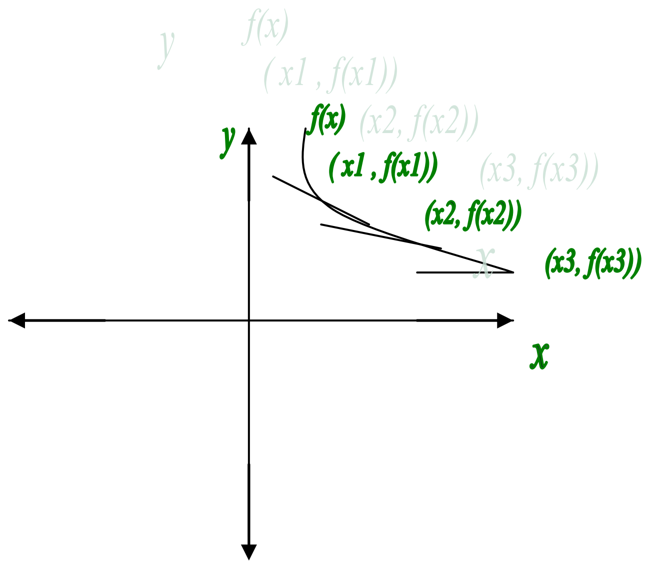
e^{x-2}, e^x+1, $Ln\, x^2$

(٣)- أوجد ألمعكوس لكل مما يأتي :

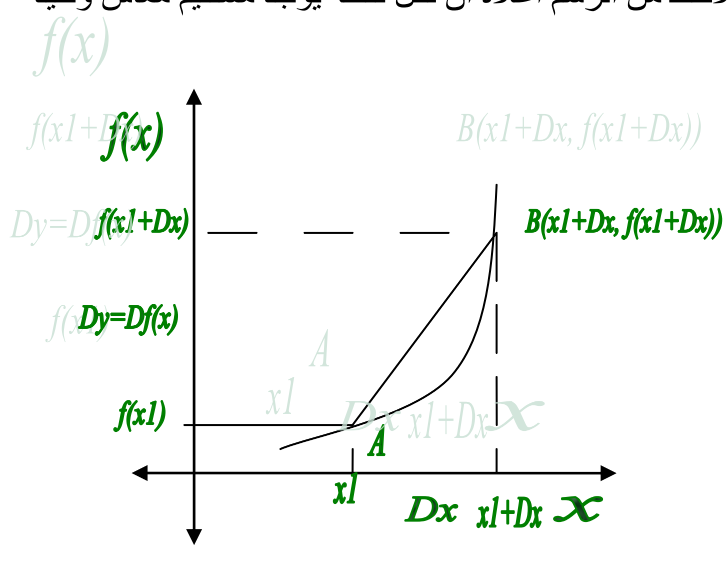
$\cos(-2)$, $\cot 4$, $Ln\, 0$, e^1.

The Differentiation ألاشـــــــتقاق

لتكن $y=f(x)$



نلاحظ من الرسم أعلاه أن لكل نقطة يوجد مستقيم مماس وحيد



لتكن $A(x_1,f(x_1))$ نقطة ثابتة على المنحني و لتكن $B(x_1 + D x, f(x_1 +D x))$ نقطة أخرى عليه

$$Dy=\Delta y=f(x_1 + D x) - f(x_1) = f(x_1+\Delta x) - f(x_1)$$

وبناءا عليه يكون ميل القاطع AB:

$$M\sec = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_1+\Delta x\right)-f\left(x_1\right)}{\Delta x}$$

لاحظ أن المستقيم AB يبدأ بالانطباق على المستقيم المماس عند النقطة A أكثر فأكثر كلما تناقص طول Δx ، أي أن ميل المستقيم AB سيصبح مساويا لميل المماس عند نقطة A كلما اقتربت Δx من الصفر، علما أن ميل المماس يمثل مشتقة الدالة عند نقطة A.
ويمكن كتابتها على النحو الآتي :

$$M\tan gent = \lim_{\Delta x \to 0} M\sec = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

وبالإمكان تعريف المشتقة على النحو الآتي:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

بمعنى أن الدالة تكون قابلة للاشتقاق (differentiable) عندما تكون قيمة غايتها موجودة و تدعى f' مشتقتها عند x_1 (The derivative of f at x_1).

مثـــــال(Example) :

=============

جد مشتقة الدالة ألآتيه باستخدام التعريف :

$f(x) = 4x - 2$

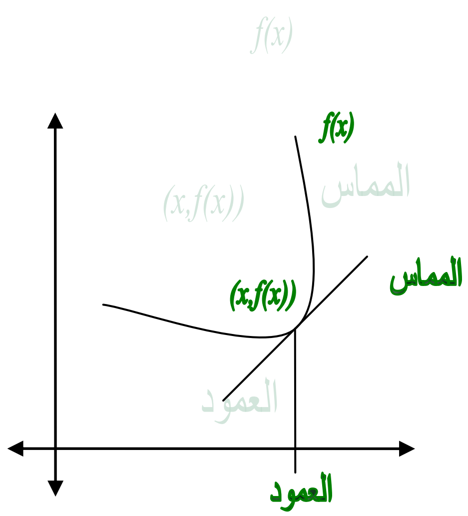
الحــــــــــل:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x) - 2, \ f(x) = 4x - 2$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x + \Delta x) - 2 - (4x - 2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x + 4\Delta x - 4x + 2 - 2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4 = 4$$

ألمستقيم العمود(The Vertical Line):

يدعى المستقيم العمود على المستقيم المماس لمنحني عند نقطة التماس بالمستقيم العمود على المنحني عند تلك النقطة.

$M_{\perp} = -1 / M \text{ tangent}$



مثـــــــــال(Example):

جد معادلة المستقيم المماس و المستقيم العمود عند النقطة $(4,2)$ للمنحني الآتي:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

ألحـــــــل:

$$M_{\tan}\ \Big]_{(4,2)} = f'(x)\ \Big]_{(4,2)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$M \Big|_{(4,2)} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = M_{tan}(x - x_1)$$
$$y - 2 = (1/4)(x - 4)$$
$$y = (1/4)\,x + 1$$

مبل ألعمود

$$M_{\perp} = -1 / M_{tan}$$
$$M_{\perp} = -1 / (1/4) = -4$$
$$y - y_1 = M_{\perp}(x - x_1)$$
$$y - 2 = -\ 4\,(x - 4)$$

معادلة العمود

$$y = -4x + 18$$

ملاحظـــــــة:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 فهي مستمرة عند تلك النقطة لكن العكس غير صحيح .

مثـــــــال(Example):

================

لتكن $f(x) = |x|$ ، $x_0 = 0$

ألحــــــــل:

$$f(x + \Delta x) = |x + \Delta x|$$

$$|\Delta x| = \begin{cases} \Delta x & if \quad \Delta x \geq 0 \\ -\Delta x & if \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$L^+ = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$L^- = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$L^+ \neq L^-$$

ألغاية غير موجودة ، بمعنى أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$.

خواص الاشـــــتقاق (The Properties Of The Differentiation):

- لتكن $f(x) = c$ ، و c مقدار ثابت ، فان $f'(x) = 0$.
- $(c\,f(x))' = c\,f'(x)$.
- لتكن $f(x)$, $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق عند x ، فان :

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

و بالإمكان تعميم هذه الخاصية إلى n من الدوال على النحو الآتي:

$$(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \ldots f_n'(x)$$

- لتكن n عدد صحيح موجب ، فان :

$$(d / dx)\, x^n = n\, x^{n-1}$$

كذلك الحال عندما $x \neq 0$ تكون

$$(d / dx)\, x^{-n} = -n\, x^{-n-1}$$

- لتكن $g(x),\ f(x)$ دوال قابلة للاشتقاق عند x ، فان :

$$(f.g)'(x) = f(x).\, g'(x) + g(x).\, f'(x)$$

أما عندما تكون هناك ثلاث دوال قابلة للاشتقاق عند x $h(x), g(x), f(x)$ فان :

$$(f.g.h)'(x) = (f.g)(x).\, h'(x) + h(x).\, (f.g)'(x)$$

- لتكن $g(x),\ f(x)$ دوال قابلة للاشتقاق عند x بحيث أن $g(x) \neq 0$ ، فان :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

قانون السلسلة (The Chain Rule):

لنأخذ المثال الآتي : نفترض أن جسما يتحرك على طول الخط $y = 3.\, x - 1$ بطريقة تجعل ألأحداثي x عند الزمن t وفقا للمعادلة $x = 2\, .\, t$. احسب dy/dt

ألحـــــــــل:

لاحظ هنا أن y دالة إلى x لذا يمكن اشتقاقها نسبة إلى x لكن ليس بالإمكان اشتقاقها نسبة إلى t مباشرة . ولكن x هي الأخرى دالة إلى t أي من الممكن اشتقاق x نسبة إلى t وهنا نستطيع التعويض عن قيمة x بما يساويها بالنسبة إلى t وبذلك تصبح y دالة إلى t و على النحو الآتي :

$$y=3.\, x - 1 \Longrightarrow y= 3.(2.\, t) - 1 \Longrightarrow y= 6.\, t - 1 \Longrightarrow (dy / dt) = 6$$

لاحظ أن $(dy / dx) =$ ٣ , $(dx / dt) = 2$ و نستنتج من هذا أن :

$$(dy / dt) = 6 = 3\, .\, 2 = (dy / dx).\, (dx / dt)$$

بمعنى أنه عندما تكون $y = f(x)$, $x = g(t)$ فذلك يؤدي إلى أن :

$$(dy / dt) =(dy / dx).\, (dx / dt)$$

قاعدة السلسلة:

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق عند x و f دالة قابلة للاشتقاق عند $g(x)$ فإذا كانت $h= fog$ فان h دالة قابلة للاشتقاق عند x و مشتقتها هي:

$$h'(x) = f'(g(x)).\, g'(x)$$

ملاحظـــــــة:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق و $y=(f(x))$ حيث n عدد صحيح فان :

$$(dy/dx) = n(f(x))^{n-1}\, .\, f'(x)$$

الاشتقاق الضمني(The Implicit Differentiation):

لنأخذ المثال التالي :

$x^2 + x.y + y^5 = 0$

لاحظ أن هناك خلط بين x و y وهناك دالة ضمنية إلى x يدعى ذلك بالاشتقاق الضمني.

نشتق ضمنيا إلى x باعتبار y دالة ضمنية إلى x .

$$2 . x .(dx / dx) + [x . (dy / dx) + y. (dx / dx)] + 5 . y^4 (dy / dx)$$

$$2. x + x . y' + y + 5. y^4. y' = 0$$

$$x. y' + 5. y^4. y' = -2. x - y$$

$$y'.(x + 5. y^4) = -2. x - y$$

$$y' = \frac{-2.x - y}{x + 5.y^4}$$

مبرهنة القيمة الوسطى (The Mean Value Theorem):

لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) فيوجد على الأقل عدد واحد مثل c بحيث أن:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مبرهنة رول (The Rolles Theorem):

لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة (a,b). إذا كان:

$f(a) = f(b) = 0$. فيوجد على الأقل عدد واحد مثل c بحيث أن:

$f'(c) = 0$ و أن $c \in (a,b)$.

قاعدة لوهابيتال للصيغة 0/0:

لتكن كلا من g,f دالة قابلة للاشتقاق داخل جوار النقطة x_0 (ربما عدا x_0) فإذا كانت $g'(x_0) \neq 0$ لكل x داخل هذا الجوار وكان $f(x_0) = g(x_0) = 0$ و :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$and \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

حيث k عدد حقيقي .

ملاحظـــات:

أ- قاعدة لوهابيتال يمكن تطبيقها عندما $x_0 = \infty$ و كذلك توجد قاعدة مشابهة تدعى قاعدة لوهابيتال للصيغة ∞/∞ كما و أن القاعدتين صحيحتين في حالة إيجاد الغاية من اليمين أو اليسار.

ب- إذا كانت $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ و $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \lim_{x \to x_0} g'(x) = 0$

نشتق مرة أخرى أي أن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

ج- يقصد بجوار النقطة أي فترة مفتوحة تحتوي تلك النقطة .

ألمشتقات العليا (The Second , Third , …Derivatives):

لقد عرفنا المشتقة الأولى للدالة و رمزنا لها بالرمز $f'(x)$ أو dy/dx . ماذا عن المشتقات ذات المرتبة العليا ، لنرى مشتقة $f'(x)$ وما يرمز لها :

$$f'(f'(x)) = f''(x) = d^2y / dx^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

تدعى هذه بالمشتقة الثانية للدالة $f(x)$ في حالة وجود الغاية (Second Derivative).

$$d^2y / dx^2 =[\ d(dy / dx)\ ] / dx$$

وبنفس الفكرة يمكن تعريف المشتقة الثالثة ويرمز لها بالرمز $f'''(x)$ أو d^3y / dx^3 و هكذا لبقية المشتقات. ألآن نأخذ ألمثال ألآتي:

إذا كانت $f(x) = y = 2.x^3+x^2 - 1$ فأوجد كلا من المشتقات الأولى، ألثانية و الثالثة.

$$y' = (dy / dx) = 6.x^2 + 2.x$$

$$y'' = (d^2y / dx^2) = 12.x + 2$$

$$y''' = (d^3y / dx^3) = 12$$

ألدوال ألمتزايدة و المتناقصة (The Increasing And Decreasing Functions):

لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$، تدعى f دالة متزايدة (Increasing Function) إذا كان :

$$f(x_1) < f(x_2)\ \forall\ x_1 , x_2 \ni\ a \le x_1 < x_2 \le b$$

لاحظ المثال الآتي :

$f(x) = x^3$ defined on the close interval [$1,4$].

و تدعى f دالة متناقصة (Decreasing Function) إذا كان :

$$f(x_1) > f(x_2)\ \forall\ x_1 , x_2 \ni\ a \le x_1 < x_2 \le b$$

لاحظ المثال الآتي :

$f(x) = -\ x$ defined on the close interval [1,4]

النقطة الحرجة (The Critical Point):

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$، ولتكن $x_0 \in [a,b]$ ، تدعى النقطة $(x_0,f(x_0))$ نقطة حرجة للدالة f إذا كانت مشتقة الدالة الأولى عند x_0 غير موجودة أو مساوية للصفر.

لاحظ المثالين الآتيين :

(١) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لذا فان النقطة $(0,0)$ نقطة حرجة .

(٢) $f(x) = |x| \Rightarrow f'(0)$ غير معرفة

الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لذا فان النقطة $(0,0)$ نقطة حرجة .

ملاحظـــــــــات:

(١) هنالك علاقة بين كون الدالة متزايدة أو متناقصة وإشارة مشتقتها ، فإذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق لقيم x في الفترة المفتوحة (a,b) ومستمرة لكل x في الفترة المغلقة $[a,b]$ فان f تكون متزايدة على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا كانت :

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$$

تكون متناقصة على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا كانت :

$$f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$$

(٢) معرفة كون الدالة متزايدة أو متناقصة على فترة معينة يسهل عملية رسم مخطط تلك الدالة.

مثـــــال (Example):

أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة ، ما هي النقاط الحرجة . ارسم مخطط الدالة. إذا كانت :

$$f(x) = x^2 - 2.x + 5$$

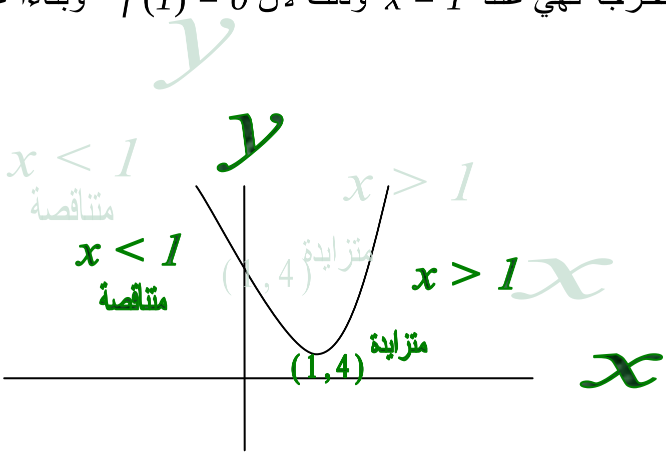
الحــــــــل:

$$f'(x) = 2.x - 2$$

$$2.x - 2 > 0 \Longrightarrow x > 1$$

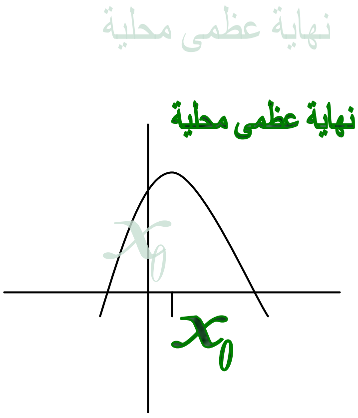
$$2.x - 2 < 0 \Longrightarrow x < 1$$

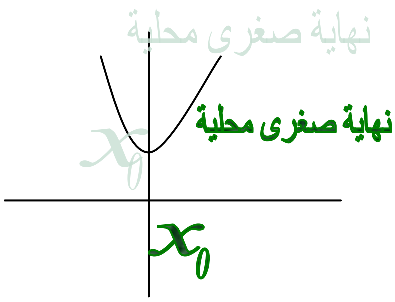
أي بمعنى أن ألدالة متزايدة عند الفترة $(1,\infty)$ ومتناقصة عند الفترة $(-\infty, 1)$ أما ألنقطة الحرجة فهي عند $x = 1$ وذلك لأن $f'(1) = 0$ وبناءا عليه يكون المخطط على النحو الآتي:



النهايات العظمى والصغرىالمحلية (The Locally Maximum,Minimum Points):

يقال أن ألدالة f لها نهاية عظمى محلية (Locally Maximum Point) عند x_0 إذا وجدت فترة مفتوحة (c,d) تحتوي x_0 بحيث أن $f(x_0) \geq f(x)$ لكل $x \in (c,d)$. و يقال أن ألدالة f لها نهاية صغرى محلية (Locally Minimum Point) عند x_0 إذا وجدت فترة مفتوحة (c,d) تحتوي x_0 بحيث أن $f(x_0) \leq f(x)$ لكل $x \in (c,d)$. تدعى أكبر قيمة تأخذها الدالة f في الفترة $[\, c, d\,]$ بالنهاية العظمى المطلقة وأقل قيمة لها بالنهاية الصغرى المطلقة.





ملاحظـــــة:

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[a, b]$ ولها نهاية عظمى أو صغرى محلية في النقطة $x = c$ حيث $c \in (a,b)$ وكانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند c فان $f'(c) = 0$ والعكس غير صحيح . المثال الآتي يوضح ذلك.

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3.\, x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

ولكن $f(0) = 0$ ليست نهاية عظمى أو صغرى محلية لأن الدالة متزايدة ، أي أن:

$$\forall x_1, x_2 \ni x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

و بشكل عام يمكن القول أن إشارة المشتقة الأولى إذا تغيرت حول النقطة الحرجة من موجب إلى سالب عندها تكون النقطة نهاية عظمى أما إذا تغيرت من سالب إلى موجب فتكون النقطة نهاية صغرى وكما هو موضح في المثال الآتي :

مثـــال(Example):

==============

جد النقاط الحرجة للدالة :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3.\, x + 10$$

ومن ثم عين النهايات العظمى والصغرى لها.

ألحــــــــل:

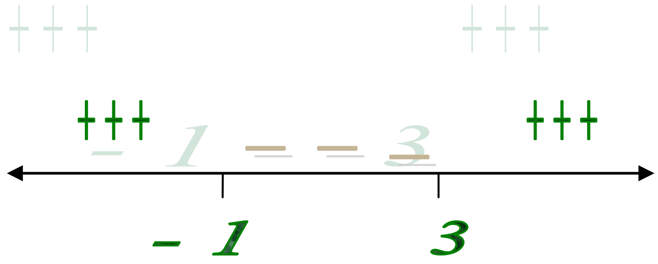
$$f'(x) = x^2 - 2.\, x - 3 \Rightarrow x^2 - 2.\, x - 3 = 0$$

$$(x + 1).(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \wedge x = 3$$

أي أن هنالك نقطتان حرجتان إلى ألدالة .

ليتسنى لنا معرفة النهايات العظمى و الصغرى ندرس إشارة المشتقة الأولى إلى الدالة.



من الرسم أعلاه يتبين لنا أن إشارة المشتقة موجبة لجميع القيم التي تقع خارج الفترة المغلقة $[-1 , 3]$ وسالبة لجميع القيم التي تقع داخل الفترة المفتوحة $(-1 , 3)$ أي بمعنى أن المشتقة تتغير إشارتها من موجب إلى سالب عند مرورها بالنقطة $x = -1$ أثناء حركتها من اليسار إلى اليمين لذا فالدالة لها نهاية عظمى عند تلك النقطة هي $f(-1) = 11,666...$ ، وتتغير إشارتها من سالب إلى موجب عند مرورها بالنقطة $x = 3$ أثناء حركتها من اليمين إلى اليسار لذا فالدالة لها نهاية صغرى عند تلك النقطة هي $f(3) = 1$.

التقعر(The Concavity):

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فإنها تكون مقعرة نحو الأعلى إذا تحقق الآتي:

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ متزايدة $\Rightarrow$ f مقعرة نحو الأعلى

وتكون مقعرة نحو الأسفل إذا تحقق الآتي:

$f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ متناقصة $\Rightarrow$ f مقعرة نحو الأسفل

ملاحظـــــــة:

حتى تكون الدالة مقعرة نحو الأعلى أو الأسفل يجب أن تكون قابلة للاشتقاق .

مثـــــال(١)(Example1):

==================

$f(x) = |x|$

ألدالة غير قابلة للاشتقاق لذلك لا يوجد تقعر نحو الأعلى أو الأسفل .

مثـــــال(٢)(Example2):

==================

$f(x) = x^2 - 2.\,x + 4$

الحـــــــــــل:

$f'(x) = 2.\,x - 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,3)$ نقطة حرجه

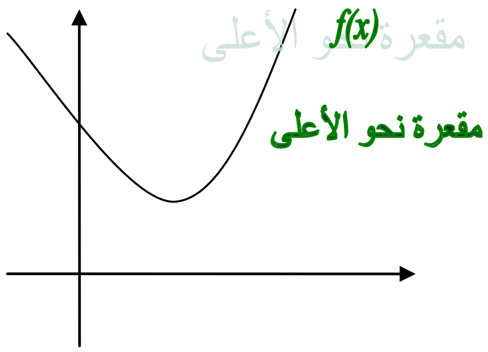
if $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$

$x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0$

$x = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$

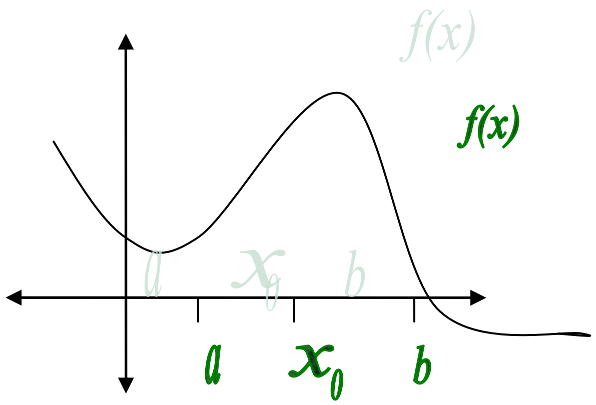
أي أن الدالة متزايدة بصورة مستمرة

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f'$ متزايدة $\Rightarrow f$ مقعرة نحو الأعلى



نقاط الانقلاب(The Inflection Points):

تدعى النقطة x_0 نقطة انقلاب (تحول) للدالة f إذا كانت مشتقتها موجودة وكانت تغير اتجاه تقعرها عند هذه النقطة . أي إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b) تحتوي النقطة بحيث يكون المنحني مقعر نحو الأعلى على الفترة (a,x_0) و نحو الأسفل على الفترة (x_0,b) والعكس صحيح.



ملاحظـــــات:

(١) لتكن f دالة و لتكن x_0 نقطة انقلاب لهذه الدالة فإذا كانت المشتقة الثانية للدالة موجودة عند x_0 فإنها مساوية للصفر و العكس غير صحيح. كما موضح في المثال ألآتي :

$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4.\ x^3 \Rightarrow f''(x) = 12.\ x^2$

$\text{if } f''(x) = 0 \Rightarrow 12.\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0,0)$ نقطة حرجة (نهاية صغرى) وليست نقطة انقلاب.

(٢) لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة الحاوية على x_0 فان :

أ- الدالة لها نهاية صغرى عند x_0 إذا كان $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) > 0$
ب- الدالة لها نهاية عظمى عند x_0 إذا كان $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) < 0$

(٣) إذا كانت $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) = 0$ فان الدالة لها نهاية عظمى أو صغرى أو نقطة تحول. يتضح ذلك في المثال الآتي:

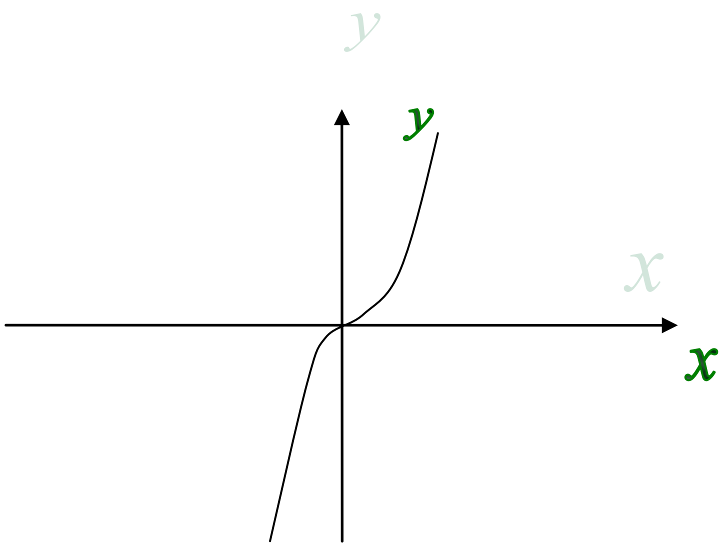
مثـــال(Example):
=============

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3 . x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 6. x \Rightarrow f''(0) = 0$

$\Rightarrow (0, 0)$ نقطة انقلاب



<u>تخطيط المنحنيات(The Graphing of Curves):</u>

لتخطيط منحني دالة مثل $f(x)$ نقوم بعمل الآتي:

- نعين نقاط تقاطع المنحني مع المحورين بجعل $x = 0$ تارة و $y = 0$ أخرى.
- نحسب المشتقة الأولى والثانية.
- نستخدم المشتقة الأولى و الثانية لتعيين النقاط الحرجة و النهايات العظمى و الصغرى و نقاط الانقلاب .
- نستخدم المشتقة الأولى لتعيين فترات التزايد والتناقص .
- نستخدم المشتقة الثانية لتعيين فترات التقعر نحو الأعلى و الأسفل.
- نعين نقاط إضافية للمنحني.
- نرسم منحني أملس يمر بالنقاط التي وجدناها.

مثـــال(Example):
==============

خطط منحني الدالة:

$f(x) = x^3 - 3. x^2 + 4$

ألحـــــــل:

- نعين نقاط تقاطع المنحني مع المحورين:

Let $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0^3 - 3.\,0^2 + 4 = 4$

يتقاطع المنحني مع المحور الصادي عند النقطة $(0,4)$

Let $y = 0 \Longrightarrow x^3 - 3.\,x^2 + 4 = 0$

$$x^3 - 3.\,x^2 + 4 + x^2 - 4.\,x - x^2 + 4.\,x = 0$$
$$x^3 - 4.\,x^2 + 4x + x^2 - 4.\,x + 4 = 0$$
$$x(x^2 - 4.\,x + 4) + (x^2 - 4.\,x + 4) = 0$$
$$x(x-2)^2 + (x-2)^2 = 0$$
$$(x-2)^2(x+1) = 0$$

يتقاطع المنحني مع المحور السيني عند النقاط $(2,0)$, $(-1, 0)$

- نحسب المشتقة الأولى والثانية:

$$f'(x) = 3.\,x^2 - 6.\,x$$
$$f''(x) = 6.\,x - 6$$

- نستخدم المشتقة الأولى و الثانية لتعيين النقاط الحرجة و النهايات العظمى و الصغرى و نقاط الانقلاب :

$$3.\,x^2 - 6.\,x = 3.\,x\,(x-2) \Longrightarrow 3.\,x\,(x-2) = 0$$

من المشتقة الأولى نجد أن النقاط الحرجة $(2,0)$, $(0, 4)$

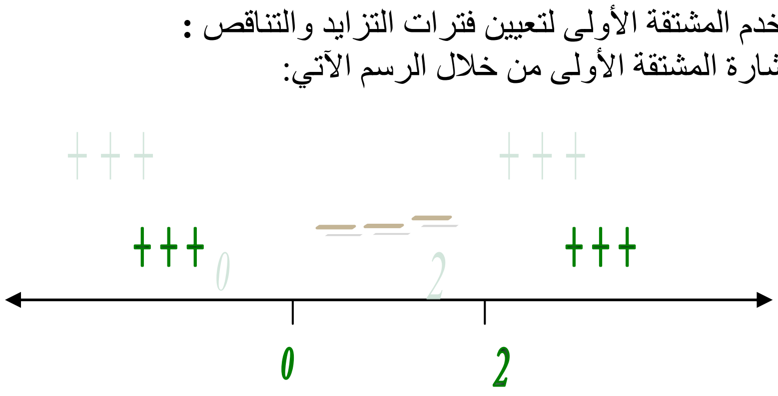
$$6.\,x - 6 = 6.\,(x-1) \Longrightarrow 6.\,(x-1) = 0$$

من المشتقة الثانية نجد أن نقطة الانقلاب $(1,2)$

و لكون المشتقة الأولى مساوية للصفر و المشتقة الثانية اكبر من الصفر عند النقطة$(0,4)$ فهي تمثل نهاية عظمى للدالة . و لكون المشتقة الأولى مساوية للصفر و المشتقة الثانية اصغر من الصفر عند النقطة $(2,0)$ فهي تمثل نهاية صغرى للدالة.

- نستخدم المشتقة الأولى لتعيين فترات التزايد والتناقص :

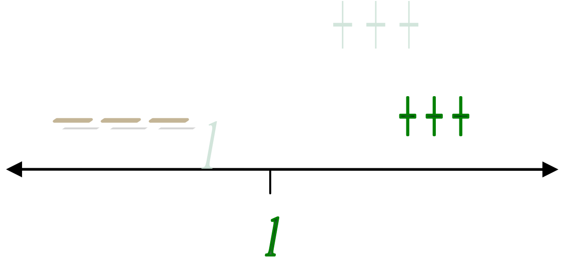
ندرس إشارة المشتقة الأولى من خلال الرسم الآتي:



أي أن الدالة متزايدة في الفترتين $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$ لأن المشتقة الأولى موجبة على هاتين الفترتين. و متناقصة في الفترة $(0,2)$ لأن المشتقة الأولى سالبة على هذه الفترة.

- نستخدم المشتقة الثانية لتعيين فترات التقعر نحو الأعلى و الأسفل:

ألآن إشارة المشتقة الثانية من خلال الرسم الآتي:

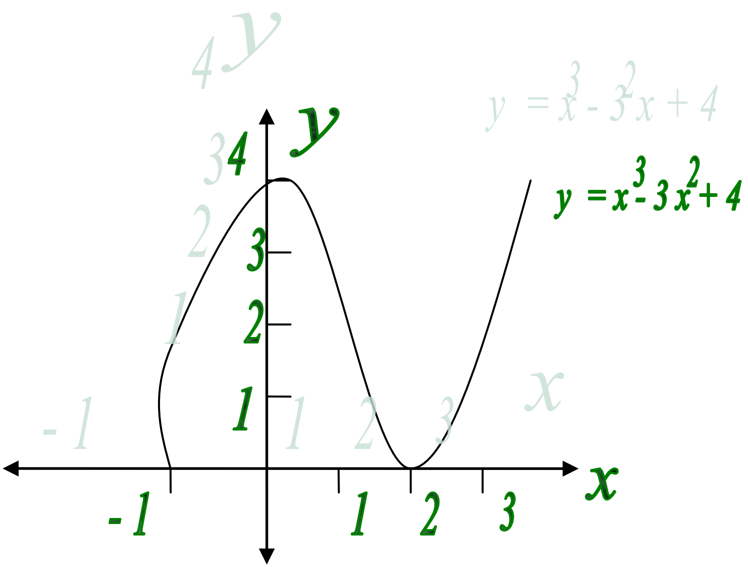


الدالة مقعرة نحو الأسفل عند الفترة $(-\infty, 1)$ لأن المشتقة الثانية سالبة على هذه الفترة . و الدالة مقعرة نحو الأعلى عند الفترة$(1, \infty)$لأن المشتقة الثانية موجبة على هذه الفترة.

- نعين نقاط إضافية للمنحني وخاصة تلك الواقعة بين النقاط الحرجة و نقاط الانقلاب كما مبين في الجدول الآتي:

x	-1	0	1	2	3
y	0	4	2	0	4

- نرسم منحني أملس يمر بالنقاط التي وجدناها:



السرعة و التعجيل(The Velocity And The Acceleration):

عندما نرمز للمسافة (Distance) بالرمز s و الزمن (Time) بالرمز t والسرعة(Velocity) بالرمز v والتعجيل (Acceleration) بالرمز a نجد أنه إذا كانت الدالة $s = f(t)$ تحدد موقع جسم متحرك في الزمن t فان المشتقة الأولى لهذه الدالة تمثل السرعة و المشتقة الثانية تمثل تعجيل الجسم في الزمن t أي أن :

$v = ds / dt$ تمثل سرعة الجسم في الزمن t

$a = (dv / dt) = d^2s / dt^2$ تمثل تعجيل الجسم في الزمن t

مثــــال(Example):

=============

جسم يسير على خط مستقيم و معادلة سيره $s = 3.\ t^3 + 7.\ t^2$ حيث s مقاسه بالأمتار و t زمن سيره بالثواني . جد سرعته وتعجيله عند $t = 2$.

الحـــــل:

$v = (ds / dt) =$ ٩$. t^2 + 14. t$
$a = (dv / dt) = (d^2s \; / dt^2) =$ ١٨$. t + 14$

و عند $t = 2$

$v =$ ٩$.(2)^2 + 14. 2 =$ ٦٤ m / sec
$a = 12. (2) + 14 =$ ٥٠ m / sec

اشتقاق الدوال الخاصة(The Differentiation Of The Special Functions):

درسنا الدوال الخاصة في الفصل الثالث أما هنا في هذا الفصل فسنتعرف إلى مشتقات هذه الدوال و لنبدأ أولا بالدوال المثلثية :

اشتقاق الدوال المثلثية (The Differentiation Of The Trigo. Functions):

سوف نعبر عن مشتقات هذه الدوال على النحو الآتي:

1. $\dfrac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \, \dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \, \dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d(\sec u)}{du} = \sec u \, . \tan u \, \dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d(\csc u)}{du} = -\csc u \, . \cot u \, \dfrac{du}{dx}$

الاشتقاق الضمني للدوال المثلثية:

سبق و أن تطرقنا إلى الاشتقاق الضمني للدوال في هذا الفصل ، المثال ألآتي يوضح لنا اشتقاق الدوال المثلثية ضمنيا:

مثـــــال(Example):

=============

أوجد dy / dx حيث أن :

$x. (\sin 2. y) = y. (\cos 2. x)$

الحـــــــــل:

$x.(\cos 2.y).2.y' + (\sin 2.y).1 = y.(-\sin 2.x).2 + (\cos 2.x).y'$
$[2.x(\cos 2.y) - \cos 2.x]\,y' = -(\sin 2.y) - 2.y.(\sin 2.x)$

$$y' = \frac{-\sin 2.y - 2.y.\sin 2.x}{2.x.\cos 2.y - \cos 2.x}$$

اشتقاق معكوس الدوال المثلثية :

(١) إذا كانت $y = \sin^{-1} u$ حيث u دالة إلى x فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin^{-1} u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx} \quad \ni |u| < 1$$

(٢) إذا كانت $y = \cos^{-1} u$ حيث u دالة إلى x فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$$

(٣) إذا كانت $y = \tan^{-1} u$ حيث u دالة إلى x فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tan^{-1} u}{dx} = \frac{1}{1+u^2}.\frac{du}{dx}$$

(٤) إذا كانت $y = \cot^{-1} u$ حيث u دالة إلى x فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cot^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{1+u^2}.\frac{du}{dx}$$

(٥) إذا كانت $y = \sec^{-1} u$ حيث u دالة إلى x فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sec^{-1} u}{dx} = \frac{1}{|x|.\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$$

(٦) إذا كانت $y = \csc^{-1} u$ حيث u دالة إلى x فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\csc^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{|x|.\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$$

مثـــــال(Example):

=============

أوجد dy / dx حيث أن :

$$y = x.\sec^{-1} x - \tan^{-1} x$$

الحـــــل:

$$\frac{dy}{dx}=y'=x.\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}+\sec^{-1}x-\frac{1}{1+x^2}$$

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية :

إذا كانت $y = Ln\, x$ فان $y'=1 / x$ وبعبارة أخرى إذا كانت $y = Ln\ u$ حيث u دالة إلى x فان:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

مثـــال(Example):

==============

إذا كانت

$$y=Ln\sqrt{3-x^2}$$

فأوجد المشتقة.

ألحـــــل:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}.\frac{1}{2}.\left(3-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.-2.x$$

$$y'=\frac{x}{x^2-3}$$

اشتقاق الدالة الأسية :

إن مشتقة الدالة الأسية هي :

$$\frac{de^u}{dx}=e^u.\frac{du}{dx}$$

مثـــــــال(Example):

================

جد مشتقة الدالة $y = e^{Ln\, x}$

ألحـــــــل:

$$y'= e^{Ln\, x}. (1\ /\ x)$$

مجموعة تمارين مع حلها

- استعمل التعريف لإيجاد مشتقة كل مما يأتي:

$f(x) =7. x^5$, $f(x) = 3. x^2 – 2.x +4$

- استعمل الخواص لإيجاد مشتقة كل مما يأتي:

$f(x) = (x^3 + 2).(1 - x^2), \ (x + 2) / x, \ x^{-6}$

- استعمل قانون السلسة لإيجاد كل مما يأتي:

(dy / dt) if $y = x^3 - 5. x^2 + 4, \ x = t^2$

(dy / dt) if $y = x^2 + 2, \ x = 2. t$

- إذا كانت $f(x) = x^5$, $g(x) = 3. x^2 - 7. x + 5$, $h = f o g$ فأوجد h'.
- جد معادلة المستقيم المماس والمستقيم العمود عند النقطة $(1,3)$ للمنحني $x^2+2.x$
- طبق مبرهنة القيمة الوسطى على الدالة $f(x) = x^2$ إذا علمت أن $a = 0, b = 1$.
- طبق مبرهنة رول على الدالة $f(x) = x^2 + 2$ إذا علمت أن $a = 1, b = 2$.
- استعمل قاعدة لوهابيتال للصيغة $0/0$ لايجاد كل مما يأتي:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3.x+2}{x^3-2}, \ \lim_{x\to 0}\frac{4.x^3-7.x+3}{2.x^2+6}, \ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x^2-9}$$

- جد المشتقات الأولى و الثانية و الثالثة لكل مما يأتي:

$$x^3-3.x^2+2, 4.x^4+3.x^3-5, \ x^2-14$$

- خطط لمنحني الدالة :

$$x^2-9$$

- جسم يسير على خط مستقيم و معادلة سيره $s = 5. t^3 + 6. t^2$ حيث s مقاسه بالأمتار و t زمن سيره بالثواني . جد سرعته وتعجيله عند $t = 5$.
- أوجد dy / dx حيث أن :

1. $y = 2. \cos x . \sin x$
2. $\sin(x^2. y^2) = x$
3. $y = \sin^{-1}(\cos x)$
4. $y = e^x x^4$
5. $y = x^5. Lnx$

- استعمل التعريف لإيجاد مشتقة كل مما يأتي:

$f(x) = 7. x^5, \ f(x) = 3. x^2 - 2.x + 4$

<u>الحـــل:-</u>

- $f(x) = 7. x^5$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7(x+\Delta x)^5-7x^5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7(x^5+5x^4\Delta x+10x^3\Delta^2x+10x^2\Delta^3x+5x\Delta^4x+\Delta^5x)-7x^5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7x^5+35x^4\Delta x+70x^3\Delta^2x+70x^2\Delta^3x+35x\Delta^4x+7\Delta^5x-7x^5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{35x^4 \Delta x + 70x^3 \Delta^2 x + 70x^2 \Delta^3 x + 35x\Delta^4 x + 7\Delta^5 x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(35x^4 + 70x^3 \Delta x + 70x^2 \Delta^2 x + 35x\Delta^3 x + 7\Delta^4 x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (35x^4 + 70x^3 \Delta x + 70x^2 \Delta^2 x + 35x\Delta^3 x + 7\Delta^4 x)$$

$$= 35x^4 + 70x^3.(0) + 70x^2.(0)^2 + 35x.(0)^3 + 7.(0)^4$$
$$=35\ x^4$$

- $f(x) = 3.\ x^2 - 2.x + 4$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 4 - (3x^2 - 2x + 4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x) - 2x - 2\Delta x + 4 - 3x^2 + 2x - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta^2 x - 2x - 2\Delta x + 4 - 3x^2 + 2x - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta^2 x - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x - 2 = 6x - 2$$

- استعمل الخواص لإيجاد مشتقة كل مما يأتي:

$f(x) = (x^3 + 2).(1 - x^2),\ (x + 2) / x,\ x^{-6}$

<u>الحـــــل:-</u>

1. $f(x) = (x^3 + 2).(1 - x^2)$

$f'(x) = (x^3 + 2).(-2.x) + (1 - x^2).(3.x^2)$

2. $f(x) = (x + 2) / x$

$$f'(x) = \frac{x.1 - (x+2).1}{x^2}$$

3. $f(x) = x^{-6}$

$f'(x) = -6x^{-7}$

- استعمل قانون السلسة لإيجاد كل مما يأتي:

(dy/dt) if $y = x^3 - 5.x^2 + 4,\ x = t^2$
(dy/dt) if $y = x^2 + 2,\ x = 2.t$

الحـــــل:-

1. (dy/dt) if $y = x^3 - 5.x^2 + 4,\ x = t^2$

$(dy/dx).(dx/dt) = (3.x^2 - 10.x).(2.t)$

2. (dy/dt) if $y = x^2 + 2,\ x = 2.t$

$(dy/dx).(dx/dt) = (2.x).(2)$

- إذا كانت $f(x) = x^5$,$g(x) = 3.x^2 - 7.x + 5$, $h = f o g$ فأوجد h'.

الحـــــل:-

$h' = f'(g(x)).\ g'(x)$

$f(g(x)) = (3.x^2 - 7.x + 5)^5$
$f'(g(x)) = 5(3.x^2 - 7.x + 5)^4$
$g'(x) = 6x - 7$

حسب الملاحظة

$h' = 5(3.x^2 - 7.x + 5)^4.(6x - 7)$

- جد معادلة المستقيم المماس والمستقيم العمود عند النقطة (1,3) للمنحني $x^2+2.x$

الحـــــل:-

بما أن ميل المماس يساوي المشتقة الأولى للمنحني فان:

$M_{tan} = f'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$

معادلة المماس تساوي:

$y - 3 = M_{tan}(x-1)$
$y - 3 = 2(x+1)(x-1) = 2(x^2-1)$
$y = 2(x^2-1) + 3$

بما أن ميل العمود يساوي

$$M_{\perp} = -\frac{1}{M_{tan}} = -\frac{1}{2(x+1)}$$

معادلة العمود تساوي:

$y - 3 = M_{\perp}(x-1)$

$$y - 3 = -\frac{1}{2(x+1)}(x-1)$$

$$y = -\frac{1}{2(x+1)}(x-1) - 3$$

- طبق مبرهنة القيمة الوسطى على الدالة $f(x) = x^2$ إذا علمت أن $a = 0,\ b = 1$.

الحـــــل:-

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(1)^2-(0)^2}{1-0} = 1$$

للبحث عن قيمة c نشتق الدالة أولا:

$f'(x) = 2x$

و من ثم نعوض عن مشتقة الدالة عند $x = c$

$f'(c) = 2x$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

- طبق مبرهنة رول على الدالة $f(x) = x^2 + 2$ إذا علمت أن $a = 1, b = 2$.

الحـــــل:-

بما أن :

$f(a) = x^2 + 2 = (1)^2 + 2 = 3$

$f(b) = x^2 + 2 = (2)^2 + 2 = 6$

ومعنى هذا أن:

$f(a) \neq f(b) \neq 0$

أي أنه لا يوجد أي عدد داخل الفترة المفتوحة (a,b) بحيث أن $f'(c) = 0$.

- استعمل قاعدة لوهابيتال للصيغة $0/0$ لايجاد كل مما يأتي:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3.x+2}{x^3-2}\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{4.x^3-7.x+3}{2.x^2+6},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x^2-9}$$

الحـــــل:-

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3.x+2}{x^3-2}$

بما أن:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(3.x+2) = 5 \neq \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(x^3-2) = -2$$

ومعنى ذلك أن:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq \lim_{x\to 1} g(x) \neq 0$$

أي لا تنطبق القاعدة على هذه الحالة

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4.x^3-7.x+3}{2.x^2+6}$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(4.x^2-7.x+3) = 3 \neq \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(2.x^2+6) = 6$$

ومعنى ذلك أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq \lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$$

أي لا تنطبق القاعدة على هذه الحالة

$$3.\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+2)=6\neq \lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-9)=-5$$

ومعنى ذلك أن:

$$\lim_{x\to 2} f(x)\neq \lim_{x\to 2} g(x)\neq 0$$

أي لا تنطبق القاعدة على هذه الحالة

- جد المشتقات الأولى و الثانية و الثالثة لكل مما يأتي:

$$x^3-3.x^2+2,\ 4.x^4+3.x^3-5,\ \ x^2-14$$

<u>الحــــــل:</u>

$$1.\quad x^3-3.x^2+2$$

$$f'(x)=3.x^2+6.x$$

$$f''(x)=6.x+6$$

$$f'''(x)=6$$

$$2.\quad 4.x^4+3.x^3-5$$

$$f'(x)=16.x^3+9.x^2$$

$$f''(x)=48.x^2+18.x$$

$$f'''(x)=96.x+18$$

$$3.\ \ x^2-14$$

$$f'(x)=2.x$$

$$f''(x)=2$$

$$f'''(x)=0$$

- خطط لمنحني الدالة :

$$x^2-9$$

<u>الحــــــل:-</u>

١ – نعين نقاط تقاطع المنحني مع المحورين

نفرض أن:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -9$

يتقاطع المنحني مع المحور الصادي عند النقطة $(0, -9)$

نفرض أن:

$y = 0 \Rightarrow\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3).(x+3) = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -3$

يتقاطع المنحني مع المحور السيني عند النقاط $(3,0)$ و$(-3, 0)$

٢– نحسب المشتقة الأولى و الثانية

$f'(x) = 2.\,x$

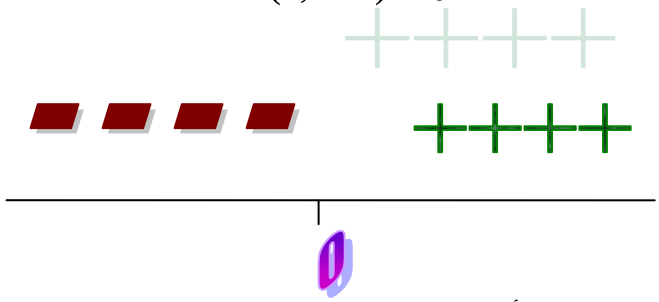
$f''(x) = 2$

٣–نستخدم المشتقة الأولى و الثانية لتعيين النقاط الحرجة والنهايات العظمى و الصغرى ونقاط الانقلاب.

1. $x = 0$

$x = 0$

من المشتقة الأولى نجد أن النقطة الحرجة $(0, -9)$.

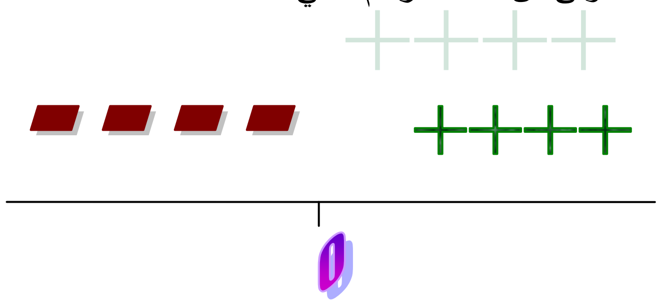


وهذا يعني أن إشارة المشتقة الأولى تتغير من سالب إلى موجب عند مرورها بالنقطة $x=0$ أثناء حركتها من اليمين إلى اليسار لذا فالدالة لها نهاية صغرى محلية عند النقطة $(0, -9)$

من المشتقة الثانية لا توجد نقاط انقلاب.

٤– نستخدم المشتقة الأولى لتعيين فترات التزايد و التناقص:

ندرس إشارة المشتقة الأولى من خلال الرسم الآتي:



أي أن الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ لأن المشتقة الأولى سالبة على تلك الفترة, و متزايدة على الفترة $(0, \infty)$ لأن المشتقة الأولى موجبة على تلك الفترة.

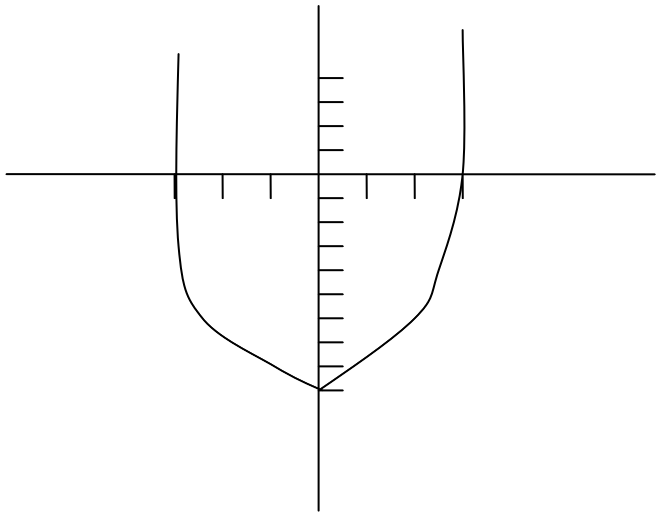
٥– نستخدم المشتقة الثانية لتعيين فترات التقعر نحو الأعلى و الأسفل:

بما أن إشارة المشتقة الثانية موجبة فالدالة مقعرة نحو الأعلى.

٦– نعين نقاط إضافية للمنحني:

x	–٣	٣	٠	2	٤
y	0	٠	–٩	–٥	٧

٧– نرسم منحني أملس يمر بالنقاط التي وجدناها.



- جسم يسير على خط مستقيم و معادلة سيره $s = 5.\ t^3 + 6.\ t^2$ حيث s مقاسه بالأمتار و t زمن سيره بالثواني . جد سرعته وتعجيله عند $t = 5$.

الحل:-

$v = ds / dt$

$= 15\, t^2 + 12\, t = 15 . 25 + 12 . 5 = 375 + 60 = 435$

$a = dv / dt$

$= 30\, t + 12 = 30 . 5 + 12 = 162$

- أوجد dy / dx حيث أن :

1. $y = 2.\ cos\ x\ .\ sin\ x$
2. $sin(x^2.\ y^2) = x$
   2. $y = sin^{-1}(cos\ x)$
   3. $y = e^x\ x^4$
   4. $y = x^5.\ Lnx$

الحل:-

1. $y = 2.\ cos\ x\ .\ sin\ x = sin\ 2\ x$

$$\frac{d \sin 2x}{dx} = \cos 2x \frac{d\,2x}{dx} = 2\cos 2x$$

2. $sin(x^2.\ y^2) = x \Rightarrow sin(x^2.\ y^2) - x = 0$

$$\frac{d \sin(x^2 y^2)}{dx} - 1 = \cos(x^2 y^2)\frac{d(x^2 y^2)}{dx} - 1 = (x^2.\frac{dy^2}{dx} + y^2.2x)\cos(x^2 y^2) - 1$$

3. $y = sin^{-1}(cos\ x)$

$$\frac{d\sin^{-1}(\cos x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\frac{d\cos x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x)$$

4. $y= e^x x^4$

$$\frac{dy}{dx}=e^x(4x^3)+x^4e^x$$

5. $y = x^5. Lnx$

$$\frac{dy}{dx}=x^5\frac{1}{x}+Lnx(5x^4)$$

مجموعة تدريبات للطلاب

- استعمل التعريف لإيجاد مشتقة كل مما يأتي:

$f(x) = x^3$, $f(x) = 2. x - 1$

- استعمل الخواص لإيجاد مشتقة كل مما يأتي:

$f(x) = (x^3 + 2).(1 - x^2)$, $(x + 2) / x$, x^5

- استعمل قانون السلسة لإيجاد كل مما يأتي:

(dy / dt) if $y = x^3 - 3. x^2 + 5. x - 4$, $x = t^2 + t$

(dy / dt) if $y = x^2 - 1$, $x = 2. t + 3$

- إذا كانت $f(x) = x^{15}$, $g(x) = 2. x^3 + x^2 - 5. x + 1$, $h = f o g$ فأوجد h'.
- جد معادلة المستقيم المماس والمستقيم العمود عند النقطة $(1,1)$ للمنحني $x^2 + y^2 = 2$
- طبق مبرهنة القيمة الوسطى على الدالة $f(x) = x^2$ إذا علمت أن $a = 1, b = 2$.
- طبق مبرهنة رول على الدالة $f(x) = x^2 - 3. x + 2$ إذا علمت أن $a = 1, b = 2$.
- استعمل قاعدة لوهابيتال للصيغة $0/0$ لايجاد كل مما يأتي:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3.x+2}{x^2-1},\ \lim_{x\to 0}\frac{4.x^3+3.x^2-8.x+1}{x^3+2.x^2+3.x-6},\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2.x-8}{x^2-9.x+14}$$

- جد المشتقات الأولى و الثانية و الثالثة لكل مما يأتي:

$x^2-3.x+2,\ 4.x^3+3.x^2-8.x+1,\ \ x^2-9.x+14$

- خطط لمنحني الدالة :

$x^2-9.x+14$

- جسم يسير على خط مستقيم و معادلة سيره $s = 2. t^5 + 8. t^4$ حيث s مقاسه بالأمتار و t زمن سيره بالثواني . جد سرعته وتعجيله عند $t = 3$.
- أوجد dy / dx حيث أن :

6. $y = 2. \sin x . \cos x$
7. $\cos(x^2. y^2) = x$
8. $y= \cos^{-1}(\sin x)$
9. $y= Ln\, x^2$
10. $y = x^2. e^x$

التكامل (The Integration)

التكامل غير المحدد:

إذا كانت $\frac{dy}{dx}=f(x)$ مشتقة الدالة $f(x)$ فان $dy=f(x)dx$ معادله تفاضلية ، لاحظ أن

$$\int dy=\int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad y=F(x)+c$$

حيث c ثابت التكامل و $\int$ رمز التكامل .

خواص التكامل:

لتكن $f(x)$ دالة و $x\in[a,b]$ فان :

1. $\int a.f(x)\,dx = a.\int f(x)\,dx$
2. $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
3. $\int [f_1(x)+f_2(x)\dots f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \dots + \int f_n(x)\,dx$
4. $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c\,,\ \ni n\neq -1\,, u=f(x)$

أمثلـــــــــة:

========

1. $\int 5.\,x^2\,dx = 5.[(x^3/3)+c]$
2. $\int (2.\,x+3)\,dx = \int 2.\,x\,dx + \int 3\,dx = x^2 + c$

3.

$$\int\frac{3.rdr}{\sqrt{1-r^2}}=\int 3.r.\left(1-r^2\right)^{-\frac{1}{2}}dr=\int -\frac{2}{2}.3.r.\left(1-r^2\right)^{-\frac{1}{2}}dr$$

$$=-\frac{3}{2}.\frac{\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=-\frac{6}{2}\sqrt{1-r^2}+c$$

$$=-3.\sqrt{1-r^2}+c$$

تكامل الدوال الخاصة:

درسنا الدوال الخاصة في الفصل الثالث وتطرقنا إلى اشتقاقها في الفصل الخامس، أما في هذا الفصل فسنتطرق إلى تكاملها ، وسنبدأ بالدوال المثلثية.

تكامل الدوال المثلثية:

(١) تكامل دالة الجيب:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

(٢) تكامل دالة الجيب تمام :

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

(٣) تكامل مربع دالة القاطع :

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

(٤) تكامل مربع دالة القاطع تمام :

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$$

(٥) تكامل حاصل ضرب دالتي القاطع و الظل :

$$\int \sec x \,.\, \tan x\, dx = \sec x + c$$

(٦) تكامل حاصل ضرب دالتي القاطع تمام و الظل تمام :

$$\int \csc x \,.\, \cot x\, dx = \csc x + c$$

أمثـــــــلة(Examples):

================

جد التكاملات ألآتية:

1. $\int \cos 2.t\, dt = (1/2) . \int \cos 2.t \,.\, 2\, dt = (1/2). \sin 2.t + c$

2. $\int \sin 3.x\, dx = (1/3) \int \sin 3.x \;.3dx = -(1/3). \cos 3.x + c$

3. $\int \dfrac{\cos 2.x}{\sin^3 2.x} dx = \dfrac{1}{2} \int \sin^{-3} 2 \,.\, \cos 2.x dx = \dfrac{1}{2} . \dfrac{\sin^{-2} 2.x}{-2} + c$

4. $\int \sec^3 x. \tan x\, dx = \int \sec^2 x. \sec x. \tan x\, dx = (\sec^3 x / 3) + c$

<u>تكامل القوى الفردية والزوجية للدوال المثلثية :</u>

(أ) لإيجاد تكامل $\int \sin^n x. \cos^m x\, dx$ نتبع ما يأتي :

(١) في حالة كون أحد ألأسين فردي نستعمل إحدى المتطابقات الآتية :

$Sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \;\; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

مثـــــال(Example):

==============

جد التكامل الآتي : $\int \sin^2 x. \cos^3 x\;\; dx$

الحـــــــل:

$$\int \sin^2 x. \cos^3 x\;\; dx = \int \sin^2 x.\cos x. \cos^2 x\;\; dx = \int \sin^2 x.\cos x. (1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int \sin^2 x.\cos x\, dx - \int \sin^4 x.\cos x\, dx$$

$$= (\sin^3 x / 3) - (\sin^5 x / 5) + c$$

(٢) في حالة كون كل من الأسين زوجي نستعمل المتطابقات الآتية:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}.(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}.(1+\cos 2x)$$

مثـــــال(Example):

==============

جد التكامل الآتي : $\int sin^2x.\ cos^2x\ \ dx$

الحــــــــل:

$$\int \sin^2 x.\cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}.(1-\cos 2.x).\frac{1}{2}.(1+\cos 2.x)dx$$

$$= \frac{1}{4}.\int (1-\cos 2.x).(1+\cos 2.x)dx$$

$$= \frac{1}{4}.\int \left(1-\cos^2 2.x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}.\int dx - \frac{1}{4}.\int \cos^2 2.x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}.x - \frac{1}{4}.\int \frac{1}{2}.(1+\cos 4.x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}.x - \frac{1}{8}.\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4.x dx$$

$$= \frac{1}{4}.x - \frac{1}{8}.x + \frac{1}{32}\sin 4.x + c$$

(٣) في حالة كون كل من الأسين فردي نستعمل إحدى المتطابقات الآتية :

$Sin^2x = 1 - cos^2x,\ \ cos^2x = 1 - sin^2x$

مثـــــال(Example):

==============

جد التكامل الآتي : $\int sin^3 3.\ x.\ cos^3 3.\ x\ \ dx$

الحــــــــل:

$$\int \sin^3 3.x.\cos^3 3.x dx = \int \sin^3 3.x.\cos 3.x.\cos^2 3.x\ dx$$

$$= \int \sin^3 3.x.\cos 3.x.\left(1-\sin^2 3.x\right)dx$$

$$= \int \sin^3 3.x.\cos 3.x\ dx - \int \sin^5 3.x.\cos 3.x\ dx$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{\sin^4 3.x}{4} - \frac{1}{3}.\frac{\sin^6 3.x}{6} + c$$

(ب) لإيجاد تكامل $\int tan^n x.\ sec^m x\ dx$ نتبع ما يأتي :

(١) في حالة كون أس sec زوجي نجزئه على النحو الآتي :

$$sec^m x = sec^{m-2} x.\ sec^2 x$$

(٢) في حالة كون أس tan فردي نجزئه على النحو الآتي :

$$tan^n = tan^{n-1} x.\ tan\ x$$

ونستعمل المتطابقة ألآتية: $tan^2 x = sec^2 x - 1$

نطبق نفس القاعدة على $\int cot^n x.csc^m x\ dx$ مستفيدين من المتطابقة $cot^2 x = csc^2 x - 1$

أمثلـــــة(Examples):

==============

1. $\int sec^4 x\ dx = \int sec^2 x.\ sec^2 x dx = \int (1+tan^2 x)\ .\ sec^2 x dx$

$$\int sec^2 x\ dx + \int sec^2 x.\ tan^2 x\ dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

2.

$$\int \sqrt{\csc x}.\cot^3 x dx = \int \sqrt{\csc x}.\cot^2 x.\cot x dx = \int \sqrt{\csc x}.(\csc^2 x - 1).\cot x dx$$

$$= \int \csc^{\frac{5}{2}} x.\cot x dx - \int \csc^{\frac{1}{2}} x.\cot x dx$$

$$= \int \csc^{\frac{3}{2}} x.\csc x.\cot x dx - \int \csc^{-\frac{1}{2}} x.\csc x.\cot x dx$$

$$= -\frac{\csc^{\frac{5}{2}} x}{\frac{5}{2}} + \frac{\csc^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2}} + c$$

(ج) لإيجاد تكامل كل من:

1. $\int sin\ m.\ x\ .\ sin\ n.\ x\ dx$

2. $\int sin\ m.\ x\ .\ cos\ n.\ x\ dx$

3. $\int cos\ m.\ x\ .\ cos\ n.\ x\ dx$

لاحظ الآتي :

$cos(m+n).\ x = cos\ m.\ x\ .\ cos\ n.\ x - sin\ m.\ x\ .\ sin\ n.\ x$

$cos(m-n).\ x = cos\ m.\ x\ .\ cos\ n.\ x + sin\ m.\ x\ .\ sin\ n.\ x$

$sin\ (m+n).\ x = sin\ m.\ x\ .\ cos\ n.\ x + cos\ m.\ x\ .\ sin\ n.\ x$

$sin\ (m-n).\ x = sin\ m.\ x\ .\ cos\ n.\ x - cos\ m.\ x\ .\ sin\ n.\ x$

$sin\ m.\ x\ .\ sin\ n.\ x = (1/2).\ [cos(m-n).\ x - cos(m+n).\ x]$

$sin\ m.\ x\ .\ cos\ n.\ x = (1/2).\ [sin\ (m-n).\ x + sin\ (m+n).\ x]$

$cos\ m.\ x\ .\ cos\ n.\ x = (1/2).\ [cos(m-n).\ x + cos(m+n).\ x]$

مثـــــال(Example):

=============

جد التكامل ألآتي: $\int \sin 3.x . \cos 5.x$

ألحـــــــل:

$$\int \sin 3.x . \cos 5.x = \int (1/2). [\sin (3-5). x + \sin (3+5). x]dx$$
$$= \int (1/2). [\sin (-2). x + \sin (8). x]dx$$
$$= (1/2). [\int \sin (2). x\, dx + \int \sin 8.x\, dx]$$
$$= (1/4). \cos 2.x - (1/16). \cos 8x + c$$

تكامل معكوس الدوال المثلثية:

1. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c \quad or \quad -\cos^{-1} u + c$

2. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c \quad or \quad -\cot^{-1} u + c$

3. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2}} = \sec^{-1}|u| + c \quad or \quad -\csc^{-1}|u| + c$

أمثـــــــلة(Examples):

================

جد كلا من التكاملات الآتية:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4.x^2-1}} = \frac{2.dx}{2.x\sqrt{4.x^2-1}} = \sec^{-1}|2.x| + c \quad or \quad -\csc^{-1}|2.x| + c$

2. $\int \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} t + c \quad or \quad -\cot^{-1} t + c$

3. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \sin^{-1}(\sin x) + c \quad or \quad -\cos^{-1}(\sin x) + c$

تكامل دالة اللوغاريتم الطبيعي:

لاحظنا في الفصل الخامس إن مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي تكتب على النحو الآتي:

$dLn\, u = du / u$

أما تكامل هذه الدالة فيمكن كتابته على النحو الآتي:

$$\int (du / u) = Ln\ |u| + c \ \ni u \neq 0$$

أمثـــــــلة(Examples):

================

جد كلا من التكاملات الآتية:

1. $\int \frac{xdx}{4.x^2+1} = \int \frac{xdx}{4.x^2+1} . \frac{8}{8} = \frac{1}{8} Ln|4.x^2+1| + c$

2. $\int \frac{2.x-5}{x}\,dx = \int 2dx - \int \frac{5}{x}\,dx = 2.x - 5.Ln|x| + c$

3. $\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = Ln|2-\cos x| + c$

تكامل الدالة الأسية:

كما عرفنا من الفصل الخامس إن مشتقة الدالة الأسية يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$de^u = e^u\,du$

أما تكامل هذه الدالة فيمكن كتابته على النحو الآتي: $\int de^u = e^u + c$

أمثـــــــــلة(Examples):

===============

جد كلا من التكاملات الآتية:

1. $\int e^{2.x}\,dx = (1/2).\,e^{2.x} + c$

2. $\int e^{\sin x}.\,\cos x\,dx = e^{\sin x} + c$

3. $\int e^{x}.\,\sin(e^{x})\,dx = -\cos(e^{x}) + c$

التكامل المحدد:

لتكن كل من b,a تنتمي إلى الفترة المغلقة $[\alpha, \beta]$ و F التكامل غير المحدد للدالة f فبالإمكان التعبير عن التكامل المحدد للدالة على النحو الآتي :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

تدعى a الحد الأدنى للتكامل و b الحد الأعلى للتكامل و f قابلة للتكامل على الفترة االمغلقة $[a,b]$ إذا وجد $\int_a^b f$.

خواص التكامل المحدد :

1. $\int_a^b (k_1 f \mp k_2 g) = k_1\int_a^b f \mp k_2\int_a^b g$

2. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

3. $\int_a^b f = -\int_b^a f$

4. $\int_a^a f = 0$

$$5.\ \int_{-a}^{a} f = 2.\int_{0}^{a} f = 2.\int_{-a}^{0} f$$

ملاحظـــــــــة:

إذا كان $0 \in [-a\,,\,a]$ و دالة f زوجية فان $f(-x)=f(x)$ ، بينما إذا كانت دالة f فردية فان $f(-x)=-f(x)$.

أمثـــــــــلة(Examples):

===============

احسب قيمة التكاملات الآتية:

$$1.\ \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1)+1 = 2$$

$$2.\ \int_{0}^{2} \sqrt{4.x+1}\,dx = \frac{4}{4}.\frac{(4.x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{2} = \frac{13}{3}$$

$$3.\ \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{2\,dx}{2.x\sqrt{4.x^2-1}} = \sec^{-1}|2.x| \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \sec^{-1}|2| - \sec^{-1}\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

بعض طرق التكامل (Some Methods Of Integration):

سنتطرق الآن إلى بعض طرق التكامل إلى التكاملات التي لا يمكن إيجاد نواتجها بصورة مباشرة كما لاحظنا سابقا . و سنبدأ بالطريقة الآتية:

(١)التكامل بالتجزئة (Integration by Parts):

إن طريقة التكامل بالتجزئة تعتمد على مشتقة حاصل ضرب دالتين وفق الآتي:

$$d(u.v) = u.dv + v.du \Longrightarrow u.dv = d(u.v) - v.du$$

وبأخذ تكامل الطرفين ينتج الآتي:

$$\int u.dv = \int d\,(u.v) - \int v.du$$

وبما أن التكامل غير محدد وجب ظهور ثابت التكامل c ليصبح القانون :

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du + c}$$

أمثـــــــــلة(Examples):

===============

جد نواتج التكاملات الآتية :

$$1.\ \int x.\, e^{x}\, dx$$

Let $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x\, dx \Rightarrow v = e^x$

$\int u.dv = u.v - \int v.du + c$

$\int x.\, e^x\, dx = x.\, e^x - \int e^x.dx + c$

$= x.\, e^x - e^x + c$

2. $\int Ln\, x\, dx$

Let $u = Ln\, x \Rightarrow du = (1/x)$, $dv = dx \Rightarrow v = x$

$\int u.dv = u.v - \int v.du + c$

$\int Ln\, x\, dx = x.\, Ln\, x - \int (1/x)\, .\, x\, dx + c$

$= x.\, Ln\, x - x + c$

ملاحظـــــة:

عند اختيار u بطريقة التكامل بالتجزئة يجب أن تكون الأفضلية لما يأتي:

(١) الدالة التي يكون تكاملها غير معروف مثل : $tan^{-1}\, x$, $Ln\, x$.

(٢) ألدالة الجبرية على أن يكون الأس عدد صحيح غير سالب إلا في الحالة الأولى .

(٣) الدالة الأسية .

(٤) الدالة المثلثية.

(٢) تجزئة الكسور (Partial Fractions):

(١) تستخدم هذه الطريقة في حالة كون أس البسط أقل من أس المقام حيث توجد أكثر من حالة هي:

أ- إذا كان المقام من الدرجة الأولى وعلى النحو الآتي $(x - a)^n$ تكون التجزئة وفقا لما يأتي:

$$\boxed{\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{E}{(x-a)^n}}$$

مثــــال(Example):

=============

جد التكامل ألآتي: $\int \frac{x^2 + 5.x + 2}{(x-1)^3}\, dx$

الحـــــل:

$$\frac{x^2 + 5.x + 2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

$x^2 + 5.\, x + 2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$

$= A.\, x^2 - 2.\, A.\, x + A + B.\, x - B + C$

$= A.\, x^2 + (-2 \,.\, A + B).\, x + (A - B + C)$

$A = 1$

$-2 \,.\, A + B = 5 \Rightarrow B = \; 2 \,.\, 1 + 5 = 7$

$A - B + C = 2 \;\; \Rightarrow C = 2 - A + B = 2 - 1 + 7 = 8$

$$\frac{x^2 + 5.x + 2}{(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{8}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{x^2 + 5.x + 2}{(x-1)^3}\, dx = \int \frac{1}{(x-1)} dx + \int \frac{7}{(x-1)^2} dx + \int \frac{8}{(x-1)^3} dx$$

$$= Ln|x-1| - \frac{7}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-1)^3} + c$$

ب- اذا كان المقام من الدرجة الثانية و قابل للتحليل تكون التجزئة كما في المثال الآتي:

مثـــــال(Example):

=============

جد التكامل ألآتي: $\int dx / (x^2 - 2.\, x - 3)$

الحـــــــل:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2.x - 3} = \int \frac{1}{(x-3).(x+1)}\, dx$$

$$\frac{1}{(x-3).(x+1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$= \frac{A.(x+1) + B.(x-3)}{(x-3).(x+1)}$$

$$1 = A.(x+1) + B.(x-3) = A.x + A + B.x - 3.B$$

$$(A+B).x + (A - 3.B) = 1$$

$$(A+B) = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$(A - 3.B) = 1 \Rightarrow -B - 3.B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$= \int \left(\frac{1}{4(x-3)} - \frac{1}{4(x+1)}\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}.Ln|x-3| - \frac{1}{4}.Ln|x+1| + c$$

ج- إذا كان المقام من الدرجة الثانية وداخل قوس تكون التجزئة كما في المثال الآتي:

مثـــــال(Example):

==============

جد التكامل ألآتي: $\int \frac{2.x^2-5}{(x^2+3)^2}\ dx$

الحـــــل:

$$\frac{2.x^2-5}{(x^2+3)^2} = \frac{A.x+B}{(x^2+3)} + \frac{C.x+D}{(x^2+3)^2}$$

$$\frac{2.x^2-5}{(x^2+3)^2} = \frac{(A.x+B).(x^2+3)+C.x+D}{(x^2+3)^2}$$

$2.\ x^2 - 5 = (A.x+B)\ .\ (x^2+3) + C.x+D$
$2.\ x^2 - 5 = A.x^3 + B.x^2 + 3.A.x + 3.B + C.x + D$
$2.\ x^2 - 5 = A.x^3 + B.x^2 + (3.A+C).x + (3.B+D)$

$A=0,\ B=2,\ C=0,\ 3.B+D=-5 \Rightarrow D=-11$

$$\int \frac{2.x^2-5}{(x^2+3)^2}\ dx = \int \frac{2}{x^2+3}\ dx - \int \frac{11}{(x^2+3)^2}\ dx$$

$$= \int \frac{2}{3.\left(1+\frac{x^2}{3}\right)}\ dx - \int 11.(x^2+3)^{-2} dx$$

$$= \int \frac{2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}.x\right)^2}\ dx - \int 11.(x^2+3)^{-2} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}.\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}.x + 11.\frac{(x^2+3)^{-1}}{-1} + c$$

(٢) إذا كان أس البسط أكبر من أس ألمقام نستعمل القسمة الطويلة كما في المثال الآتي:

مثـــــال(Example):

جد التكامل ألآتي: $\displaystyle\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx$

الحـــــــل:

$$\begin{array}{r|l} & x^3+x \\ \hline x^2-1 & x^5+2 \\ & \mp x^5 \pm x^3 \\ \cline{2-2} & x^3+2 \\ & \mp x^3 \pm x \\ \cline{2-2} & x+2 \end{array}$$

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \int\left(x^3+x+\frac{x+2}{x^2-1}\right)dx$$

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1).(x+1)}$$

$$= A.x+A+B.x+B$$
$$= (A+B).x+(A-B)$$

$$A+B=1,\ A-B=2 \Rightarrow A=3/2\ ,\ B=-1/2$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{\frac{3}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$$

$$\int (x^3 + x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1})\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}.Ln|x-1| - \frac{1}{2}.Ln|x+1| + c$$

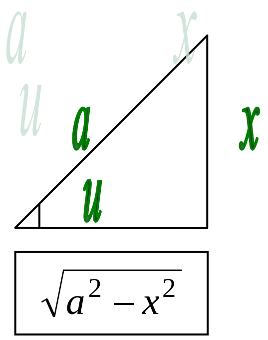
<u>(٣) الفرضيات المثلثية(The Trigonometric Substitutions):</u>

تستخدم هذه الطريقة في حالة وجود جذور ونكون على ثلاث حالات هي :

$\sqrt{a^2 - x^2}$

1. $\sin u = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a \,.\sin u$

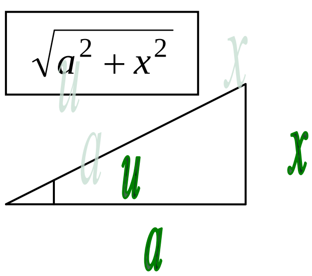
$\sqrt{a^2 - x^2} = a \,.\cos u$



$\sqrt{a^2 + x^2}$

2. $\tan u = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a \,.\tan u$

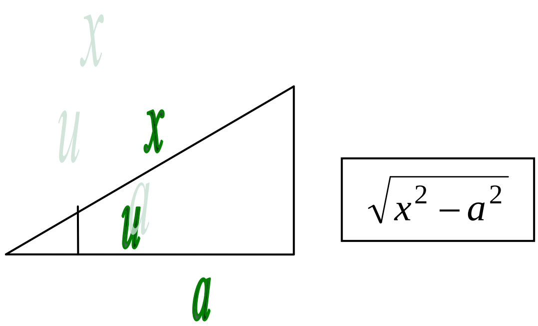
$\sqrt{a^2 + x^2} = a \,.\tan u$



$\sqrt{x^2 - a^2}$

3. $\sec u = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a \,.\sec u$

$\sqrt{x^2 - a^2} = a \,.\tan u$

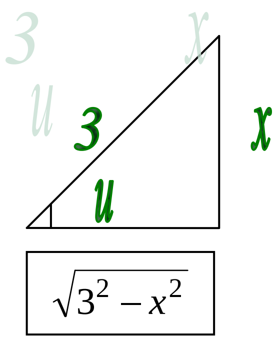


:(Example)مثـــــال

==============

أوجد $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{9 - x^2}\right)^3}$

الحـــــــل:



$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{9 - x^2}\right)^3}$$

3. sin u=x , 3. cos u du =dx

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{9 - x^2}\right)^3} = \int \frac{3.\cos u du}{\left(\sqrt{3^2 - 3^2.\sin^2 u}\right)^3} = \int \frac{3.\cos u du}{\left(\sqrt{1 - .\sin^2 u}\right)^3} = \int \frac{3.\cos u du}{(3.\cos u)^3}$$

$$\int \frac{3.\cos u du}{3^3.\cos u^3} = \frac{1}{9}.\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \frac{1}{9}.\int \sec^2 u\, du = \frac{1}{9}.\tan u + c$$

(٤) التكامل بإكمال المربع:

إذا كانت $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ حيث $a \neq 0$ يمكن تحويل الدالة إلى الشكل $a.u^2 + B$ باستعمال طريقة إكمال المربع على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} a.\, x^2 + b.\, x + c &= a.\, [\, x^2 + (b/a).\, x] + c \\ &= a.\, [\, x^2 + (b/a).\, x + (b^2/4.a^2)] + c - (b^2/4.a^2) \\ &= a.\, [\, x + (b/2.a)]^2 + c - (b^2/4.a^2) \\ &= a.\, u^2 + B \end{aligned}$$

حيث $u = x + (b/2.a)\ ,\ B = c - (b^2/4.a^2)$

ملاحظـــــــة:

نستخدم هذه الطريقة في حالة :

أ- عدم إمكانية تحليل الحد $a.\, x^2 + b.\, x + c$ أو اختفاء الثابت c .

ب- وقوع الحد $a.\, x^2 + b.\, x + c$ تحت جذر مرفوع لقوة كسرية .

و ذلك لغرض استعمال التكامل المباشر أو التكامل بواسطة الفرضيات المثلثية متى ما كان ذلك ممكنا.

مثــــــال(Example):

==============

جد ناتج التكامل الآتي: $\int \frac{dx}{\sqrt{2.x - x^2}}$

الحــــــــل:

لاحظ أن الحد $\sqrt{2.x - x^2}$ لا يمكن إيجاد تكامله مباشرة أو باستعمال الفرضيات المثلثية أو تجزئة الكسور وذلك لوقوعه تحت الجذر لذا سنقوم باستعمال طريقة إكمال المربع.

$$\begin{aligned} \sqrt{2.x - x^2} &= \sqrt{-\left(x^2 - 2.x\right)} = \sqrt{-\left(x^2 - 2.x + 1 - 1\right)} \\ &= \sqrt{-\left[(x-1)^2 - 1\right]} = \sqrt{1 - (x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2.x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1) + c$$

$$or \qquad = \cos^{-1}(x-1) + c$$

(٥) التكامل باستعمال الفرضيات المناسبة:

في أغلب الأحيان تظهر لدينا تكاملات لايمكن استعمال أي من الطرق السابقة لإيجاد نواتجها لذا نستعمل فرضية تناسب التكامل وفقا لما يأتي:

أ- هنا نستعمل أسلوبا جديدا لتحويل الدوال المثلثيه إلى صيغ جبرية باستعمال فرضية معينة هي:

$$Z = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1 - Z^2}{1 + Z^2}, \sin x = \frac{2.Z}{1 + Z^2}$$

مثـــــال(Example):

==============

جد ناتج التكامل الآتي: $\int \frac{dx}{\cos x}$

الحـــــــل:

$$\cos x = \frac{1-Z^2}{1+Z^2}$$

$$dx = \frac{2dZ}{1+Z^2}$$

$$\int \frac{\frac{2dZ}{1+Z^2}}{\frac{1-Z^2}{1+Z^2}} = \int \frac{2dZ}{1-Z^2} = \int \frac{2dZ}{(1-Z).(1+Z)}$$

$$\frac{2}{(1-Z).(1+Z)} = \frac{A}{(1-Z)} + \frac{B}{(1+Z)}$$

$$A+B=2 \Rightarrow A=1,\ B=1$$

$$\int \left(\frac{A}{(1-Z)} + \frac{B}{(1+Z)} \right) dZ = \int \frac{dZ}{(1-Z)} + \frac{dZ}{(1+Z)}$$

$$= -Ln|1-Z| + Ln|1+Z| + c$$

$$= Ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + c = Ln\left|\frac{(1+Z)^2}{1-Z^2}\right| + c$$

$$= Ln\left|\frac{1+2.Z+Z^2}{1-Z^2}\right| + c = Ln\left|\frac{1+Z^2}{1-Z^2} + \frac{2.Z}{1-Z^2}\right| + c$$

$$= Ln|\sec x + \tan x| + c$$

ب- نستعمل فرضية تناسب السؤال لغرض الحل كما موضح في المثال الآتي:

مثـــــال(Example):

==============

جد ناتج التكامل الآتي: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

الحـــــــل:

نفرض أن $x=Z^4 \Leftarrow dx=4.Z^3dz$

$$\int \frac{4.Z^2.Z^3 dZ}{1+Z} = 4.\int \frac{Z^5}{1+Z} dZ$$

$$\begin{array}{r|l}
 & Z^4 - Z^3 + Z^2 - Z + 1 \\ \hline
1+Z & Z^5 \\
 & \underline{\pm Z^5 \pm Z^4} \\
 & -Z^4 \\
 & \underline{\mp Z^4 \mp Z^3} \\
 & Z^3 \\
 & \underline{\pm Z^3 \pm Z^2} \\
 & -Z^2 \\
 & \underline{\mp Z^2 \mp Z} \\
 & Z \\
 & \underline{\pm Z \pm 1} \\
 & -1
\end{array}$$

$$= 4.\int [(Z^4 - Z^3 + Z^2 - Z + 1) - \{1/(1+Z)\}]\, dZ$$

$$= 4.[\,(Z^5/5) - (Z^4/4) + (Z^3/3) + Z - Ln\left|1+Z\right| + c]$$

<u>مجموعة تمارين مع حلها</u>

1. $\int \sqrt{3.x - 1}\, dx$

2. $\int \left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right) dx$

3. $\int \frac{(Z-1)}{\sqrt[3]{Z^2 - 2.Z + 1}}\, dZ$

4. $\int \sin\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$

5. $\int (1-\cos^2 2.t).\sin 2.t\,dt$

6. $\int \cot^2 5.x\,dx$

7. $\int \sqrt{\sec x}.\tan^3 x\,dx$

8. $\int sin\ 3.\ x\ cos\ 5.\ x\ dx$

9. $\int -\frac{\cot^{-1} x}{1+x^2}\,dx$

10. $\int \frac{\csc x}{\sec x}\,dx$

11. $\int e^{5.x} dx$

12. $\int e^{\sin x}.(\cos x)dx$

13. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

14. $\int e^{-\sqrt{t}}\,dt$

15. $\int \frac{x^2-5}{(x^2-3)^2}\,dx$

16. $\int -\frac{dx}{x^2.\sqrt{x^2-9}}$

17. $\int \frac{dx}{6..x^2+6.x+3}$

1. $\int \sqrt{3.x-1}\,dx$

الحـــــل:-

$$\int (3x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{3}{3}dx=\frac{1}{3}\int 3(3x-1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2\sqrt{(3x-1)^3}}{9}+c$$

2. $\int \left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)dx$

الحـــــل:-

$$\int x^3 dx - \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + c$$

3. $\int \frac{(Z-1)}{\sqrt{Z^2 - 2.Z + 1}}\, dZ$

الحـــــل:-

$$\int \frac{(Z-1)}{\sqrt{(Z-1)^2}} dZ = \int \frac{(Z-1)}{(Z-1)} dZ = \int dZ = Z + c$$

4. $\int \sin\sqrt{x}\, \frac{dx}{\sqrt{x}}$

الحـــــل:-

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} . \frac{2}{2} dx = 2\int \frac{\sin x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} dx = -2\cos x^{\frac{1}{2}} + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

5. $\int (1 - \cos^2 2.t).\sin 2.t\; dt$

الحـــــل:-

$$\int \sin 2t dt - \int \sin 2t \cos^2 2t dt = \frac{1}{2}\int \sin 2t.2dt - \int \sin 2t(1 + \cos 4t)dt$$

$$= -\cos 2t - \int \cos 4t dt = -\cos 2t - \frac{1}{4}\int \cos 4t.4dt = -\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 4t + c$$

6. $\int \cot^2 5.x\; dx$

الحـــــل:-

$$\int (\csc^2 5x - 1)dx = \int \csc^2 5x dx - \int dx = -\frac{1}{5}\cot 5x + x + c$$

7. $\int \sqrt{\sec x}.\tan^3 x\; dx$

الحـــــل:-

$$\sqrt{\sec x}\tan^2 x\tan x dx=\int\sqrt{\sec x}(\sec^2 x-1)\tan x dx=\int\sec^{\frac{5}{2}}x\tan x dx-\int\sec^{\frac{1}{2}}x\tan x dx$$

$$=\int\sec^{\frac{3}{2}}x\sec x\tan x dx-\int\sec^{-\frac{1}{2}}x\sec x\tan x dx=-\frac{\sec^{\frac{5}{2}}x}{\frac{5}{2}}+\frac{\sec^{\frac{1}{2}}x}{\frac{1}{2}}+c$$

8. $\int\cos 2.\,x\cos 3.\,x\,dx$

الحـــــل:-

$$\int\frac{1}{2}[\cos(2-3)x+\cos(2+3)x]dx=\int\frac{1}{2}[\cos(-1)x+\cos 5x]dx$$

$$=\frac{1}{2}[\int\cos(-1)x dx+\int\cos 5x dx]$$

9. $\int-\frac{\cot^{-1}x\,dx}{1+x^2}$

الحـــــل:-

$$\int-\frac{\cot^{-1}x\,dx}{1+x^2}=\cot^{-1}x+c$$

10. $\int\frac{\csc x}{\sec x}dx$

الحـــــل:-

$$\int\frac{\csc x}{\sec x}dx=\int\frac{\csc x}{\frac{1}{\cos x}}dx=\int\csc x.\cos x dx$$

نقسم على $\sin x$ فيصبح التكامل على النحو الآتي :

$$\int\frac{\csc x\cos x}{\sin x}dx=\int\csc x.\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\csc x\cot x dx=\csc x+c$$

11. $\int e^{5.x}dx$

الحـــــل:-

$$\int e^{5.x}dx=\frac{1}{5}e^{5x}+c$$

12. $\int e^{\tan x}.(\sec^2 x)dx$

الحـــــل:-

$$\int e^{\tan x}.(\sec^2 x)dx=e^{\tan x}+c$$

13. $\int_0^{\pi} \sec x \tan x \, dx$

الحـــــل:-

$$\int_0^{\pi} \sec x \tan x \, dx = \sec x \Big]_0^{\pi} = \sec \pi - \sec 0 = -1 - 1 = -2$$

14. $\int e^{-\sqrt{t}} dt$

الحـــــل:-

Let $u = e^{-\sqrt{t}}, \, du = -e^{-\sqrt{t}} . -\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = e^{-\sqrt{t}} . \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt, \;\; dv = dt, \;\; v = t$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int - e^{-\sqrt{t}} dt = e^{-\sqrt{t}} t - \int t e^{-\sqrt{t}} . \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = e^{-\sqrt{t}} t - \frac{1}{2} \int t e^{-\sqrt{t}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= e^{-\sqrt{t}} t + e^{-\sqrt{t}} + c$$

15. $\int \frac{x^2 - 5}{\left(x^2 - 3\right)^2} dx$

الحـــــل:-

$$\frac{x^2 - 5}{\left(x^2 - 3\right)^2} = \frac{Ax + B}{\left(x^2 - 3\right)} + \frac{Cx + D}{\left(x^2 - 3\right)^2} = \frac{(Ax + B)\left(x^2 - 3\right) + (Cx + D)}{\left(x^2 - 3\right)^2}$$

$$x^2 - 5 = (Ax + B)\left(x^2 - 3\right) + (Cx + D)$$

$$= Ax^3 + Bx^2 - 3Ax - 3B + Cx + D$$

$A = 0$

$B = 1$

$(C - 3A) = 0$

$C = 0$

$D - 3B = -5$

$D - 3 = -5$

$D = -2$

$$\int \frac{x^2-5}{\left(x^2-3\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-3)}dx + \int \frac{-2}{\left(x^2-3\right)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{3(\frac{1}{3}x^2-1)}dx - \int 2(x^2-3)^{-2}dx$$

$$= \int \frac{1}{3}.\frac{1}{\left[(\frac{1}{\sqrt{3}}x)^2-1\right].(-1)}dx - 2\frac{(x^2-3)^{-1}}{-1}$$

$$= \int \frac{1}{3}\frac{1}{1-(\frac{1}{\sqrt{3}}x)^2}dx + \frac{2}{(x^2-3)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{(x^2-3)}$$

16. $\int -\frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}$

الحـــــل:-

$$\int \frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}|x| + c$$

17. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-6.x+4}}$

الحـــــل:-

نلاحظ ان الحد $\sqrt{x^2-6.x+4}$ لايمكن تحليله لذلك نستخدم طريقة إكمال المربع:

$$x^2-6x+4 = x^2-6x+9-9+4 = x^2-6x+9-5 = (x-3)^2-5$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-6.x+4}} = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{(x-3)^2-5}}$$

نفرض أن $u=(x-3)$ فنستنتج من ذلك أن $x=u+3$

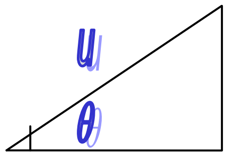
$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-6.x+4}} = \int \frac{u+4}{\sqrt{u^2-5}}du = \int \frac{udu}{\sqrt{u^2-5}} + 4\int \frac{du}{\sqrt{u^2-5}}$$

لاحظ أن $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-5}}$ لايمكن تكامله مالم نستخدم طريقة الفرضيات المثلثية:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-5}} = \frac{\sqrt{5}\sec\theta.\tan\theta}{\sqrt{5}\tan\theta} d\theta$$

$$u=\sqrt{5}\sec\theta \Rightarrow du=\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$=\int \sec\theta\, d\theta = Ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+c$$



$\sqrt{u^2-5}$

$\sqrt{5}$

<u>مجموعة تدريبات للطلاب</u>

1. $\int \sqrt{2.x+1}\, dx$
2. $\int \left(x^2-\sqrt{x}\right) dx$
3. $\int \frac{(Z+1)}{\sqrt[3]{Z^2+2.Z+2}}\, dZ$

4. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$
5. $\int \left(1-\sin^2 3.t\right).\cos 3.t\; dt$
6. $\int \tan^2 3.x\, dx$
7. $\int \csc^4 x\, dx$
8. $\int \sin 2.x \cos 7.x\, dx$
9. $\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$

10. $\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

11. $\int e^{3.x} dx$

12. $\int e^{\cos x} .(-\sin x) dx$

13. $\int_{0}^{\pi} \cos x \, dx$

14. $\int e^{\sqrt{t}} dt$

15. $\int \frac{x^2 - 3}{\left(x^2 + 1\right)^2}\, dx$

16. $\int \frac{dx}{x^2 . \sqrt{x^2 - 4}}$

17. $\int \frac{dx}{4..x^2 + 4.x + 2}$